Combinatória: a construção de árvores de possibilidades por alunos dos anos iniciais com e sem uso de software*

JULIANA AZEVEDO[1] e RUTE ELIZABETE DE S. ROSA BORBA[2]

Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco [1]azevedo.juliana1987@gmail.com
[2]Borba@talk21.com

Resumo. O presente artigo é de um recorte de uma dissertação de mestrado que visa analisar a influência da construção de árvores de possibilidades, com e sem o uso de um *software* educativo, voltado para o ensino e aprendizagem da Combinatória com alunos do Ensino Fundamental. As crianças, de 5º ano, foram separadas em quatro grupos de 10 alunos, formando, assim, dois grupos experimentais e dois grupos controle. Foi realizado um pré-teste, seguido de distintas formas de intervenção e, finalmente, um pós-teste, que avaliou os avanços obtidos através das intervenções realizadas. Observou-se que alunos que constroem árvores de possibilidades, com e sem uso do software *Diagramas de Árbol*, avançam em seus raciocínios combinatórios, revelando que o trabalho com árvores de possibilidades pode resultar em boa estratégia de ensino para alunos dos anos iniciais.

Abstract. The present paper is part of a master dissertation which aims to analyze the influence of building trees of possibilities, with and without the use of educational software, for teaching and learning Combinatorics with students in Elementary School. The 5th grade children were divided into four groups of 10 students, thus forming two experimental groups and two control groups. A pretest was performed, followed by different forms of intervention, and finally a post-test, which assessed the progress achieved through the interventions. It was observed that students who build trees of possibilities, with and without use of the software *Diagramas de Árbol*, advance in their combinatorial reasoning, revealing that working with trees of possibilities can result in a good teaching strategy for early years students.

Palavras-chave: Combinatória, Árvores de possibilidades, Anos iniciais do Ensino Fundamental.
Keywords: Combinatorics, Trees of possibilities, Early years of Elementary School.

1. INTRODUÇÃO

No ensino atual da Matemática defende-se esta disciplina como sendo muito rica na possibilidade de desenvolvimento do raciocínio lógico-dedutivo dos alunos. Além disso, como apontado nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997, p. 24), a Matemática pode despertar no aluno a curiosidade em suas aprendizagens, e pode instigar a capacidade de generalização.

Em particular, o estudo da Combinatória desde os anos iniciais de escolarização pode ser útil para que seja despertada no aluno a curiosidade essencial à aprendizagem. Por meio do aprendizado da Combinatória, é possível que o aluno seja capaz de generalizar situações, e

* Projeto parcialmente financiado pelo CNPq (476665/2009-4) e pela FACEPE – Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco (APQ 1095-7.08/08) .

seu aprendizado pode influenciar direta e indiretamente no aprendizado de diversos outros conceitos matemáticos e de outras áreas do conhecimento. Isso porque na Combinatória há uma rica variedade de situações que podem levar o aluno a pensar em formas diversas de resolução de problemas (BORBA, 2010).

Contudo, apesar dos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (BRASIL, 1997) indicarem o aprendizado da Combinatória desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, este conteúdo só ganha maior espaço na sala de aula no Ensino Médio. Neste âmbito vêm sendo desenvolvidas pesquisas que orientam o professor à importância do aprendizado da Combinatória o quanto antes, pois, questões vistas desde os anos iniciais de escolarização, são mais facilmente compreendidas posteriormente quando retratadas através das fórmulas, uma vez que, segundo Vergnaud (1986), certos conceitos desenvolvem-se durante um período de tempo maior que outros, iniciando-se no momento inicial de escolarização e indo até a ocasião do Ensino Médio, aproximadamente.

A construção de conhecimentos matemáticos, em particular o desenvolvimento do raciocínio combinatório, pode acontecer com o auxílio de diferentes recursos, como a resolução de problemas, o uso das tecnologias da informação e dos jogos, dentre outros. A utilização de recursos e estratégias de ensino variadas visa facilitar os processos de ensino e aprendizagem da Matemática, e seus diversos conceitos. No presente estudo foi abordada a estratégia de resolução de problemas, por uso de lápis e papel ou por utilização do computador como recursos facilitadores da aprendizagem.

Outro aspecto do aprendizado matemático é apontado por Vergnaud (1986) ao enfatizar que conceitos são articulados entre si, sendo esta inter-relação de conceitos, denominada de *campos conceituais*. Vergnaud (1996, p. 167) considera um campo conceitual

> [...] como um conjunto de situações. Por exemplo, para o campo conceitual das estruturas aditivas, o conjunto das situações que exigem uma adição, uma subtração ou uma combinação destas duas operações e, para as estruturas multiplicativas, o conjunto das situações que exigem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação destas duas operações.

Sendo assim, esperava-se, neste estudo, que a abordagem da Combinatória pela resolução de situações diversificadas que caracterizam este conteúdo favorecesse seu domínio, uma vez que, como Vergnaud (1986) enfatiza, resolvendo variadas situações, conceitos podem ser construídos pelos alunos, pois, assim, os alunos podem observar aspectos comuns e diferenciadores de conceitos, ou seja, relações e propriedades constituintes de um mesmo campo.

Vergnaud (1996) também ressalta o papel das representações simbólicas no aprendizado de conceitos. Este autor afirma que "[...] as representações simbólicas têm justamente a vantagem de dar uma ajuda à resolução de um problema quando os dados são numerosos e a resposta à questão exige várias etapas" (p. 184). Dessa forma, esperava-se também que a resolução de situações combinatórias por meio de árvores de possibilidades influenciasse diretamente no sucesso de seu aprendizado, uma vez que, Fischbein (1975), citado por Borba (2010, p.4), enfatiza que o uso dessa estratégia de resolução pode permitir avanços no desenvolvimento do raciocínio combinatório ao apontar as etapas de escolha necessárias.

Portanto, o presente trabalho visou analisar, à luz da Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, a influência da construção de árvores de possibilidades, com e sem o uso de um *software* educativo, voltado para o ensino e aprendizagem da Combinatória para alunos dos anos iniciais de escolarização. Foi avaliado, dessa forma, se a estratégia de construção de árvores de possibilidades é mais eficiente numa representação virtual (do *software*) ou numa representação escrita (em lápis e papel). Dessa forma, parte dos alunos deste estudo experimentou resolver situações combinatórias por meio de árvores de possibilidades fazendo uso, ou não, do *software* educacional *Diagramas de Árbol*, sendo, assim, possível refletirem sobre os conceitos de Combinatória e estabelecerem relações entre os mesmos para que desenvolvessem ricas aprendizagens.

2. REVISÃO DA LITERATURA

A Combinatória é um ramo da Matemática caracterizado como um tipo de contagem baseada no raciocínio multiplicativo. Esse conhecimento matemático é trabalhado de modo explícito e sistemático no Ensino Médio, apesar das indicações dos PCN (BRASIL, 1997) apontarem a necessidade de serem trabalhados desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Sendo assim, há uma prática na qual nos anos iniciais de escolarização é trabalhado apenas um tipo de problema combinatório e, somente no Ensino Médio, os outros tipos são trabalhados.

Baseadas na Teoria dos Campos Conceituais proposta por Vergnaud (1986), Pessoa e Borba (2007) classificam os problemas combinatórios num agrupamento único, recomendando que os quatro tipos sejam trabalhados simultaneamente ao longo de cada período de escolarização, mas variando o grau de dificuldade das situações propostas. Dessa forma, as autoras afirmam que há quatro tipos básicos de problemas combinatórios: *produto cartesiano*, *combinação, arranjo* e *permutação.* Geralmente, questões de *produto cartesiano* são as únicas trabalhadas nos anos iniciais do Ensino Fundamental, enquanto que os demais tipos são vistos, sobretudo, no Ensino Médio, entretanto, recomenda-se que os quatro tipos sejam trabalhados ao longo da escolarização básica, com aprofundamentos nos diferentes níveis de ensino.

As autoras supracitadas destacam também os invariantes de cada tipo de problema. Elas ressaltam que a natureza do primeiro invariante está relacionada aos conjuntos existentes na situação e, portanto, refere-se à escolha dos elementos de cada possibilidade. A natureza do segundo invariante está ligada à influência, ou não, da ordenação dos conjuntos formados. Assim, se entende que os dois primeiros tipos de problemas classificados por Pessoa e Borba (2007) – *produto cartesiano* e *combinação* – são situações em que a ordem dos elementos não gera novas possibilidades. Estes problemas possuem esta característica em comum, referente à ordenação, mas se diferenciam quanto à escolha de elementos. Já os dois últimos tipos de problemas – arranjo e permutação – são situações em que a ordem dos elementos gera novas possibilidades. Esses tipos de problemas se assemelham, assim, quanto à ordenação dos elementos, mas se diferenciam em termos de escolha dos mesmos.

Entende-se que,numa perspectiva matemática, *permutação* é um caso particular do *arranjo*, porém, sob o ponto de vista psicológico, levando em consideração a teoria de Vergnaud, os dois problemas são diferentes, uma vez que os invariantes mobilizados são distintos. Defende-se, neste estudo, que problemas de *permutação* são diferentes de problemas de *arranjo*, pois no primeiro é necessário que a criança perceba que, para formar subconjuntos, é preciso utilizar todos os elementos existentes no conjunto dado, enquanto que, no segundo tipo de problema são escolhidos apenas alguns elementos do conjunto dado a serem utilizados na formação de novos subconjuntos.

Diversos estudos têm revelado que o aprendizado da Combinatória é muito importante na construção de conceitos variados, como já apontado anteriormente. Isto acontece, principalmente porque a Combinatória é um conteúdo que pode agir diretamente no desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático dos alunos, principalmente, pelo fato de que no raciocínio combinatório é necessário distinguir entre a realidade e a possibilidade de acontecer. Outra competência desenvolvida em situações combinatórias é a que deve-se ter em mente que antes de escolher uma determinada ação, pode-se elencar todas as possibilidades de agir, com antecedência.

Inhelder e Piaget (1976) chegaram à conclusão que o desenvolvimento do raciocínio combinatório está ligado ao desenvolvimento do pensamento lógico-matemático. Estes autores observaram que problemas de *combinação* são resolvidos, de modo sistemático, apenas quando se atinge a faixa dos 11-12 a 14-15 anos e que *permutações* e *arranjos* são resolvidos sistematicamente apenas a partir de 15 anos. Verificou-se, portanto, que situações combinatórias são dominadas após um longo período de desenvolvimento.

Baseado em um estudo com o uso de árvores de possibilidades por crianças de 10 anos, Fischbein, Pampu e Minzat (1970), apontado por Borba (2010), ressaltaram que a instrução escolar é fundamental para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Observou-se que esta estratégia possibilitou avanços na medida em que os alunos apresentaram maior sistematização na resolução de problemas combinatórios.

Entretanto, em estudo sobre as estratégias de resolução de problemas combinatórios com alunos do primeiro ano do Curso de Licenciatura em Matemática, Miguel e Magina (2003), relatam que, em nenhuma ocasião, o diagrama de árvore foi utilizado, e, mesmo quando os alunos já haviam passado por estudo formal deste conteúdo, a estratégia mais utilizada era a listagem, o que dificultava a resolução da questão quando esta tinha um número elevado de possibilidades. Dessa forma, nem sempre essa estratégia é utilizada, mesmo sendo uma eficiente forma sistematizar o levantamento de possibilidades.

Moro e Soares (2006) investigaram o desenvolvimento do raciocínio combinatório por crianças do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental, especificamente com questões de *produto cartesiano,* e concluíram que as estratégias de resolução são, inicialmente, não sistematizadas e, com as experiências em instruções formais, passam a ser sistemáticas, incluindo, por vezes, o uso de árvores de possibilidades. Essa estratégia pode, assim, ser fonte de avanços no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Pessoa e Borba (2010), em estudo de sondagem com alunos de 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, relacionaram a árvore de possibilidades como uma das estratégias utilizadas na resolução de problemas combinatórios, entretanto, entre os alunos dos anos iniciais de escolarização, é a estratégia menos utilizada. As autoras destacam que as listagens, a multiplicação e a adição de parcelas repetidas, por exemplo, são mais usadas. Apesar do pouco uso dessa estratégia por crianças em início de escolarização, as autoras enfatizam que esta estratégia é um bom caminho para que a Combinatória seja trabalhada na escola, uma vez que se configura numa estratégia que, quando utilizada por alunos, resultam em resoluções corretas, principalmente em situações de *produto cartesiano*.

Silva e Spinillo (2011), também investigaram o desenvolvimento do raciocínio combinatório, a partir de situações de *produto cartesiano*, com crianças de sete e oito anos de idade. As autoras destacaram que, quando as crianças resolvem situações de *produto cartesiano* com seus princípios explicitados, tanto os seus desempenhos, quanto as estratégias de resolução utilizadas eram mais sofisticadas, uma vez que envolviam, mais nitidamente, a correspondência um-para-muitos. Ressalta-se que em árvores de possibilidades essa correspondência pode ser evidenciada, pois, nesses diagramas, para cada elemento pode-se relacionar os outros elementos aos quais deve ser associado.

Em estudo longitudinal, Maher e Yankelewitz (2010) investigaram a compreensão inicial de crianças de oito e nove anos em um problema de *produto cartesiano*. As autoras enfatizam que é preciso convidar as crianças a usarem representações diversas para expressarem suas idéias e formas de raciocínio, pois, segundo elas, as representações dão sentido ao problema e comunicam ideias. Com isso, as crianças podem encontrar padrões, serem sistemáticas, abstraírem e generalizarem resultados. As autoras também destacam que ao solicitar que as crianças às convencessem que conseguiram encontrar todas as possibilidades, elas construíam esquemas organizacionais que facilitavam na resolução do problema. Vale ressaltar que, segundo as autoras, as crianças desse estudo também se utilizaram da árvore de possibilidades para resolver problemas combinatórios.

Sandoval, Trigueiros e Lozano (2007) propuseram a aprendizagem da Combinatória utilizando o *software Diagramas de Árbol*[†]. O estudo foi desenvolvido com 25 crianças mexicanas de 11 a 13 anos e as autoras observaram avanços no desempenho dos alunos, principalmente, quanto à escolha de estratégias de resolução mais eficientes. Assim, ressalta-

[†] O software *Diagramas de Árbol* foi desenvolvido por Aguirre (2005) e disponibilizado para uso do Grupo de Estudos do Raciocínio Combinatório – GERAÇÃO – pelas autoras do estudo mexicano, Sandoval, Trigueiros e Lozano (2007).

se que este *software*, por meio do diagrama de *árvore de possibilidades*, favorece a aplicação com crianças de nível inicial de escolarização, pois fornece todas as possibilidades de combinação, sejam elas válidas ou não, em todos os tipos de problemas (*produto cartesiano*, *combinação*, *arranjo* e *permutação*).

Ferraz, Borba e Azevedo (2010), aplicaram um teste em que alunos do 7º ano do Ensino Fundamental deveriam resolver situações combinatórias, ora utilizando o *software Diagramas de Árbol*, ora utilizando apenas o lápis e papel. As autoras notaram que, com alunos dos anos finais de escolarização, a árvore de possibilidades pode ser um excelente recurso na compreensão de problemas combinatórios tanto com a utilização do *software* quanto com o uso apenas do lápis e papel. Em entrevistas com alguns dos alunos participantes da pesquisa, foi possível destacar a organização que o *software* oferece na resolução dos problemas combinatórios. Entretanto, os alunos também enfatizam que o *software* apresenta algumas dificuldades, elencadas pelas autoras como: a não apresentação de *feedback*, assim como, dificuldades quanto à não visualização de todas as possibilidades e quanto ao idioma (espanhol).

Azevedo, Costa e Borba (2011), em estudo de intervenção com uso do *software Diagramas de Árbol* com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental observaram que o uso do *software* proporcionou avanços em todos os tipos de problemas combinatórios, porém com menos resultados favoráveis para as situações de *permutação*. As autoras destacam que o software utilizado permitiu que os alunos utilizassem uma estratégia – árvore de possibilidades – na qual puderam refletir sobre a estrutura das situações, uma vez que ficaram livres da responsabilidade de listar todos os possíveis casos. Elas destacaram ainda que o software pode auxiliar no aprendizado, porém havia a necessidade que o professor apontasse os principais aspectos de cada tipo de questão, ou seja, se todos os elementos devem ser usados e se a ordem deles pode influenciar, ou não, no resultado.

Borba e Azevedo (2012) destacaram um estudo de caso com uma dupla de alunas participantes da pesquisa realizada por Azevedo, Costa e Borba (2011). Essas alunas inicialmente demonstraram pouco conhecimento em situações combinatórias, e, após duas sessões de intervenção com o uso do *software* já mencionado, passaram à quase totalidade de questões respondidas corretamente. Em suas respostas, as alunas apresentavam a compreensão das relações e propriedades das diferentes situações combinatórias e, certamente, foram influenciadas em seu desenvolvimento pelo uso dos diagramas de árvores de possibilidades apresentados pelo *software*.

Desta forma, diante da possibilidade de aprendizagens por árvores de possibilidades, o presente estudo objetiva analisar, por meio do uso dessa estratégia, o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças do 5º ano do Ensino Fundamental. O presente estudo visa ainda, ampliar achados de estudos anteriores, verificando como o uso de árvores de possibilidades, produzidas virtualmente ou em lápis e papel, oferece influência no aprendizado da Combinatória com alunos dos anos iniciais de escolarização. Um caráter inovador da pesquisa é a inclusão da comparação de desempenhos entre os usuários de *software* (representação virtual) e os que construíram manualmente com lápis e papel (representação escrita) as árvores de possibilidades, bem como a existência de dois grupos controle para verificar a necessidade de instrução específica para o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

3. MÉTODO

3.1 Objetivos

3.1.1 Objetivo Geral

- Analisar a influência da construção de árvores de possibilidades na compreensão de problemas combinatórios.

3.1.2 Objetivos Específicos

- Investigar o efeito de intervenções em Combinatória, com e sem o uso do software, por meio da construção de árvores de possibilidades;
- Verificar os desempenhos de alunos em relação aos tipos de problemas combinatórios em diferentes grupos de intervenção que constroem árvores de possibilidades.

3.2 Procedimentos

O presente estudo foi realizado com 40 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental de duas escolas da rede pública Municipal do Recife. Foi realizado, em ambas as escolas, um pré-teste, seguido de três formas distintas de intervenção nos diferentes grupos e, finalmente, um pós-teste, que avaliou os avanços obtidos através das intervenções realizadas.

Durante as intervenções, os alunos trabalharam em duplas, pois se acredita que interações podem contribuir para a compreensão da Matemática, em particular no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

No pré-teste, como pode ser visto a seguir no Quadro 1, estavam contidos oito situações-problema de Combinatória, sendo duas questões para cada tipo de problema: *produto cartesiano, arranjo,* c*ombinação* e p*ermutação*.

Quadro 1: Lista de problemas do pré-teste (todos os grupos) e intervenção (Grupos 1 e 2)

Produto Cartesiano:

1. Numa lanchonete há três tipos de suco (laranja, morango e abacaxi). Eles são servidos em copos de dois tamanhos (pequeno e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de um sabor e um tamanho de copo?
2. Para entrar no parque de diversões, João pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C e D). Depois que João se divertir nos brinquedos do parque, ele poderá ir para casa passando por seis saídas diferentes (E, F, G, H, I e J). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do parque?

Combinação:

3. Na loja de bichos de estimação há para vender três animais (um cachorro, um passarinho e uma tartaruga). Marcelo quer comprar dois bichinhos. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?
4. Márcia tem em casa sete frutas (mamão, pera, abacaxi, laranja, banana, jaca e uva) e quer fazer uma salada usando duas dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?

Arranjo:

5. Três crianças (Pedro, Márcia e Léo) estão disputando uma corrida no *Play Station*. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares?
6. Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar cinco letras (X, Y, Z, K e W) e vai escrever duas letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?

Permutação:

7. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?
8. Tenho quatro bolas nas cores verde, marrom, amarela e rosa. Comprei uma caixa com quatro compartimentos e quero colocar cada bola em um desses compartimentos. De quantas maneiras diferentes posso organizar a caixa?

Fonte: Azevedo, Costa e Borba, 2011 (Adaptado)

No processo de intervenção dos grupos que trabalharam com Combinatória, as questões do pré-teste foram resolvidas, visando comparar as respostas anteriores para que os alunos percebessem os seus possíveis erros e acertos das questões. Partiu-se, dessa forma, das estratégias inicialmente utilizadas pelas crianças e discutiu-se nos grupos de intervenção em Combinatória a estratégia de uso de árvores de possibilidades.

A partir dos resultados encontrados no pré-teste, os alunos foram emparelhados em quatro grupos distintos de acordo com seus acertos. O primeiro grupo foi composto por dez alunos que trabalharam em duplas com o *software Diagramas de Árbol* (AGUIRRE, 2005) – no qual são construídas árvores de possibilidades; o segundo grupo também com dez alunos que, em duplas, construíram árvores de possibilidades com lápis e papel; o terceiro grupo, composto por outros dez alunos que formaram um grupo controle assistido que, em duplas, trabalharam problemas multiplicativos (excluindo-se os de Combinatória) por meio de desenhos – que configuram uma forma de representação bastante utilizada nas resoluções de questões combinatórias; e o quarto grupo, composto pelos outros dez alunos que fizeram parte do grupo controle desassistido, ou seja, participou apenas do pré e do pós-teste.

As questões que foram propostas para os alunos do terceiro grupo são baseadas na classificação de problemas multiplicativos sugerida por Nunes e Bryant (1997), mas não foram incluídos problemas de *produto cartesiano*. As questões podem ser vistas no Quadro 2.

Quadro 2: Lista de problemas para a intervenção com o Grupo 3

Multiplicação:

1. Uma casa tem um quarto, uma cozinha, um banheiro e uma sala, fazendo um total de quatro cômodos. Cada cômodo tem duas janelas. Quantas janelas há na casa?
2. Um carro tem quatro rodas. Quantas rodas há em seis carros?

Problema inverso da multiplicação:

3. A professora do terceiro ano comprou quinze livros e fará um sorteio entre os alunos da sua turma. Ela decidiu que cada aluno sorteado receberá cinco livros. Quantos alunos poderão receber o prêmio?
4. João tem quarenta bolinhas de gude e pretende dar duas bolinhas para cada um de seus amigos. Para quantos amigos João pode dar suas bolinhas?

Relação entre variáveis – co-variação

5. Pedro quer comprar oito pirulitos. Cada pirulito custa R$1,25. Quanto Pedro gastará com os pirulitos?
6. D. Isabel faz um vestido com 2,50 metros de tecido. Quanto de tecido ela usará para fazer nove vestidos?

Distribuição

7. Ana tem trinta figurinhas e quer distribuí-las entre as suas seis primas. Quantas figurinhas cada prima de Ana irá receber?
8. Fui ao mercado de artesanato e paguei R$ 60,00 reais por três chapéus. Quanto custou cada chapéu?

Fonte: Autora da pesquisa

Após cinco dias do processo de intervenção, com os 40 alunos foram aplicadas as questões referentes a um pós-teste, objetivando verificar os avanços obtidos por meio das intervenções realizadas. Os problemas do pós-teste eram semelhantes aos do pré-teste e podem ser observados no Quadro 3.

Quadro 3: Lista de problemas para o pós-teste imediato (para todos os grupos)

Produto Cartesiano:

1. Jane possui quatro blusas (amarela, rosa, laranja e vermelha) e duas saias (preta e branca). De quantas maneiras diferentes ela poderá se vestir usando uma de suas blusas e uma de suas saias?
2. Para um teste de teatro estão inscritos cinco meninos (João, Pedro, Rafael, Vinícius e Guilherme) e seis meninas (Aline, Cecília, Danielle, Kátia, Sandra e Natália). Desses, apenas um menino e uma menina serão selecionados. Quantos casais diferentes podem ser escolhidos?

Combinação:

3. Uma escola tem quatro professores (Ricardo, Tânia, Luiza e Sérgio). Para o passeio da escola serão escolhidos dois professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses dois professores?
4. Oito pessoas (Beatriz, Daniel, Joana, Carlos, Marcos, Fátima, George e Marina) se cumprimentaram com aperto de mão. Quantos apertos de mão entre pessoas diferentes foram dados?

Arranjo:

5. De quantas maneiras possíveis pode-se escrever números de dois algarismos diferentes, usando os três algarismos 2, 4 e 6?
   A turma da terceira série quer eleger o representante e o vice-representante da turma. Há seis alunos (Luciana, Marcos, Priscila, João, Talita e Diego) interessados nesses cargos. De quantas maneiras diferentes estes alunos podem ser eleitos para esses dois cargos (representante e vice-representante)?

Permutação:

6. Gabriela ganhou um porta-joias com três lugares. Ela possui um anel, um colar e um par de brincos para guardar no seu novo porta-joias. De quantas maneiras diferentes ela poderá organizar suas joias?
7. Quatro torcedores irão para um jogo de futebol (Renata, Isabel, Luciano e Ricardo). De quantas maneiras diferentes eles podem se sentar em quatro cadeiras dispostas lado a

lado?

Fonte: Azevedo, Costa e Borba, 2011 (Adaptado)

As questões das listas elaboradas – tanto no pré quanto no pós-teste – foram organizadas de forma que a primeira questão de cada tipo de problema não gerasse resultados maiores que oito (8) e a segunda questão de cada tipo de problema não gerasse resultados menores que vinte (20) nem maiores que trinta (30). Os problemas foram apresentados na mesma ordem aleatória para todos os participantes. Com as ordens de grandezas controladas dessa forma, pretendia-se estimular que os alunos observassem as regularidades existentes nos problemas combinatórios, não havendo necessidade de construir todos os ramos da árvore de possibilidades.

Acreditava-se que a curta intervenção prevista (um encontro) fosse suficiente para que os alunos já expressassem melhores desempenhos que os apresentados inicialmente, uma vez que estudos anteriores evidenciaram compreensões intuitivas que podem ser desenvolvidas por uso de um recurso que auxilia no levantamento de possibilidades.

Foi realizada uma análise quantitativa das questões acertadas pelos 40 alunos da pesquisa, diferenciando-se o quantitativo das questões acertadas no pré-teste e no pós-teste, comparando-se os acertos dos três grupos distintos antes e depois do processo de intervenção e comparando também os acertos no pós-teste dos grupos com e sem uso de *software* e os acertos no pós-teste dos grupos com e sem intervenção em Combinatória. Essas análises também foram realizadas com o quarto grupo – o Grupo controle desassistido. Além disso, também foi analisado, quantitativamente, o desempenho dos alunos de seus respectivos grupos por tipo de problema combinatório. Análises qualitativas acompanharam as quantitativas buscando possíveis explicações para melhores desempenhos de certos grupos e em alguns tipos de problemas.

4. APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DOS RESULTADOS

4.1 Desempenho no pré-teste e no pós-teste por grupo

Após a aplicação do pré-teste foi decidido classificar o erro e o acerto das crianças segundo alguns critérios de pontuação, para qualificar o desempenho além de mero erro ou acerto pleno. A pontuação foi dividida em cinco níveis crescentes, iniciando pelo erro do aluno, passando por acertos parciais e terminando no acerto total da questão. No Quadro 4, é possível visualizar cada classificação e seguem-se exemplos de cada categoria.

A partir da referida classificação foi possível quantificar o desempenho dos alunos no pré-teste. Sabendo-se que o total de pontos possíveis de ser alcançado por um aluno era de 32 pontos, uma vez que o teste tinha oito questões e que em cada questão o aluno poderia obter no máximo quatro pontos, nota-se que os alunos, em geral, não obtiveram bons resultados na resolução do teste inicial com problemas combinatórios (Ver Tabela 1), pois apenas um aluno (aluno 15) conseguiu fazer mais da metade dos pontos (17 pontos).

Quadro 4: Níveis crescentes de pontuação por tipo de resposta

Tipo de resposta	**Pontuação**	**Classificação**
Resposta errada	0 ponto	Não apresenta relação com Combinatória, ou seja, na sua resolução a criança não aponta indícios de compreensão do problema proposto (Figura 1)
Resposta parcialmente correta 1	1 ponto	Escolhe apenas um caso, ou seja, a criança escolhe apenas uma possibilidade, não indicando perceber que podem existir outras (Figura 2)
Resposta parcialmente correta 2	2 pontos	Enumera alguns casos, ou seja, percebe que pode haver mais de um caso, mas limita os casos ao número de elementos dados no problema (Figura 3)
Resposta parcialmente correta 3	3 pontos	Enumera alguns casos, ou seja, percebe que pode haver mais de um caso, não limita ao número de elementos dados, mas não consegue esgotar todas as possibilidades (Figura 4)
Resposta correta	4 pontos	Esgota todas as possibilidades, ou seja, acerta a questão apontando todas as possibilidades da questão (Figura 5)

Figura 1: Resposta errada do Aluno 28 para a Q8 do Pré-teste

8. Quantas palavras, com e sem sentido, podem ser formadas com as letras da palavra AMOR?

Resposta: Roma, mulher, oração e almanaque.

Figura 2: Resposta parcialmente correta 1 do Aluno 32 para a Q5 do Pré-teste

5. Três crianças (Pedro, Márcia e Léo) estão disputando uma corrida no Play Station. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares?

Resposta: QUEM PODE FICAR EM PRIMEIRO É LÉO E SEGUNDO PEDRO.

Figura 3: Resposta parcialmente correta 2 do Aluno 22 para a Q6 do Pré-teste

6. Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar cinco letras (X, Y, Z, K e W) e vai escrever duas letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?

Resposta: junta-se X e Y Z e K e W Fica só

Figura 4: Resposta parcialmente correta 3 do Aluno 6 para a Q6 do Pré-teste

6. Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar cinco letras (X, Y, Z, K e W) e vai escrever duas letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?

XY - ZK - KW - KX - ZX

Resposta: são 5 maneiras

Figura 5: Resposta correta do Aluno 15 para a Q1 do Pré-teste

1. Numa lanchonete há três tipos de suco (laranja, morango e abacaxi). Eles são servidos em copos de dois tamanhos (pequeno e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de um sabor e um tamanho de copo?

(L+G) ou (L+P)
(M+G) ou (M+P)
(A+G) ou (A+P)

Resposta: 6 tipos

A formação das duplas em função do tipo de intervenção que os alunos participaram foi feita por meio do número de pontos alcançados pelos alunos no pré-teste. Assim foi estabelecido o critério de que em cada grupo haveria duas duplas que fossem constituídas por alunos que tivessem obtido dois pontos ou menos no pré-teste; duas duplas que fossem constituídas por alunos que tivessem obtido entre três pontos e sete pontos no pré-teste; e um dupla que fosse constituída por alunos que tivessem obtido mais de oito pontos no pré-teste. Essa separação ocorreu com o objetivo de que a média de acertos de cada grupo fosse semelhante.

Assim, na Tabela 1 observa-se o desempenho dos alunos participantes dos grupos, no pré-teste e no pós-teste, verificando desempenhos iniciais semelhantes e observando desempenhos finais diferenciados.

Tabela 1: Média de desempenho Pré-teste X Pós-teste - G1(Árbol)

	Pré-Teste	**Pós-Teste**
Grupo 1 (Intervenção com árvores de possibilidades: *software* Árbol)	**4,6**	**12,1**
Grupo 2 (Intervenção com árvores de possibilidades: lápis e papel)	**4,8**	**14,8**
Grupo 3 (Controle assistido: estruturas multiplicativas)	**4,7**	**4,1**
Grupo 4 (Controle - desassistido)	**4,9**	**2,8**

Quanto ao Grupo 1 observou-se que os alunos, em sua maioria, avançaram em seus conhecimentos em problemas combinatórios. Destaca-se que no pós-teste apenas três alunos deste grupo obtiveram pontuação menor ou igual a sete pontos. Também verificou-se que três alunos obtiveram mais que 20 pontos.

Quanto ao Grupo 2, também nota-se o avanço dos alunos nos problemas combinatórios após a intervenção. Observa-se, na Tabela 1, que o avanço dos alunos deste grupo foi um pouco maior que o avanço dos alunos do Grupo 1.

O desempenho um pouco superior do Grupo 2 pode estar relacionado ao fato de que os alunos deste segundo grupo, durante a intervenção, resolveram as situações utilizando a mesma representação (escrita com lápis e papel) adotada no pré-teste e no pós-teste, enquanto os alunos do Grupo 1, durante a intervenção, resolveram as situações por meio de um *software* (representação virtual) e no pós-teste tiveram que utilizar outra forma de representação: escrita com lápis e papel. Assim, acredita-se que a transferência de representação, ou seja, aprendizagem com utilização do *software* e resolução do pós-teste em lápis e papel, necessária para o Grupo 1, tenha efeito direto na menor média de desempenho desse grupo em comparação com o Grupo 2, que participou da intervenção com a mesma representação que resolveu o pós-teste, a representação escrita, ou seja, com uso do lápis e papel.

Ferraz, Borba e Azevedo (2010) destacaram em sua pesquisa que o *software* também pode dificultar, em certa extensão, a compreensão das situações por não propiciar a visualização de todas as possibilidades em algumas situações com números maiores de possibilidades. Também se destaca, em contraponto, a pesquisa de Azevedo, Costa e Borba (2011), que enfatiza o grande avanço dos alunos que aprenderam Combinatória por meio deste mesmo *software*.

O Grupo 3, composto pelos alunos que fizeram parte do grupo controle assistido – com aulas de estruturas multiplicativas – diminuiu a sua média de acertos em comparação com o pré-teste, como ainda pode ser visto na Tabela 1. Isto pode estar relacionado à natureza das situações que foram diferentes entre as do pré-teste e pós-teste e as trabalhadas na intervenção – que não eram de natureza combinatória. Dessa forma, observa-se que trabalhar problemas multiplicativos, mas não combinatórios, em nada parece auxiliar o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

O Grupo 4, que foi formado pelos alunos que não receberam nenhum tipo de instrução, diminuiu ainda mais o seu rendimento ao se comparar a média dos resultados no pré-teste e no pós-teste destes alunos (ver Tabela 1). Assim, além da possível influência da natureza dos problemas tratados, também há uma influência, ainda que mínima, da instrução por meio de problemas multiplicativos não combinatórios.

Por meio da prova paramétrica *t-teste de amostras em pares* foi possível destacar que ambos os grupos com intervenção em Combinatória apresentaram diferenças significativas[‡] de desempenhos entre pré-teste e pós-teste. No Grupo 1, quando comparado o pré-teste e o pós-teste dos seus respectivos alunos, foi observado um diferença significativa ($t(9) = -3{,}822$; $p = 0{,}004$). Já o Grupo 2, neste mesmo panorama de comparação, foi observada uma

[‡] Nesta pesquisa foi considerado índice de significância $p < 0{,}05$.

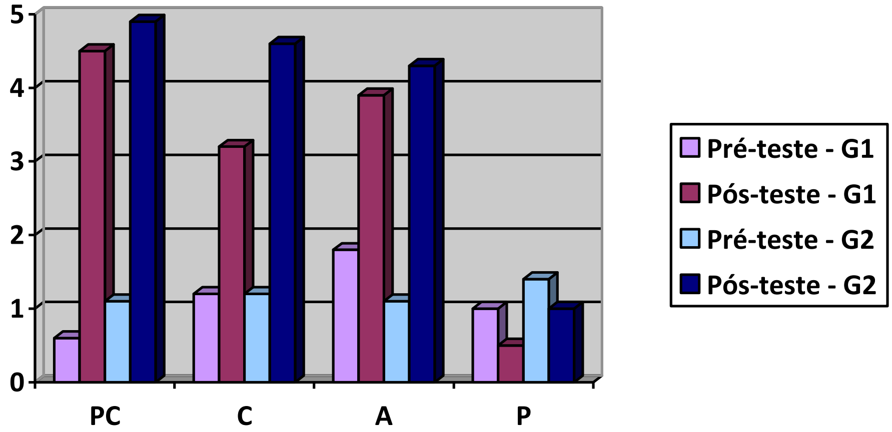
diferença significativa (t (9) = -3,205; p = 0,011). Isso não aconteceu na comparação dos Grupos 3 (t (9) = 0,688; p = 0,509) e 4 (t (9) = 1,233; p = 0,249).

Utilizando a prova paramétrica ANOVA com *post hoc* Tukey, foi observada diferença significativa do Grupo 1, quando comparado com Grupo 4 (p = 0,018), mas não com o Grupo 3 (p = 0,052). Além disso, foi observado um maior avanço do Grupo 2, uma vez que nesse grupo foram identificadas diferenças significativas quando comparado com ambos os grupos controle (Grupo 2 x Grupo 3: p = 0,005; Grupo 2 x Grupo 4: p = 0,002). Foi identificado, ainda, que não há diferenças significativas na comparação dos Grupos 3 e 4 entre si (p = 0,972) nem entre os Grupos 1 e 2 (p = 0,803). Com isso, é possível destacar que aprender a construir árvores de possibilidades tem um efeito positivo na resolução de problemas combinatórios e que a aprendizagem em ambiente informático (uso do *software*) ou não (uso de lápis e papel) tem o mesmo impacto no desenvolvimento deste conceito, com um desempenho um pouco melhor do grupo que teve intervenção com a mesma representação (escrita) presente nos testes.

4.1 Desempenho por tipo de problema

Estudos anteriores como o de Pessoa e Borba (2009) ressaltam que~~,~~ alunos dos anos iniciais, resolvem problemas combinatórios principalmente de forma não sistemática, o que ocasiona, na maioria das vezes, no não esgotamento de todas as possibilidades da situação proposta. Esse panorama também foi observado no pré-teste do presente estudo. Entretanto, após a intervenção com ou sem uso do software, foi destacada uma maior sistematização na resolução dos problemas e com isso, alguns alunos no pós-teste esgotam todas as possibilidades do problema, chegando ao seu resultado correto.

Gráfico 1: Média de desempenho no pré-teste e no pós-teste por tipo de problema nos grupos com intervenção específica em Combinatória.



C: Produto Cartesiano; C: Combinação; A: Arranjo; P: Permutação

Assim, visualizando o Gráfico 1, percebe-se que, com exceção do problema *permutação*, os alunos apresentaram avanços na comparação da média de desempenho do pré-teste com o pós-teste. Vale salientar, que os problemas de *permutação* continuaram sendo os mais difíceis de resolução para os alunos dos anos iniciais e, além disso, a média de pontuação diminuiu em relação ao pré-teste.

Na Tabela 2, são apresentadas as médias dos resultados dos alunos em situações-problema nos quais a ordem dos elementos não gera novas possibilidades (*produto cartesiano* e *combinação*). São, assim, apresentados os resultados dos grupos nos problemas com menor (PC1 e C1) e com maior (PC2 e C2) número de possibilidades.

Esperava-se que no pré-teste a pontuação nos problemas de *produto cartesiano* fosse bem superior à pontuação dos problemas de *combinação*, uma vez que esse resultado já foi apontado por Pessoa e Borba (2010). Porém, nem sempre esse foi caso, principalmente quando as ordens de grandeza eram maiores.

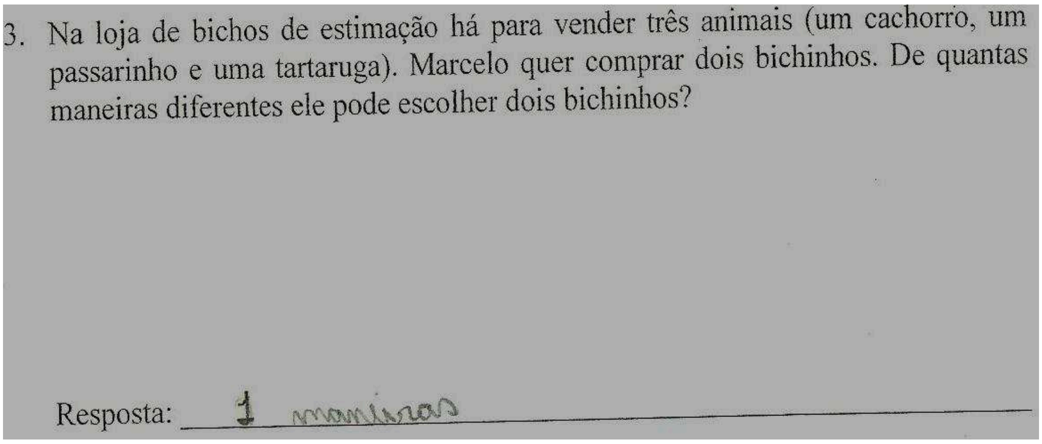
Tabela 2: Média de desempenho dos alunos em seus respectivos grupos no pré-teste e no pós-teste em situações-problema nas quais a ordem dos elementos não gera novas possibilidades

Tipo de problema	**Grupo**	**Média Pré**	**Média Pós**	**Tipo de problema**	**Grupo**	**Média Pré**	**Média Pós**
PC1	1 (Árbol)	,40	1,90	C1	1 (Árbol)	,30	1,80
	2 (Lápis e Papel)	1,00	2,40		2 (Lápis e Papel)	,40	2,50
	3 (Est. Mult.)	,50	1,00		3 (Est. Mult.)	,50	,60
	4 (Controle)	1,40	,60		4 (Controle)	,30	,50
PC2	1 (Árbol)	,20	2,60	C2	1 (Árbol)	,90	1,40
	2 (Lápis e Papel)	,10	2,50		2 (Lápis e Papel)	,80	2,10
	3 (Est. Mult.)	,30	,80		3 (Est. Mult.)	,50	,00
	4 (Controle)	,30	,70		4 (Controle)	,50	,30

PC1: Produto Cartesiano 1: Ordem de grandeza do resultado pequena (até oito); PC2: Produto Cartesiano 2: Ordem de grandeza do resultado alta (entre 20 e 30); C1: Combinação 1: Ordem de grandeza do resultado pequena (até oito); C2: Combinação 2: Ordem de grandeza do resultado alta (entre 20 e 30)

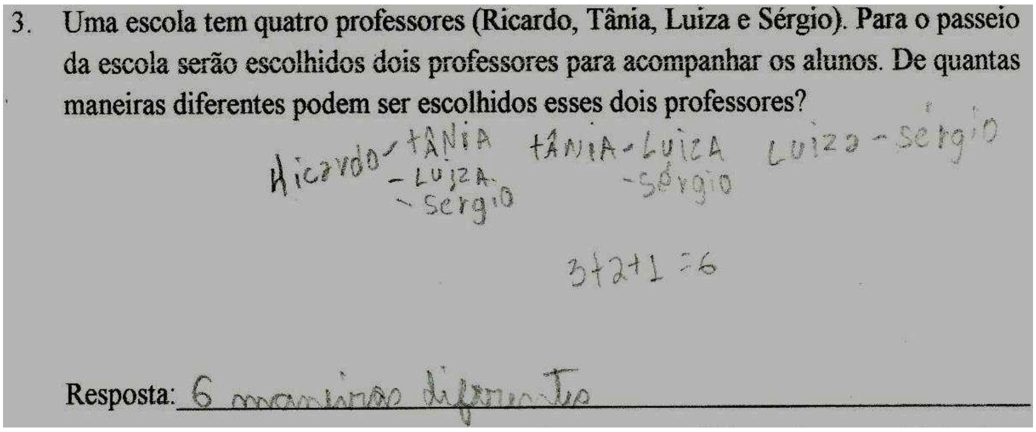
Já no pós-teste, como ainda pode ser visto na Tabela 2, verifica-se que nas questões de *produto cartesiano* e *combinação*, ambos os grupos que participaram da intervenção sobre Combinatória (G1 e G2) aumentaram bem suas médias de desempenho. Destaca-se que inicialmente alguns alunos não conseguiram esgotar todas as possibilidades. Porém, houve um salto qualitativo na maioria das resoluções, uma vez que, anteriormente, muitos alunos, como, por exemplo, o aluno 38, não relacionavam a situação a partir de um pensamento combinatório (Figura 6), e, após a intervenção, os alunos passaram a enumerar algumas ou todas as possibilidades, de forma sistemática, como pode ser visto na Figura 7. Nessa figura observa-se que o mesmo aluno que anteriormente não conseguia resolver a situação, após a intervenção com o *software* respondeu corretamente o problema.

Figura 6: Resposta errada do Aluno 38, participante do Grupo 1, para a Q3 do Pré-teste


3. Na loja de bichos de estimação há para vender três animais (um cachorro, um passarinho e uma tartaruga). Marcelo quer comprar dois bichinhos. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?

Resposta: 1 maniras

Figura 7: Resposta correta do Aluno 38, participante do Grupo 1, para a Q3 do Pós-teste


3. Uma escola tem quatro professores (Ricardo, Tânia, Luiza e Sérgio). Para o passeio da escola serão escolhidos dois professores para acompanhar os alunos. De quantas maneiras diferentes podem ser escolhidos esses dois professores?

Ricardo - TÂNIA
- LUIZA
- Sergio

TÂNIA - LUIZA
- SÉRGIO

LUIZA - SERGIO

3+2+1=6

Resposta: 6 maniras diferentes

Na Tabela 3, são apresentadas as médias dos resultados dos alunos em situações-problema nos quais a ordem dos elementos gera novas possibilidades (*arranjo* e *permutação*). Percebe-se que a média de acertos do problema de *arranjo* foi superior aos demais problemas no pré-teste. Essa maior média de acertos dos problemas de arranjo podem estar relacionados ao contexto da sexta questão (placas de carros), que apresentou maior média de acertos, uma vez que, as crianças podem saber que existem várias combinações possíveis.

Tabela 3: Média de desempenho dos alunos em seus respectivos grupos no pré-teste e no pós-teste em situações-problema que a ordem dos elementos gera novas possibilidades

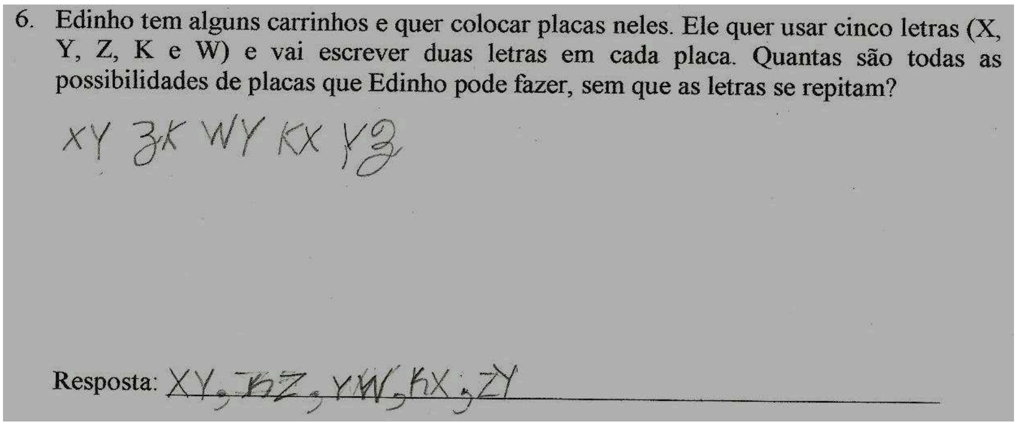
Tipo de problema	**Grupo**	**Média Pré**	**Média Pós**	**Tipo de problema**	**Grupo**	**Média Pré**	**Média Pós**
A1	1 (Árbol)	,60	2,20	P1	1 (Árbol)	,30	,50
	2 (Lápis e Papel)	,30	2,30		2 (Lápis e Papel)	,30	,60
	3 (Est. Mult.)	,40	1,20		3 (Est. Mult.)	,50	,00
	4 (Controle)	,30	,40		4 (Controle)	,30	,10
A2	1 (Árbol)	1,20	1,70	P2	1 (Árbol)	,70	,00
	2 (Lápis e Papel)	,80	2,00		2 (Lápis e Papel)	1,10	,40
	3 (Est. Mult.)	1,10	,50		3 (Est. Mult.)	,90	,00
	4 (Controle)	1,00	,20		4 (Controle)	,80	,00

A1: Arranjo 1: Ordem de grandeza do resultado pequena (até oito); A2: Arranjo 2: Ordem de grandeza do resultado alta (entre 20 e 30); P1: Permutação 1: Ordem de grandeza do resultado pequena (até oito); P2: Permutação 2: Ordem de grandeza do resultado alta (entre 20 e 30)

Na Tabela 3 observa-se, ainda, a melhora quantitativa no desempenho dos alunos nas questões de *arranjo* no pós-teste. Além disso, houve também uma melhora qualitativa, uma vez que, após a intervenção houve maior enumeração de possibilidades e o aparecimento de acertos totais (esgotamento das possibilidades), como pode ser visto nas Figuras 8 e 9.

Destaca-se, na Figura 9 a aparente percepção da regularidade na resolução do Aluno 10, uma vez que este aluno, na sexta questão do pós-teste não lista todas as possibilidades da situação, ou seja, lista apenas 15 possibilidades, entretanto, aponta que há "30 maneiras" de serem eleitos o representante e o vice-representante da turma. Assim, entende-se que o aluno percebeu que não era necessário continuar listando as outras 15 possibilidades que restavam e responde corretamente a situação.

Figura 8: Resposta parcialmente correta 3 do Aluno 10, participante do Grupo 2, para a Q6 do Pré-teste

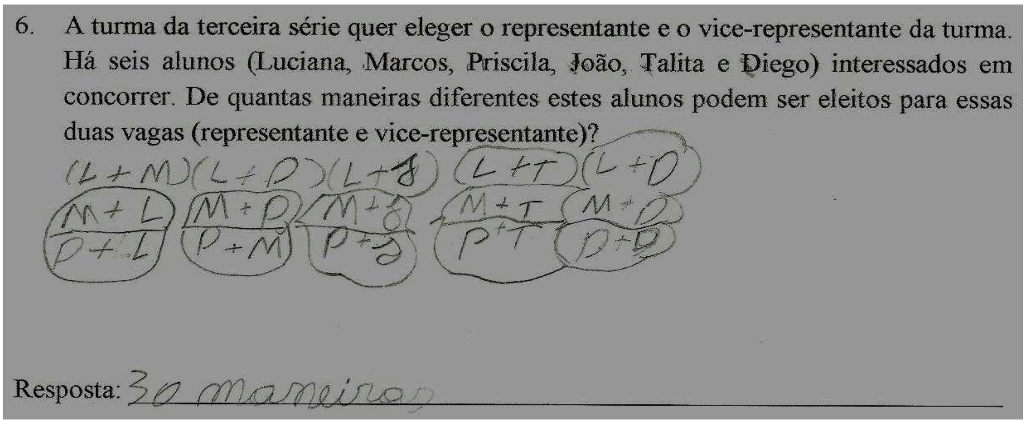


6. Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar cinco letras (X, Y, Z, K e W) e vai escrever duas letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?

XY ZK WY KX YZ

Resposta: XY, KZ, YW, KX, ZY

Figura 9: Resposta correta do Aluno 10, participante do Grupo 2, para a Q6 do Pós-teste



6. A turma da terceira série quer eleger o representante e o vice-representante da turma. Há seis alunos (Luciana, Marcos, Priscila, João, Talita e Diego) interessados em concorrer. De quantas maneiras diferentes estes alunos podem ser eleitos para essas duas vagas (representante e vice-representante)?

(L+M) (L+P) (L+J) (L+T) (L+D)

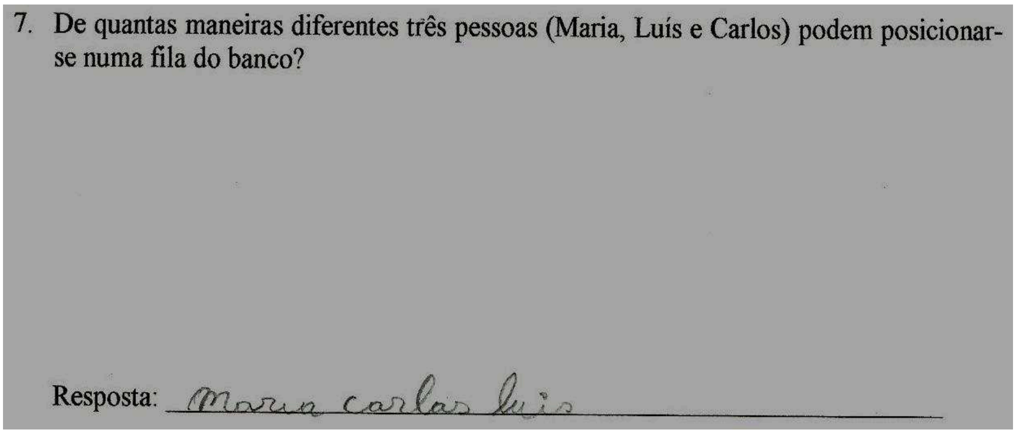
(M+L) (M+P) (M+J) (M+T) (M+D)

(P+L) (P+M) (P+J) (P+T) (P+D)

Resposta: 30 maneiras

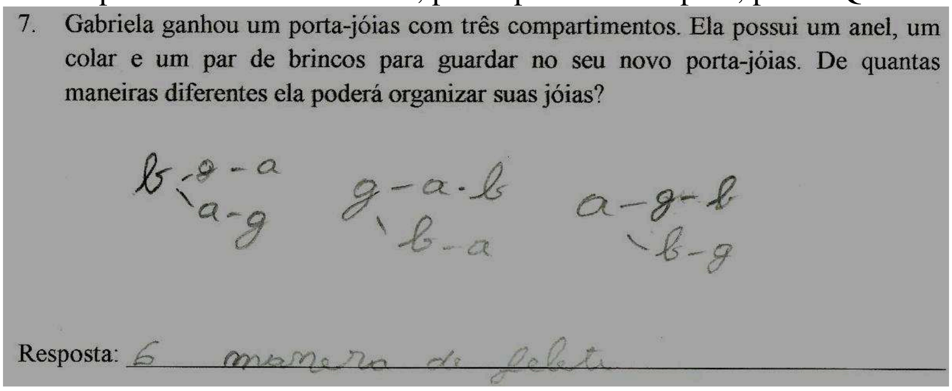
Já nas questões de *permutação*, o avanço quantitativo não foi evidenciado. Entretanto, alguns alunos obtiveram avanços qualitativos, especialmente na situação cujo número de possibilidades era menor, como é possível visualizar nas Figuras 10 e 11.

Figura 10: Resposta parcialmente correta 1 do Aluno 3, participante do Grupo 2, para a Q7 do Pré-teste


7. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?

Resposta: Maria carlos luis

Figura 11: Resposta correta do Aluno 3, participante do Grupo 2, para a Q7 do Pós-teste


7. Gabriela ganhou um porta-jóias com três compartimentos. Ela possui um anel, um colar e um par de brincos para guardar no seu novo porta-jóias. De quantas maneiras diferentes ela poderá organizar suas jóias?

b - g - a, a - g   g - a - b, b - a   a - g - b, b - g

Resposta: 6 manera de

Observando as figuras percebe-se que o Aluno 3 inicialmente listou apenas uma possibilidade de resolução da situação e após a intervenção em lápis e papel por meio de árvores de possibilidades conseguiu utilizar a estratégia trabalhada para resolver o problema de permutação. Entretanto, foi possível concluir que, os alunos deste estudo, nem sempre se utilizaram da árvore de possibilidades para resolver as situações combinatórias. Mesmo após a intervenção por meio dessa estratégia, em várias situações do pós-teste os alunos preferiram utilizar a listagem (como foi o caso do Aluno 10 – Figura 9) para solucionar a questão. Acredita-se com isso, que há evidências que os alunos não aprenderam um modo de resolver situações combinatórias, e sim, entenderam a lógica e os invariantes envolvidos nessas situações.

5. CONCLUSÕES

Diante do que foi apresentado e analisado, conclui-se que alunos que constroem árvores de possibilidade, com e sem uso do software *Diagramas de Árbol*, avançam em seus raciocínios combinatórios. Os dois grupos que construíram árvores demonstraram melhores desempenhos em um pós-teste, comparado ao teste respondido antes da intervenção. O Grupo 2 (com intervenção em lápis e papel) obteve um melhor rendimento quanto comparado com o Grupo 1 (com intervenção no software *Diagramas de Árbol*), mas este melhor desempenho não refletiu-se em uma diferença estatisticamente significativa entre os grupos.

Isso revela que o trabalho com árvores de possibilidades, seja por meio de software ou com resolução de problemas em lápis e papel, pode resultar em boa estratégia de ensino com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental, uma vez que houve importantes diferenças na comparação com os grupos controle, principalmente com o Grupo Controle desassistido. Assim, apenas tratar problemas multiplicativos ou esperar que os alunos amadureçam seus raciocínios, não são suficientes para o desenvolvimento do raciocínio combinatório. Intervenções são necessárias e o uso de árvores de possibilidades demonstrou-se um excelente recurso de ensino nesse sentido.

Observa-se, ainda, que, assim como no estudo de Azevedo, Costa e Borba (2011), as questões de *permutação* são as que os alunos apresentam maior dificuldade na resolução. Neste estudo as autoras destacam que “[...] essa dificuldade pode ser consequência da grande quantidade de ramos apresentada pelo *Árbol* para a solução da questão, o que dificulta a visualização do total de possibilidades.” (p. 9).

Entretanto, com o presente estudo, acredita-se que a dificuldade esteja, principalmente, na quantidade de escolhas a serem realizadas para a resolução deste tipo de problema. Nas questões de permutação havia sempre três ou quatro etapas de escolhas, ou seja, deveria ser escolhido, por exemplo, a primeira, depois a segunda, e por fim, a terceira pessoa da fila do banco, enquanto nos demais tipos de problemas, havia sempre duas etapas de escolhas, por exemplo, primeiro e segundo colocados no torneio, ou primeiro o tipo de comida e depois o tipo de bebida. Assim, a dificuldade pode estar além da visualização das possibilidades proporcionada pelo *software*. Esta conclusão é observada pelo fato de que a dificuldade com permutações não é exclusiva dos alunos que fizeram uso do *software*.

Com essa pesquisa contribui-se para a reflexão sobre melhores possibilidades de ensino da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental ao apontar o uso de árvores de possibilidades como recurso que permitem que os alunos observem diferentes relações e propriedades de distintas situações combinatórias. Antes do ensino formal da Combinatória os alunos evidenciam noções intuitivas, mas o trabalho em sala de aula pode aproveitar esse conhecimento inicial e possibilitar o desenvolvimento do raciocínio combinatório, trabalhando-se uma variedade de situações combinatórias por meio de estratégias eficientes – como a construção de árvores de possibilidades – bem como uso de formas de representação variadas: virtuais e escritas.

6. REFERÊNCIAS

AGUIRRE, C. **Diagrama de Árbol.** Multimidea. 2005.

AZEVEDO, J.; COSTA, D.; BORBA, R. O impacto do software Árbol no raciocínio combinatório. **Anais...** XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM/IACME, Recife, Brasil. 2011

BORBA, Rute. O Raciocínio Combinatório na Educação Básica. In: **Anais**... 10 Encontro Nacional de Educação Matemática (10 ENEM). Bahia, 2010.

BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana. **A construção de árvores de possibilidades com recurso tecnológico**: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de Karine e Vitória**.** 2012 (no prelo)

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. 1ª a 4ª série. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

FERRAZ, Martha; BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana. Usando o software Árbol na construção de árvores de possibilidades para a resolução de problemas combinatórios. **Anais...** 10 Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, 2010.

INHELDER, B.; PIAGET, J. **Da lógica da criança à lógica do adolescente.** São Paulo: Livraria Pioneira Editora. 1976

MAHER, Carolyn A.; YANKELEWITZ, Dina. Representations as Tools for Building Arguments. In: MAHER, Carolyn A; POWELL, Arthur B.; UPTEGROVE, Elizabeth B. **Combinatorials and Reasoning: representing, justifying and building isomorphisms.** New York: Springer, 2010.

MIGUEL, Maria Inez; MAGINA, Sandra. As estratégias de solução de problemas combinatórios: um estudo exploratório. **Anais...** II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, Santos, 2003.

MORO, M. L.; SOARES, M. T. Psicogênese do raciocínio combinatório e problemas de produto cartesiano na escola fundamental. **Anais**... 3 Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Águas de Lindóia, SP. 2006.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1997.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Estratégias de resolução de problemas de raciocínio combinatório de alunos de 1ª à 4ª série. **Anais**... 9 Encontro Nacional de Educação Matemática. Belo Horizonte, 2007

PESSOA, Cristiane & BORBA, Rute. O desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica. Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v. 1, p. 1-22, 2010.

SANDOVAL, I.; TRIGUEIROS, M.; LOZANO, D. Uso de un interactivo para el aprendizaje de algunas ideas sobre combinatoria en primaria. **Anais...** 12 Comitê Interamericano de Educação Matemática, Querétaro, México, 2007.

SILVA, J.; SPINILLO, A. Como auxiliar crianças na resolução de problemas de raciocínio combinatório: a explicitação dos princípios invariantes. **Anais**... 13 Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM/IACME, Recife, Brasil.2011

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. Análise **Psicológica, 1**. 1986. p. 75-90.

VERGNAUD, Gérard. A Teoria dos Campos Conceptuais. In. BRUM, Jean, (org.) **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996.

JULIANA AZEVEDO é formada em Pedagogia pela Universidade Federal de Pernambuco - UFPE, Mestranda do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco. Foi Monitora durante a graduação e Estágio docência durante a pós-graduação das disciplinas Fundamentos do Ensino de Matemática 1 e 2. Integrante do GERAÇÃO - Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório coordenado pela Professora Doutora Rute Elizabete de Souza Rosa Borba. Pesquisa na área de Educação Matemática, principalmente nos seguintes temas: desenvolvimento conceitual (estruturas aditivas e multiplicativas, em particular o raciocínio combinatório, e o papel de significados, propriedades, relações e representações simbólicas).

RUTE ELIZABETE DE SOUZA ROSA BORBA possui Licenciatura em Matemática pela Universidade Federal Rural de Pernambuco (1985), Mestrado em Psicologia Cognitiva pela

Universidade Federal de Pernambuco (1993) e PhD pela Oxford Brookes University (2002). Atualmente é professora da Universidade Federal de Pernambuco. Na graduação ensina Fundamentos do Ensino de Matemática e Pesquisa e Prática Pedagógica. Na pós-graduação ensina Tópicos em Educação Matemática. Pesquisa e orienta estudos em Educação Matemática, atuando principalmente nos seguintes temas: desenvolvimento conceitual (estruturas aditivas e multiplicativas, em particular o raciocínio combinatório, e o papel de significados, propriedades, relações e representações simbólicas), análise de livros didáticos e formação de professores que ensinam Matemática.

Recebido: 08 de outubro de 2012
Aceito: 06 de dezembro de 2012