

## Os Modelos Mentais Relacionados ao Aprendizado de Sistemas Lineares no Ensino Superior

GUSTAVO VENANCIO PIMENTA<sup>1</sup>, GRAZIELA BELMIRA DIAS DA SILVA<sup>2</sup>, APARECIDA DOS REIS EUFRÁSIO<sup>3</sup>, ADELIENE APARECIDA PORTO<sup>4</sup> e NILTOM VIEIRA JUNIOR<sup>5</sup>

Curso de Licenciatura em Matemática, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais (IFMG - *Campus* Formiga)

<sup>1</sup>[gustavo.venancio@hotmail.com](mailto:gustavo.venancio@hotmail.com), <sup>2</sup>[grazybdias@hotmail.com](mailto:grazybdias@hotmail.com), <sup>3</sup>[cidinhaeufrasio@hotmail.com](mailto:cidinhaeufrasio@hotmail.com),  
<sup>4</sup>[adelieneporto@hotmail.com.br](mailto:adelieneporto@hotmail.com.br), <sup>5</sup>[niltom@gmail.com](mailto:niltom@gmail.com)

**Resumo.** Na tentativa de investigar os modelos mentais de sistemas lineares foram entrevistados 58 alunos e 1 professor do Instituto Federal de Minas Gerais (IFMG) *Campus* Formiga. Além de identificar quatro modelos dotados de conceituação teórica, verificou-se que a hipótese de níveis para evolução destes modelos elaborada inicialmente pela pesquisa divergiu da apresentada pelos alunos (o que pode representar falsas concepções dos docentes a respeito do conhecimento que os alunos possuem. Tal fato pode influenciar, por exemplo, a atribuição adequada de pesos em uma avaliação ou o enfoque dado ao planejar uma aula). Observaram-se, ainda, pontos mais susceptíveis às falhas na aprendizagem como, por exemplo, a significação gráfica da resolução de um sistema. Com o resultado, tornou-se possível fornecer aos professores parâmetros os quais justifiquem a inserção de outras formas de ensino (como, por exemplo, fornecer suporte necessário para atender aos diferentes níveis cognitivos apresentados pelos estudantes, tornando a aprendizagem destes ainda mais significativa).

**Abstract.** To investigate the mental models of linear systems we have interviewed 58 students and 1 lecturer from the Federal Institute of Minas Gerais (IFMG) *Campus* Formiga. Besides to find four theoretical models it was found that the evolution level of mental models was different from that initially thought by the authors (this fact can prejudice the planning of classes and the correct distribution of points during a test). Also it was noted the main difficulties in this context, like graphical visualization of linear systems. So it is provided to teachers some suggestions to change their methodologies using, for example, cognitive conceptions from students about this theme.

**Palavras-chave:** Sistemas lineares, Modelos mentais, Ensino

**Keywords:** Linear systems, Mental models, Teaching.

### Introdução

“O professor explica os conteúdos, os alunos fazem suas anotações com rara participação em aula e estudam para prova, que em alguns casos avaliam apenas a capacidade de memorizar e repetir os conceitos vistos em exercícios de fixação” (VIEIRA JUNIOR e COLVARA, 2006).

A situação didática ilustrada nesta passagem indica uma metodologia de ensino que muito se aplica nas aulas de Matemática. Um exemplo deste fato está no ensino de sistemas lineares, cuja metodologia centra-se na aprendizagem de mecanismos de resolução, não exigindo dos alunos compreender o conteúdo no seu sentido mais amplo como, por exemplo, saber distinguir sistemas lineares de outros tipos de sistemas ou relacioná-los com sua representação gráfica.

Entendendo-se a usabilidade do conceito de modelos mentais numa perspectiva positiva para a relação ensino-aprendizagem, o presente trabalho tem como objetivo investigar os modelos mentais de sistemas lineares existentes entre alunos e professores do Instituto Federal de Minas Gerais (IFMG) *Campus* Formiga, com a proposta final de fornecer, aos docentes deste conteúdo, parâmetros os quais justifiquem a inserção de outras de formas de ensino e, em consequência, para os alunos, a oportunidade de se construir uma aprendizagem significativa.

### **Breve entendimento sobre modelos mentais**

Os modelos mentais constituem, na ciência cognitiva, um meio de caracterizar as formas pelas quais as pessoas compreendem e interagem com dispositivos e sistemas físicos de um modo geral (BORGES, 1997).

Até a primeira metade do século passado acreditava-se que, para melhor entender a conduta humana, era preciso recorrer a fatores externos como estímulos e respostas, uma visão *behaviorista* tratando-se de processos mentais. Mais tarde, com a predominância das teorias cognitivistas e com o avanço das teorias computacionais, a mente passou a ser associada a um sistema lógico que capta e processa informação, sendo capaz de produzir representações diversas classificadas principalmente por duas formas: analógicas (determinadas pelos sentidos: audição, olfato etc.) e proposicionais (linguagem ou código representado por símbolos). Partindo-se do pressuposto criado por Craik (1943), Johnson-Laird (1983) propôs a idéia de que um indivíduo utiliza ambos os meios de representações (em proporções variadas) de modo a construir um terceiro construto denominado Modelos Mentais. Este é o conceito utilizado neste trabalho.

Um modelo mental descreve, então, a concepção criada por um indivíduo sobre determinado assunto, possibilitando entender a organização das informações por ele obtidas e, a partir daí, possíveis falhas conceituais decorrentes da utilização de inferências equivocadas.

Como de uma mesma lista de premissas podem existir inferências dedutivas de várias formas a cada tentativa de interpretação, entende-se que os modelos mentais desenvolvidos por um indivíduo não são rígidos, estando estes em constante processo de reformulação. Deste modo são inúmeras as possibilidades de combinações entre as representações pré-existentes e aquelas constantemente obtidas no dia-a-dia, pois “não existe um único modelo mental para

um determinado estado de coisas, podem existir vários, mesmo que apenas um deles represente de maneira ótima” (FRANÇA, 2002).

Assim se justifica a ideia de que é possível montar/remontar um modelo e vê-lo de ângulos distintos (comparando-os) até que se obtenha uma aproximação satisfatória de sua representação real.

É o que pode ser observado, por exemplo, em situações como as que exigem do indivíduo reconhecer coisas (lugares, nomes, objetos etc.). Ele deve “executar” as representações existentes, comparando-as com as informações dadas previamente de forma a solucionar o sistema (ato de reconhecer), o que, neste caso, por tratarem-se de tarefas simples, ocorre instantaneamente.

Quando o conjunto de representações sobre determinado sistema é limitado, diminui o número de combinações entre elas, o que faz reduzir as chances de acerto (isto em casos mais complexos, em que há um número considerável de informações a serem analisadas). O mesmo ocorre se o problema estiver na estruturação das premissas (no caso de informações inconsistentes), as possibilidades de combinações aumentam consideravelmente, distanciando a pessoa da formulação de um modelo ideal.

Ambas as situações foram observadas por Johnson-Laird (1983 *apud* COSTA, 1999). Segundo o autor, as dificuldades de muitos problemas de raciocínio estão relacionadas com o número de modelos mentais necessários para representar adequadamente as premissas do argumento dedutivo.

Sendo assim, argumentos que utilizam pouca atividade mental podem ser resolvidos ligeiramente, mas, por outro lado, a ocorrência de múltiplos modelos, sejam eles produtos das premissas, ou sejam eles necessários por se trabalhar com sistemas complexos, torna mais difícil a realização de testes, o estabelecimento de conclusões e a resolução dos problemas (VIEIRA JUNIOR e COLVARA, 2006). Para esta compreensão toma-se o exemplo abaixo.

O azul está à esquerda do verde; o vermelho está à esquerda do verde.

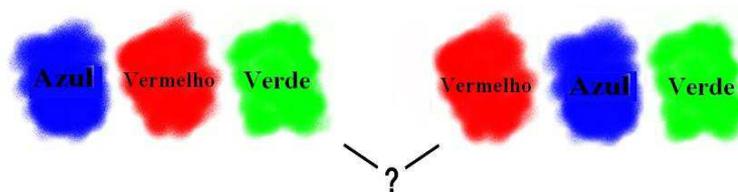


Figura 01: Exemplo de raciocínio prático que utiliza pouca atividade mental, mas apresenta soluções distintas.

No exemplo acima se entende que o vermelho pode estar à direita do azul ou vice-versa, portanto, mesmo tratando-se de um problema simples, poderia levar a dedução a um conflito (não há solução única).

A lógica, se é que aparece em algum lugar, não está na construção de modelos e sim na testagem das conclusões, pois esta implica que o sujeito saiba apreciar a importância lógica de falsear uma conclusão, e não apenas buscar evidência positiva que a apóie (HAMPSON e MORRIS, 1996).

Enfim, todas estas considerações apontam que a relação ensino-aprendizagem se aproxima do ideal na medida em que são adicionados às práticas pedagógicas subsídios, tais como o conhecimento dos modelos mentais, na tentativa de que sejam construídos modelos conceituais<sup>1</sup> capazes de fornecer suporte necessário para atender aos diferentes níveis cognitivos apresentados pelos estudantes.

Embora pareçam subjetivos, os métodos mais eficientes para se investigar modelos mentais são, como demonstrado por Harrison e Treagust (1996), a realização de entrevistas semiestruturadas e a análise de mapas conceituais. Portanto, para se obter os modelos mentais de sistemas lineares, foi aplicado um questionário em formato de diálogo seguido da realização de um mapa conceitual e da análise de material lúdico (gráficos etc.). Estas tarefas, que serão mais bem descritas a seguir, objetivaram conhecer estratégias de raciocínio e os diferentes tipos de modelos entre os entrevistados. Ao final é apresentada uma breve discussão sobre os resultados obtidos na tentativa de auxiliar o planejamento de intervenções no ensino para este conteúdo.

<sup>1</sup> Para Norman (1983, *apud* GENTNER e STEVENS, 1983), modelo conceitual é uma interface precisa, consistente e completa (perante o escopo em que se dedica) do sistema a ser estudado, projetado pelo professor para facilitar o entendimento de sistemas físicos mediante a construção de modelos mentais.

## **Estudo de um indicador de aprendizagem de sistemas lineares no ensino superior**

### **1. Considerações iniciais**

Ao realizar esta pesquisa, o foco foi mantido em avaliar o conhecimento dos alunos entrevistados sobre os sistemas lineares quadrados (sistemas que possuem um conjunto finito de equações lineares, sendo o número de variáveis contidas em cada uma delas correspondente à quantidade de equações dos sistemas). No decorrer do trabalho, os entrevistados serão identificados por letras e números (ex.: AL. 1.) e seus nomes não serão divulgados.

### **2. Metodologia**

Investigar a cognição humana não é tarefa trivial. Alguns estudos partem do pressuposto que as representações mentais podem ser inferidas a partir de comportamentos e verbalizações (ARRUDA, 2003). A pesquisa nesta área se torna difícil por algumas razões especiais:

- Não se pode simplesmente perguntar a uma pessoa qual o seu modelo mental sobre determinado estado de coisas, pois ela pode não ter plena consciência deste modelo ou dizer que acredita em algo e proceder de modo diferente;
- Quando interrogada sobre o porquê de ter realizado uma ação, a pessoa pode configurar um modelo que atende às expectativas de quem faz a pergunta e ela própria passa a acreditar neste modelo, mesmo que tenha sido gerado na hora para responder à questão;
- Em geral os modelos encontrados possuem estruturas confusas, mal feitas, incompletas e difusas (NORMAN, 1983).

Ainda assim Moreira (1997) destaca que, apesar das dificuldades listadas, protocolos verbais descrevendo o que a pessoa faz enquanto resolve um problema, ou imediatamente após tê-lo resolvido, têm sido a técnica mais utilizada para investigar a cognição humana. Corroborando com este fato está um estudo realizado por Greca e Moreira (1996 e 1997) onde diversos métodos de investigação dos modelos mentais foram utilizados (construção de mapas conceituais, experimentos em laboratório, entrevistas estruturadas, atividades em grupo etc.) e

a eles foram atribuídos escores. Construiu-se, então, uma matriz de correlações e uma análise fatorial mostrou que todas estas variáveis correspondiam a um único fator latente (modelo mental), e que as variáveis “conceito” (obtido através de entrevistas) e “mapa conceitual” (desenhado pelos estudantes) foram as que apresentaram maior correlação. Baseado nestas evidências, mesmo que aquilo que se consiga externalizar se trate de representações de segunda ou terceira ordem e que os métodos pareçam subjetivos, elas são ainda as mais consistentes técnicas para esta investigação e, conforme exposto a seguir, elas foram adotadas nesta pesquisa.

Neste trabalho foram utilizados equipamentos gravadores de áudio e vídeo na qual a coleta de dados, ferramenta base de análise, proporcionou ao grupo elaborador mensurar o nível de conhecimento de 58 (cinquenta e oito) alunos do curso de licenciatura em matemática do Instituto Federal de Minas Gerais, *Campus* Formiga, dos quais 5 (cinco) cursavam o 6º período, 17 (dezesete) o 3º período e os demais cursavam o 1º período. Inclui-se também à lista de entrevistados um docente do curso (com a hipótese de que ele apresentaria o nível máximo de formulação de um modelo mental para o escopo do trabalho, servindo, portanto, de referencial para as demais considerações das análises).

Os entrevistados receberam 9 (nove) questões relacionadas a todo o escopo do conteúdo com gradativo aumento do nível de dificuldade. Enquanto respondiam, realizava-se uma entrevista que apresentou caráter de diálogo. As questões eram apresentadas uma a uma admitindo-se a hipótese de que juntas, de certa forma, poderiam influenciar as respostas dos entrevistados, como, por exemplo, no caso das duas primeiras questões (vistas a seguir). Após ver a segunda questão, a primeira poderia ser respondida já que a estrutura de sistema linear acabara de ser exposta no próprio questionário. Conforme o curso da entrevista e as respostas providas pelos estudantes, algumas representações gráficas (construídas computacionalmente ou em maquetes de isopor) eram apresentadas aos entrevistados para fomentar a discussão. Destaca-se que o objetivo não era simplesmente verificar se o estudante saberia resolver os itens, mas sim entender e discutir o raciocínio, estratégias e conclusões por ele adotadas para este fim. Contava-se, portanto, com as seguintes questões:

1. O que vem à sua cabeça quando você pensa em sistemas lineares?
2. Resolva os sistemas abaixo. Em seguida, descreva o método utilizado para a resolução.

a) 
$$\begin{cases} 3x + 9y = 15 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

b) 
$$\begin{cases} 5k + 6t = 62 \\ 2k - 11t = 85 \end{cases}$$

c) 
$$\begin{cases} z^2 + 2w^2 = 81 \\ 7z^2 + w^2 = 99 \end{cases}$$

3. É possível representar o enunciado abaixo em forma de sistema linear? Em caso afirmativo, mostre qual formato.

“Em uma festa havia homens e mulheres totalizando 117 convidados presentes. Foram servidas no total 300 (trezentas) doses de bebidas. Sabendo-se que cada homem bebeu 3 (três) doses e cada mulher bebeu 2 (duas), qual é o número de homens e mulheres presentes nesta festa?”

4. Qual dos gráficos a seguir melhor representa a solução da situação descrita anteriormente?

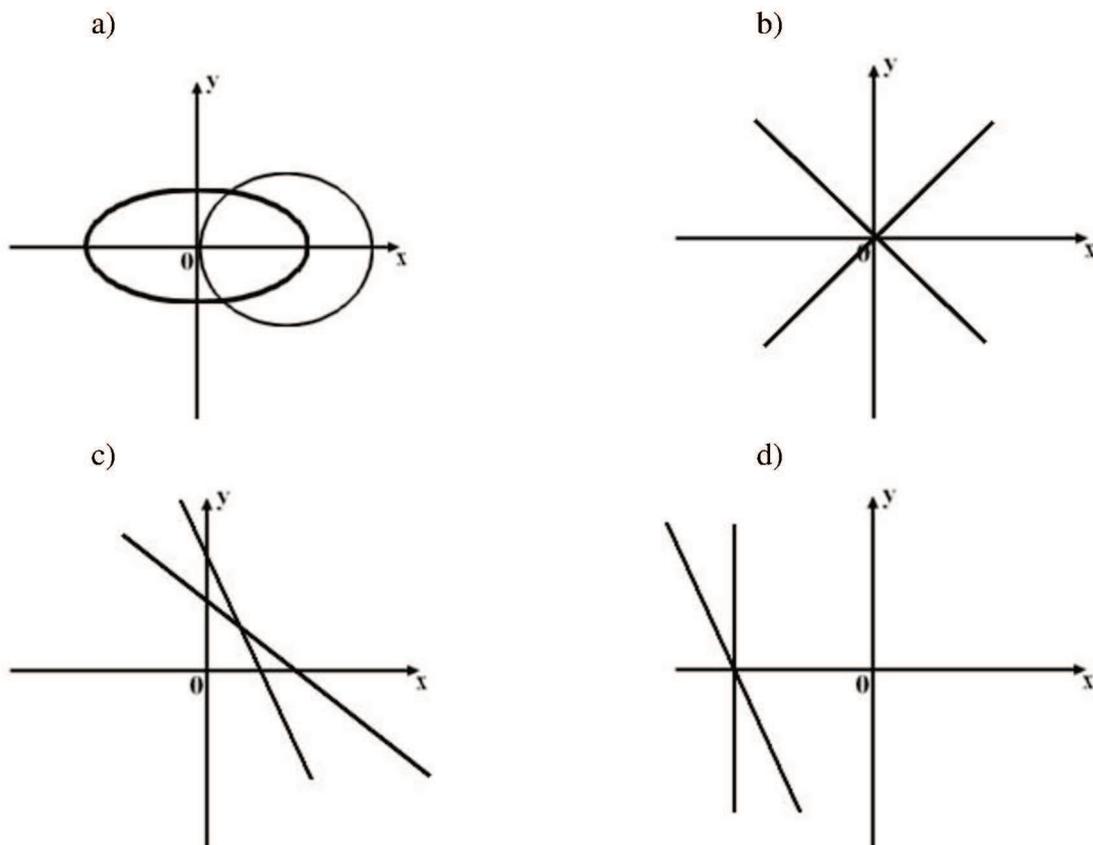


Figura 1 – Gráficos referentes à questão 04.

5. Resolva os seguintes sistemas lineares e, em seguida, explique o método o qual utilizou para a resolução.

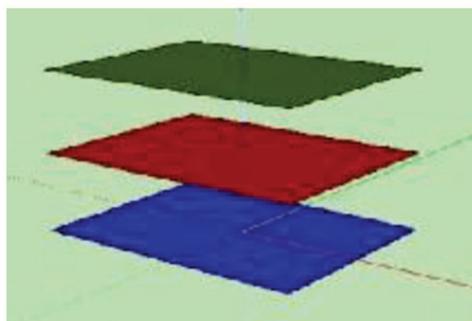
$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 16 \\ x - 2y + z = 1 \\ 3x - y - z = -8 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3t + 2w - z = 12 \\ t + w + z = 17 \\ t - 2w + 7z = 18 \end{cases}$$

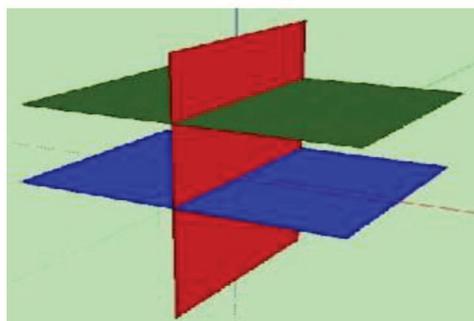
6. Uma conta de R\$ 705,00 (setecentos e cinco reais) foi paga utilizando cédulas de R\$ 5,00 (cinco reais), R\$ 10,00 (dez reais) e R\$ 20,00 (vinte reais), totalizando 55 (cinquenta e cinco) cédulas. Após 30 dias o valor da mesma conta passou a ser de R\$ 1145,00 (mil cento e quarenta e cinco reais) e o número de cédulas de R\$ 5,00 (cinco reais) triplicou, o de cédulas de R\$ 10,00 (dez reais) dobrou e o número de cédulas de R\$ 20,00 (vinte reais) passou para  $\frac{5}{4}$  (cinco quartos) da quantidade anterior. Quantas cédulas foram utilizadas para pagar toda a conta?

7. Qual dos gráficos abaixo melhor representa o enunciado descrito anteriormente?

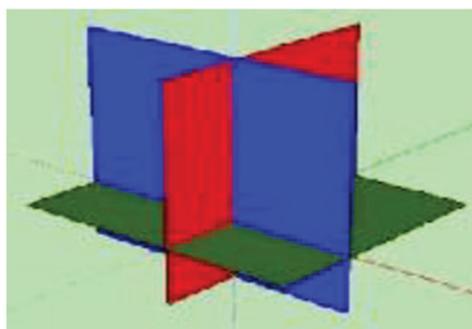
a)



b)



c)



d)

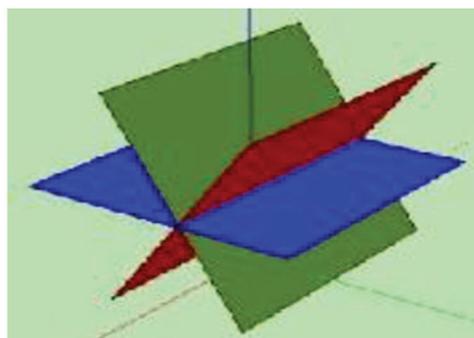


Figura 2 – Gráficos referentes à questão 07.

8. Observe o gráfico abaixo:

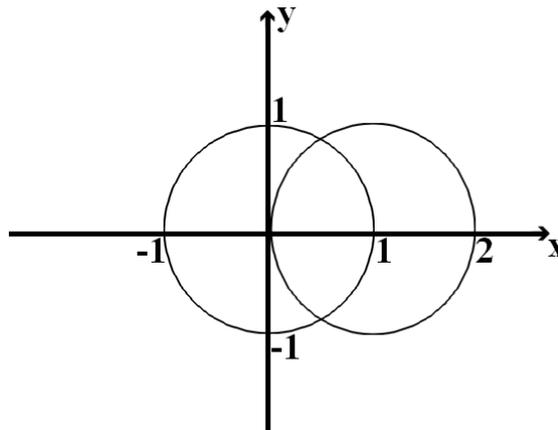


Figura 3 – Gráfico referente à questão 08.

Este gráfico representa um sistema linear? É possível representá-lo de outra maneira senão por gráfico no plano cartesiano? Caso afirmativo, mostre qual formato.

9. Construa um mapa conceitual que ligue conceitos adquiridos sobre o conteúdo de sistemas lineares (nesta oportunidade era explicado ao entrevistado o que era e o que se esperava de um mapa conceitual):

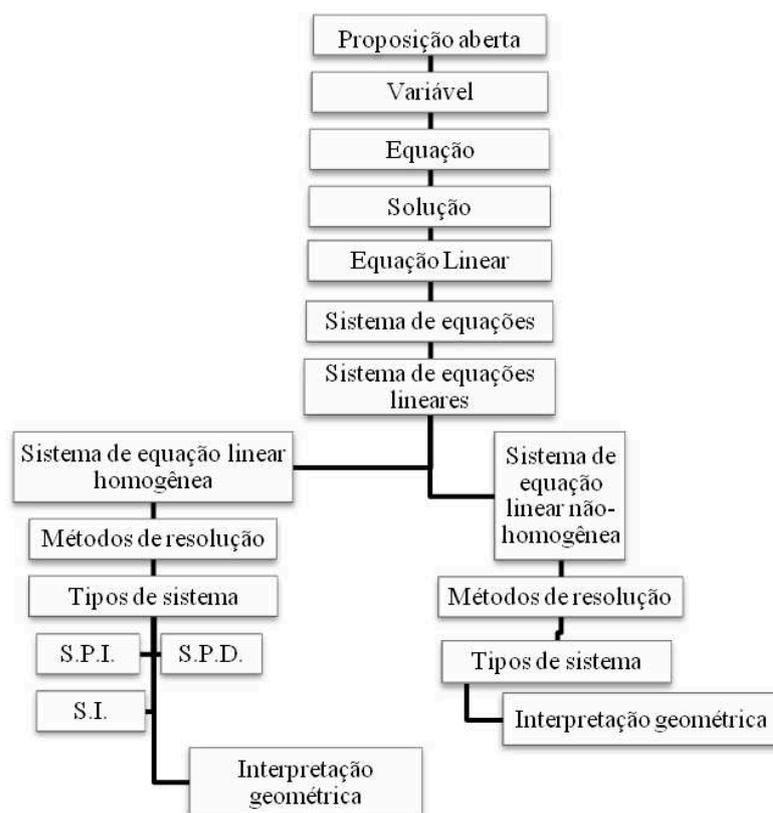


Figura 4 - Mapa conceitual elaborado pelo docente entrevistado.

As informações provenientes da entrevista realizada durante a resolução dos problemas (depois de gravadas e transcritas) eram cruzadas com o mapa conceitual construído pelo aluno (cuja organização baseia-se na visão do estudante acerca do conteúdo) para que novas informações e conclusões definitivas a respeito dos seus modelos mentais pudessem ser observadas.

## 2.1 Análise do questionário aplicado

Esta etapa foi elaborada baseando-se na concepção de Rouse e Morris (1986)<sup>2</sup>, que indica a possibilidade de caracterizar e classificar modelos em categorias (níveis de conhecimento), e estas, por sua vez, descrevem e explicam o sistema e seu comportamento. Tais concepções devem responder as seguintes questões:

- Como é o sistema? (Descrever o sistema);
- De que o sistema é feito? (Descrever a estrutura do sistema);

<sup>2</sup> Citado por A. T. Borges em *Um estudo de modelos mentais*, 1997.

- Como ele funciona? (Explicar como funciona);
- O que ele está fazendo? (Prever ou explicar o estado do sistema);
- Para que ele serve? (Descrever o propósito do sistema).

Uma vez aplicadas, tais categorias serviram de indicadores de modelos mentais e, na tentativa de se entender a organização lógica destes construtos, foi previamente criada uma hipótese quanto aos níveis de conhecimento relacionados a sistemas lineares – esta definição baseou-se na evolução dos modelos mentais proposta por Borges (1999). Observa-se que podem existir distintos modelos mentais que se equivalem a um mesmo nível de evolução, como exemplo: os alunos que utilizem diferentes analogias ou critérios de inferência para resolver problemas de um mesmo nível de complexidade. Em relação aos níveis propriamente, supôs-se:

- Nível 1: saber resolver sistema linear de ordem  $2 \times 2$  (dois por dois) sendo capaz de identificar pelo menos um método de resolução (presente na questão 2 e implicitamente na questão 3);
- Nível 2: saber montar um sistema a partir de um enunciado (presente nas questões 3, 6 e 8);
- Nível 3: saber resolver sistema linear de ordem  $3 \times 3$  (presente na questão 5 e implicitamente na 6);
- Nível 4: visualizar a solução do sistema em um espaço geométrico (presente nas questões 4 e 7 e implicitamente em 8) e demonstrar domínio em relação à definição formal de sistemas lineares (presente em todas as questões, ainda que implicitamente)<sup>3</sup>.

São mencionadas a seguir situações (hipóteses) levantadas durante a elaboração das questões que poderiam influenciar ou não no modelo apresentado pelos entrevistados:

- Uso de letras diferentes de “x” e “y” para indicar as variáveis do sistema (questão 2);
- Uso de questões ditas livres (números 1 e 9) onde o entrevistado poderia criar conexões espontâneas sobre o tema (aqui se esperava obter informações mais

---

<sup>3</sup> Nas questões deste nível utilizou-se material didático (gráfico feito de isopor e programas de computador para visualização em 3D) visando mediar a compreensão de entrevistados a cerca do que estas questões lhes propunham.

detalhadas dos modelos mentais de sistemas lineares existentes em cada entrevistado);

- Uso de questões interpretativas (números 3 e 6) cujo conteúdo a ser analisado remete a situações reais.

Nos próximos itens serão discutidas as validades de tais considerações bem como os resultados obtidos.

### 3. Resultados

A entrevistada AL. 1, do primeiro período, chamou atenção dos autores quanto às respostas devido ao fato de não haver cursado esta matéria no ensino médio, revelando: “não sei absolutamente nada sobre isto, eu nunca vi nada do tipo”. Esta aluna cursou magistério e, anos mais tarde, acaba de ingressar no curso superior.

Desta forma pôde-se constatar a existência de dois grupos: os “modeladores” e os “não modeladores”. O primeiro representa 46% do número total de entrevistados e se caracteriza por conter aqueles indivíduos que apresentam algum (ou mais) dos modelos encontrados nesta pesquisa (estes serão discutidos separadamente na próxima seção). Já o segundo, que representa os 54% restantes dos entrevistados, é composto por aqueles indivíduos que possuem em si algum algoritmo de resolução decorado (ditos “mecânicos”) ou que, na pior hipótese, desconhecem o conteúdo abordado, caso identificado na aluna AL. 1.

Em ambos os casos, entre mecânicos e os que desconhecem, não se constata presença de modelo mental, apenas a reprodução de um método mecanicista que, na maioria das vezes, não era concluído com sucesso ou, ainda, a aquisição de informações isoladas sobre o conteúdo, que não chegam a produzir uma “estrutura compacta” como propõe a teoria dos modelos mentais perante Carrol e Olson (1988)<sup>4</sup>. Havia também (neste mesmo grupo) indivíduos capazes de realizar operações numéricas complexas (níveis 3 e 4), porém pecavam em outras mais simples que dependiam de um domínio maior da definição conceitual de sistemas lineares.

A seguir, os gráficos que ilustram as situações descritas com suas respectivas análises.

---

<sup>4</sup> Estes modelos, em resumo, tratam de "uma estrutura rica e elaborada que reflete a compreensão do usuário do que o sistema contém, de como ele funciona e de por que ele funciona daquela forma. Ele pode ser imaginado como conhecimento suficiente sobre um sistema que permite ao usuário experimentar ações mentalmente antes de executá-las." (Como citado por A. T. Borges em *Um estudo de modelos mentais*, 1997)

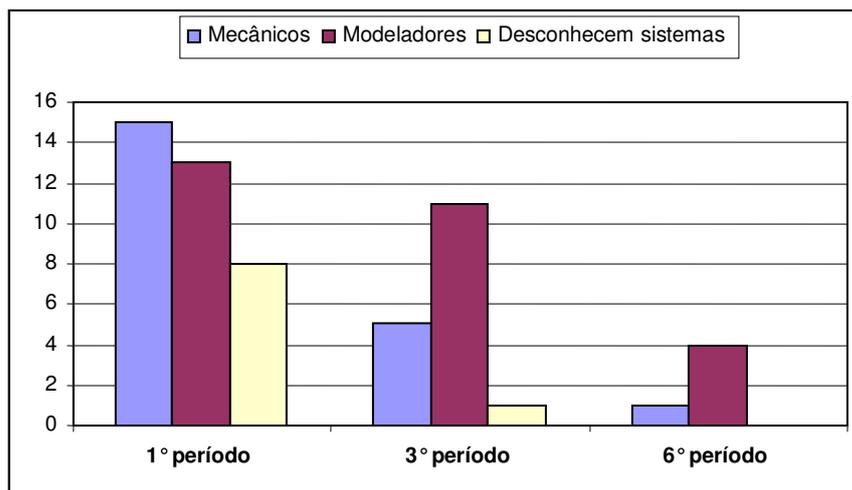


Gráfico 01: Quantidade de alunos modeladores e não-modeladores por período de graduação.

Mediante caracterização dos modelos, nota-se que os índices de modeladores estão longe do ideal tratando-se de estudantes de um curso de **licenciatura** em matemática.

Foi feita uma simulação entre o rendimento de “mecânicos”<sup>5</sup> e modeladores considerando-se os parâmetros de avaliação propostos nos níveis pré-estabelecidos, a fim de se conhecer melhor cada grupo.

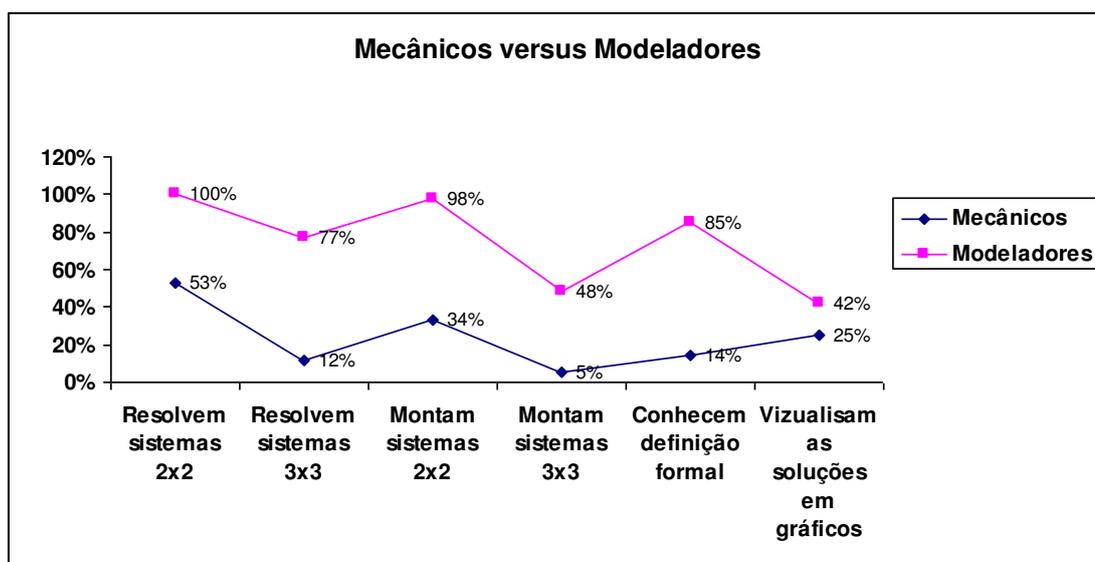


Gráfico 2: Uma síntese do aproveitamento de cada grupo obtido com o questionário.

<sup>5</sup> Nesta pesquisa pôde-se observar respostas corretas puramente mecanicistas (desacompanhadas de explicação conceitual quando requerido pelo entrevistador) para todos os níveis observados - considerando que, quando o estudante não respondia a questão, a ele eram dadas alternativas.

Como se percebe, resolver sistemas  $2 \times 2$  (dois por dois) é a tarefa mais executada por ambos os grupos e por isso continuou sendo a habilidade atribuída ao nível 1 (conforme hipótese prévia). Lembrando que apenas aqueles que conheciam **conceitualmente** o método aplicado para resolução eram, neste caso, classificados com nível 1.

Montar sistemas  $2 \times 2$ , tarefa esta exigida para resolução de problemas simples de interpretação (questão 3), também atingiu um alto percentual de mecânicos e modeladores, sendo esta considerada inicialmente de nível 2. Porém dentre os modeladores foi perceptível a relação “resolve/monta” (resolve  $2 \times 2$ ; logo, monta  $2 \times 2$ ). Concluiu-se, assim, que modeladores de nível 1 resolvem e montam sistemas de ordem  $2 \times 2$ .

Esse bom rendimento com sistemas simples resulta do estudo deste conteúdo feito (em geral) no 8º ano do ensino fundamental, quando, nesta fase, os alunos aprendem-no como sistemas de equações de primeiro grau obtendo suas noções básicas. É neste período que eles também têm o primeiro contato com o plano cartesiano e que aprendem a localizar pontos, construir gráficos de funções de primeiro grau (estudo de retas) e, por fim, estender suas representações aos sistemas simples (aqueles que possuem duas variáveis). Isso pode justificar os razoáveis índices de visualização no plano cartesiano ( $\mathbb{R}^2$ ) em ambos os grupos, tarefa esta de nível 2, mediante análise dos dados obtidos.

O mesmo não ocorre com as visualizações no espaço ( $\mathbb{R}^3$ ), uma vez que esta etapa da disciplina de geometria analítica não é trabalhada no ensino médio regular. Assim os alunos a estudam apenas no ensino superior, e no caso dos alunos entrevistados, apenas os integrantes dos 3º (terceiro) e 6º (sexto) períodos a tiveram até a realização da pesquisa. Esses números denotam que a mesma deve permanecer como sendo de nível científico (perante o escopo deste trabalho) devido à sólida “bagagem matemática” envolvida, como, por exemplo, geometria espacial para entender as devidas representações no espaço, outra disciplina pouco difundida e compreendida por estudantes do ensino médio regular.

Há de se destacar que foram poucos os entrevistados que utilizaram métodos mais sofisticados de resolução como a regra de Cramer, que contém uma abordagem matricial. Os

métodos mais utilizados foram o da adição<sup>6</sup> e substituição para sistemas  $2 \times 2$ ; e escalonamento de equações para os sistemas  $3 \times 3$ .

Houve entrevistados que apresentaram facilidade na resolução de sistemas lineares, porém quanto à visualização gráfica demonstraram pouco ou nenhum conhecimento sobre tal assunto, permanecendo, portanto, no nível 1.

É importante que o professor esteja sempre relacionando novos conteúdos com outros que os alunos já estudaram em sala de aula e, principalmente, “conteúdos matemáticos da educação básica devem ter conexões com o meio social dos alunos, para utilizá-los na sua vida cotidiana” (PANCIERA e FERREIRA, 2006). Talvez assim se torne mais fácil o aprendizado e maior o interesse de não perder determinada explicação, já que esta estaria ligada não só ao conteúdo atual, mas também a outros que viriam depois (de certa forma a falta de motivação associada a este fato pode estar também relacionada à evasão escolar)<sup>7</sup>. Um caso simples de conteúdo que apresenta semelhanças notáveis a sistemas lineares é a matriz, “todos os sistemas possuem uma representação matricial, isto é, constituem matrizes envolvendo os coeficientes numéricos e a parte literal” (MIRANDA, 2011).

Segue abaixo a distribuição real dos níveis progressivos de entendimento para este conteúdo, que se diferem da hipótese inicialmente levantada. Esta sequência, portanto, representa a progressão da dificuldade na perspectiva dos alunos avaliados (o conhecimento deste fato, por parte dos professores, permite identificar a sequência ideal de apresentação do conteúdo assim como distribuir pesos corretos na elaboração de provas).

- Nível 1: saber resolver sistema linear de ordem  $2 \times 2$  sendo capaz de identificar pelo menos um método de resolução e montar sistemas de mesma ordem a partir um enunciado;
- Nível 2: visualizar a solução de sistemas  $2 \times 2$  no plano cartesiano;

---

<sup>6</sup> O método da adição é uma forma de escalonamento, porém nos livros didáticos e nas escolas este é assim denominado a partir do estudo de sistemas  $3 \times 3$ .

<sup>7</sup> Segundo dados do INEP (Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Anísio Teixeira), “de 100 alunos que ingressam na escola na 1ª série, apenas 5 concluem o ensino fundamental, ou seja, apenas 5 terminam a 8ª série” (PACIEVITCH, 2009). É possível que um dos fatores causadores da evasão escolar esteja ligado ao fato do aluno não notar semelhanças entre conteúdos distintos em uma mesma disciplina, fazendo com que este se sinta ‘incapaz’ de conhecer a Matemática a ponto de abandonar a escola.

- Nível 3: saber resolver sistema linear de ordem  $3 \times 3$  também identificando um método de resolução, além de demonstrar domínio em relação à definição formal de sistemas lineares;
- Nível 4: montar sistemas de ordem 3 ou superior a partir de um enunciado e visualizar a solução de sistemas  $3 \times 3$  em um espaço tridimensional.

Como se previa, o docente entrevistado demonstrou conhecer o mais completo conceito de sistemas lineares e excelente domínio das técnicas de resolução e visualização.

Quanto às hipóteses levantadas durante a elaboração do questionário, percebeu-se que:

- Entre “mecânicos” e modeladores o uso de letras diferentes de “x” e “y” não influenciou na resolução dos sistemas dados, o que evidencia presença de base conceitual, ainda que mínima. Isto pode ser justificado considerando-se o fato de que a maioria dos entrevistados que resolveram a questão da festa (questão três) utilizaram a letra “h” para indicar o número de homens e “m” para indicar o número de mulheres;
- Realmente as questões livres (principalmente o mapa conceitual) “nortearam” os autores quanto à análise dos modelos mentais de sistemas lineares existentes ou não em cada entrevistado, uma vez que era imediata a verificação de coerência entre os resultados obtidos nestas com aqueles das demais questões do questionário;
- As questões interpretativas (números 3 e 6) mostraram, mediante análise, que um enunciado deste tipo (que envolve temas reais) pode influenciar na resolução apenas se ele for compreendido em suma pelo aluno, ou seja, se o aluno já tiver em si um modelo próprio sobre o tema abordado e ao mesmo tempo dominar em igual peso as ferramentas que serão utilizadas no processo de modelagem matemática (conhecer o conteúdo), caso contrário o enunciado será para ele apenas mais um aglomerado de proposições sem nexos.

No geral modeladores são mais específicos em suas conclusões que os mecânicos, ainda que estes últimos consigam realizar totalmente um processo de resolução. Não se pode esquecer que o conteúdo sistemas lineares se trata de uma ferramenta para a própria matemática e demais áreas do conhecimento. Ferramentas por si próprias sugerem aplicação

para que tenham validade, nem sempre exigindo do operador (conforme o método de ensino utilizado) entendimento para manuseá-la.

Mas entendê-la implica em evitar erros e prever alternativas seguras. Assim se inicia a discussão deste trabalho na qual são mencionados os modelos mentais de sistemas lineares encontrados.

#### 4. Discussão

Iniciou-se a pesquisa com uma hipótese de organização lógica dos níveis e, com base na análise dos dados obtidos (confrontamento de informações), percebeu-se a alteração destes (descrita na seção anterior).

Desta forma, pôde-se verificar os principais modelos mentais utilizados pelos alunos (pelos 46% que apresentaram algum tipo de modelo) para solucionar os problemas dentro de cada nível de complexidade:

- **Modelo mental 1 (correspondente ao nível 1) – Algébrico simples:** 21 % dos entrevistados sabem resolver sistema linear de ordem  $2 \times 2$  sendo capazes de identificar pelo menos um método de resolução, conseguem montar sistemas simples a partir de um enunciado e têm uma definição limitada de sistemas lineares (reconhecem-nos como conjunto de duas equações apenas);
- **Modelo mental 2 (correspondente ao nível 2) – Analítico simples:** diferentemente dos integrantes do modelo anterior, os 9 % dos entrevistados pertencentes a este grupo visualizam a solução destes sistemas no plano cartesiano;
- **Modelo mental 3 (correspondente ao nível 3) – Algébrico apurado:** Os 8 % conseguem resolver sistemas de ordem  $3 \times 3$  também estabelecendo um método justificável de resolução e dominam por completo a definição formal deste conteúdo, estendendo-a aos  $R^n$  (equações lineares com múltiplas variáveis), já conseguindo estabelecer, por exemplo, relação entre a solução encontrada e o sistema analisado;
- **Modelo mental 4 (correspondente ao nível 4) – Modelo Científico:** este grupo restrito que equivale a 8 % dos entrevistados é capaz de visualizar gráficos de sistemas lineares no espaço ( $R^3$ ), apresentando uma abordagem geral e precisa dos

outros três modelos, além de montar, a partir de um enunciado, sistemas mais complexos (de ordem 3 ou superior).

Esta distribuição se deu com base na teoria de evolução dos modelos mentais proposta por Borges (1997) em que:

“Os modelos mentais não envolvem regras explícitas de manipulação. Johnson-Laird (1983, *apud* BORGES, 1997) argumenta que nosso raciocínio se processa através da construção de modelos de eventos e estados de coisas no mundo e, então, procuramos exemplos que se ajustem a um dado modelo ou contra-exemplos que os falsifiquem”.

Sendo assim, modeladores do nível 2 também possuía o modelo 1, modeladores do nível 3 também possuíam os modelos 1 e 2 e assim por diante. Isto é, a classificação por níveis pressupõe a evolução progressiva do conhecimento.

Vale ressaltar que os entrevistados foram distribuídos nestes quatro grupos de acordo com o modelo que mais se identifica (dominante) com os resultados apresentados por eles no questionário<sup>8</sup>. Aqueles que não apresentaram material suficiente para análise foram classificados como não-modeladores e formaram um grupo a parte.

### Modelos de conhecimento

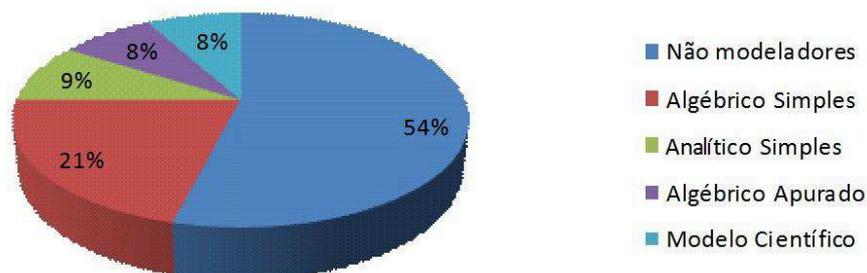


Gráfico 03: Divisão e subdivisão dos entrevistados nos modelos encontrados

Numa abordagem ainda mais restrita, utilizando a definição de modelo mental descrita no início desta seção, pode-se dizer que estes quatro modelos se reduzem a dois maiores<sup>9</sup>: um

<sup>8</sup> Os modelos propostos apenas evidenciam o que é “dominante” no modelo de sistema linear criado por cada entrevistado, não eliminando a possibilidade de haver outros modelos complementares.

<sup>9</sup> Geralmente encontra-se na literatura científica modelos cuja ordem classifica-se por "unicamente analógico" ou "proposicional e analógico", entretanto, por se tratar de um modelo relacionado à matemática dita "pura" (o que

majoritariamente proposicional em que os indivíduos pertencentes a ele apenas operam sistemas (modelo algébrico) e outro caracterizado por ser uma mescla de representações analógicas justificadas por proposicionais e vice-versa (modelo analítico).

Baseando-se neste fato e no gráfico acima, tem-se que é perceptível a superioridade do modelo algébrico em relação ao analítico, haja vista que este último é composto por modeladores de nível 2 e 4, e o primeiro pelos de nível 1 e 3.

No que diz respeito à dispersão dos modelos encontrados entre modeladores, no primeiro período notou-se que há uma deficiência na base conceitual e até mesmo na interpretação e resolução de exercícios e de problemas a respeito de sistemas lineares.

Houve um pequeno aumento no nível conceitual entre os entrevistados do terceiro período comparado ao primeiro período, provavelmente pelo fato de já terem tido disciplinas nas quais era comum a utilização de sistemas lineares na resolução de diversos problemas. De todo modo isto não foi uma regra, pois os alunos do sexto período não apresentaram mudanças significativas quanto aos níveis de conceitualização, considerando já terem visto outras disciplinas que utiliza este conteúdo como “ferramenta matemática” (por exemplo, em Álgebra Linear e Geometria). Embora 60 % (sessenta por cento) deles atingiram modelos 3 e 4, houve um entrevistado do sexto período na situação de não modelador, como visto na seção anterior.

Curiosamente, neste estudo, apenas um aluno conseguiu concluir todas as etapas e níveis de questões com êxito, e ele estava matriculado no primeiro período.

## Conclusão

Os entrevistados desenvolveram bem problemas mais simples, como o caso da questão 3 (três) do questionário citado. Entretanto, muitos demonstraram, inclusive oralmente, sua dificuldade em extrair sistemas de problemas mais ‘complexos’, como a questão 6 (seis). 54% (cinquenta e quatro por cento) dos alunos entrevistados possuem em si algum algoritmo de resolução decorado (ditos “mecânicos”), é provável que estes indivíduos apenas trouxeram estes métodos decorados do ensino médio até a graduação sem sequer terem entendido conceitos básicos na elaboração das respostas em exercícios e avaliações do ensino médio,

---

sugere experimentos menos representativos), toma-se o modelo "algébrico" como "majoritariamente proposicional", preservando a hipótese de relação entre este e outro modelo existente (exceto o "mecanicista"). Há uma linha muito tênue que diferencia a resolução mecanicista e a proposicional, neste caso onde se observa, principalmente, a existência de lógica procedimental conceitualizada.

preocupados apenas com o resultado final das questões e com a chance de se saírem bem no final do ano letivo.

Além disto, a visualização e construção de gráficos, como já mencionado, caracterizaram-se como sendo atividades pouco difundidas entre grande parte dos entrevistados, visto que muitos deles não conseguiram associar um sistema linear às retas no gráfico cartesiano, nem mesmo à solução do sistema como a intersecção das retas no plano. Este conceito de visualização gráfica (bem como manipulação de variáveis) deveria, então, receber maior ênfase no momento de planejamento de aula, já que os alunos deveriam concluir o ensino médio com maior entendimento do conteúdo sistemas lineares.

A quantidade de acerto varia entre os alunos: alguns conseguem visualizar, mas não resolver; outros resolvem, mas não visualizam. De toda forma conclui-se que para se obter o entendimento conceitual é necessária revisão dos modelos de ensino (modelos conceituais)<sup>10</sup> utilizados por professores e este estudo apresentou a sequência de níveis e as estratégias de raciocínio, via modelos mentais, comumente utilizadas para o tema sistemas lineares que podem subsidiar tais elementos.

Como se confirmou que a distribuição de níveis era diferente daquela previamente concebida pelos autores desta pesquisa, notou-se que o professor pode possuir falsas concepções sobre o conhecimento do aluno (ou sobre o que de fato é mais difícil para o aluno). Isto também tem implicações no momento de planejar uma aula ou mesmo ao atribuir pesos diferentes em uma prova (a questão "mais difícil" na opinião do professor nem sempre é a mesma na opinião do aluno).

### **Agradecimentos**

Agradecemos aos colaboradores Bruno Henrique Miranda dos Santos e Osmar Pinto Fraga Júnior pelo auxílio nas entrevistas e pela ajuda quanto à elaboração das análises iniciais dos dados.

---

<sup>10</sup> Um modelo conceitual funciona para alunos e professores como um modelo “referência”, sendo este o objeto de conquista do aluno guiado pelo auxílio do professor. Ele representa, em resumo, o modelo ideal daquilo que se ensina em sala e deve ter uma abordagem consistente, completa e precisa (NORMAN, 1983 *apud* VIEIRA JUNIOR, 2009).

### Referências Bibliográficas

ARRUDA, Dayse Mourão. Ministério da ciência e tecnologia. Instituto nacional de tecnologia (INT). **Modelos mentais**: nota técnica. Rio de Janeiro, 2003. 26 p.

BORGES, A. T. Um estudo de modelos mentais. *Investigações em Ensino de Ciências*. v. 2, n.3, n. 207, p. 207-226, set. 1997.

BORGES, A. T. Como evoluem os modelos mentais. *Investigações em Ensino de Ciências*. Disponível em: <[www.diaadiaeducacao.pr.gov.br](http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br)>. Publicado em: 1999. Acessado em: 08 ago. 2011.

COSTA, R. **Representações Mentais**. Universidade Federal de Santa Catarina, 1999. Disponível em: <<http://www.inf.ufsc.br/infoedu/alunos/alunos99/trabfinal/RepresentacoesMentais.htm>>. Acessado em: 25 jul. 2011.

FRANÇA, C; CARDOSO, R. **Modelos Mentais**. Rio de Janeiro: NCE/UFRJ, 2002.

GRECA, I. M.; MOREIRA, M. A. The kinds of mental representations - models, propositions, and images - used by college physics students regarding the concept of field. **International Journal of Science Education**, v.19, n.6: pp. 711-724, 1997.

GRECA, I. M.; MOREIRA, M. A. Un estudio piloto sobre representaciones mentales, imágenes, proposiciones y modelos mentales respecto al concepto de campo electromagnético em alumnos de Física General, estudiantes de postgrado y físicos profesionales. **Investigações em Ensino de Ciências**, v.1, n.1: pp. 95-108, 1996.

HAMPSON, P. J.; MORRIS, P. E. **Understanding cognition**. Cambridge, MA: Blackwell Publishers, 1996.

HARRISON, A.G.; TREAGUST, D.F. Secondary students' mental models of atoms and molecules: implications for teaching chemistry. **Science Education**, 80(5), pp. 509-534, 1996. In: MOREIRA, Marco Antonio. Modelos Mentais. In: ENCONTRO SOBRE TEORIA E PESQUISA EM ENSINO DE CIÊNCIA, 1, 1997, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: Faculdade de Educação da UFMG, 1997.

PACIEVITCH, T. **Evasão Escolar**, disponível em: <<http://www.infoescola.com/educacao/evasao-escolar/>>, acesso em: 06 de agosto de 2011.

JOHNSON-LAIRD, P. *Mental models*. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1983.

MIRANDA, D. de. **Relação entre Matriz e Sistemas Lineares**. Disponível em: <<http://www.brasilecola.com/matematica/relacao-entre-matriz-sistemas-lineares.htm>>, acesso em: 05 de agosto de 2011.

MOREIRA, Marco Antonio. Modelos Mentais. In: ENCONTRO SOBRE TEORIA E PESQUISA EM ENSINO DE CIÊNCIA, 1, 1997, Belo Horizonte. **Anais...** Belo Horizonte: Faculdade de Educação da UFMG, 1997.

NORMAN, D. A. Some observations on mental models. In: GENTNER, D.; STEVENS, A. L. (Ed.). **Mental models**. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates. p. 6-14, 1983.

PANCIERA, L. M.; FERREIRA, M. V. A Modelagem Matemática no Ensino de Matrizes e Sistemas Lineares. Disponível em:

<<http://www.unifra.br/eventos/jornadaeducacao2006/2006/pdf/artigos/matem%C3%A1tica/A%20MODELAGEM%20MATEM%C3%81TICA%20NO%20ENSINO%20DE%20MATRIZES.pdf>>, acesso em: 05 de agosto de 2011.

VIEIRA JUNIOR, N.; COLVARA, L. D. A importância do professor conforme estilos de aprendizagem e modelos mentais. In: CONGRESSO BRASILEIRO DE ENSINO DE ENGENHARIA, 34, 2006, Passo Fundo, **Anais...** Passo Fundo, 2006, ABENGE.

VIEIRA JUNIOR, N. **Os Modelos Mentais e o ensino de ciências**: histórico, investigação e validade. Apostila de Psicologia da Educação Matemática. Formiga: IFMG, 2009.

**GUSTAVO VENANCIO PIMENTA, GRAZIELA BELMIRA DIAS DA SILVA, APARECIDA DOS REIS EUFRÁSIO e ADELIENE APARECIDA PORTO** são licenciandos em Matemática

**NILTOM VIEIRA JUNIOR** é docente do *Curso de Licenciatura em Matemática - Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais (IFMG - Campus Formiga)*