

Sentido de Realidad y Modelación Matemática: el caso de Alberto

JHONY ALEXANDER VILLA-OCHOA¹, CARLOS ALBERTO BUSTAMANTE QUITERO², MARIO DE JESÚS BERRIO ARBOLEDA², JESÚS ANIBAL OSORIO CASTAÑO², DIEGO ALEXANDER OCAMPO BEDOYA²

1. Candidato a Doctor en Educación (Matemática)-Grupo de Investigación en Educación Matemática e Historia (UdeA-Eafit). Universidad de Antioquia, javo@une.net.co

2. Licenciados en Educación Básica con énfasis en Matemáticas. Universidad de Antioquia-Seccional Suroeste; bustamantequintero@gmail.com; anibaloc86@gmail.com; marioberrio77@gmail.com; pirata0388@hotmail.com

Resumen: En este documento presentamos los resultados parciales que surgen de un estudio de casos desarrollado en la Universidad de Antioquia en el cual indagamos por el papel que desempeñado por la modelación matemática en las aulas escolares de una subregión antioqueña en Colombia. Al observar y analizar las formas en como un profesor describe su propio desempeño y sus formas de abordar las matemáticas escolares, pudimos determinar el papel que juegan las reflexiones y el “*sentido de realidad*” en la implementación de la modelación y las aplicaciones matemáticas como proceso al interior del aula.

Resumo: Neste artigo apresentamos os resultados que surgem de uma pesquisa de estudo de casos desenvolvido na Universidade de Antioquia. Indagamos pelo papel que a modelagem matemática tem na sala de aula em uma sub-região de Antioquia na Colômbia. Ao observar e analisar como os professores descrevem seu próprio desempenho e suas maneiras de trabalhar as matemáticas na sala de aula achamos o papel que tem as reflexões e o “*sentido de realidade*” na abordagem da modelagem matemática e as aplicações na sala de aula.

Abstract: In this paper we present the results derived from a case study developed at the University of Antioquia in which we inquire the role of mathematical modelling in the classrooms of a sub-region of Antioquia in Colombia. To observe and analyze how a teacher describes so his own performance and as his ways to address school mathematics, we could determine the role of reflections and the “*sense of reality*” in the implementation of mathematical modelling and applications as process in classroom.

Palabras clave: *sentido de realidad*, realidad, modelación matemática escolar, aplicaciones y modelación en Educación Matemática.

Palavras-chave: *sentido de realidade*, realidade, modelagem matemática na sala de aula, modelagem e aplicações na Educação Matemática.

Keywords: *sense of reality*, reality, mathematical modelling in the classroom, Applications and modelling in Mathematics Education.

INTRODUCCIÓN

Una de las áreas que mayor desarrollo ha tenido en las dos últimas décadas es el área de la *modelación matemática*. Tanto desde el punto de vista de las matemáticas aplicadas a las demás ciencias, como desde el punto de vista educativo, la modelación tiene fuertes vínculos con el estudio de situaciones y solución de los problemas del *mundo real*. En el caso de la Educación Matemática, los investigadores destinan parte de sus esfuerzos hacia el estudio de ese *mundo real*, sus vínculos con el conocimiento matemático y su aprovechamiento como recurso en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

En la literatura internacional, encontramos referenciados múltiples trabajos relativos a la modelación en Educación Matemática. Así por ejemplo, la gran cantidad de artículos teóricos y de investigación reportados en bases de datos como Springer.com, Scielo.com, Science online/AAAS, Emerald, E-library, Dialnet, Science Direct, EBSCO Host, JSTOR y Erick, en actas de eventos

académicos como CIAEM, RELME, PME, PME-NA, ICTMA; así como la conformación de redes, grupos de trabajo y comités internacionales como ICTMA, GTMM/SBEM, CREMM, HiMCM, entre otros, se convierten en evidencia del grado de desarrollo e institucionalización de la investigación en *modelación y las aplicaciones en educación matemática* a nivel internacional.

En el *ICMI Study 14* realizado en febrero de 2004, se determinaron algunos desarrollos y se proporcionaron algunas tendencias y perspectivas de investigación en *Applications and modelling in mathematics education* (BLUM et al., 2007). Con base en la publicación de los resultados de este estudio *ICMI*, y en las diversas fuentes mencionadas anteriormente, se pueden determinar las principales interpretaciones y tendencias investigativas en “aplicaciones y modelación en Educación Matemática” algunas de ellas son; la modelación y la formación inicial y continuada de profesores (DOERR y LESH, 2002; KOELLNER y LESH, 2002; SCHORR y LESH, 2002; McCLAIN, 2002; DOERR, 2006; 2007); aspectos conceptuales y epistemológicos relativos a la modelación y las aplicaciones (LESH y DOERR, 2002; LINGEFJÄRD, 2006; BLUM et al., 2007; LEHRER y SCHAUBLE, 2007; STRÄSSER, 2007), la modelación como una competencia y su relación con otras competencias matemáticas (MAAß, 2006; HENNING y KEUNE, 2007; GREER y VERSCHAFFEL, 2007), el desarrollo de la modelación a través del uso de herramientas tecnológicas (JOHNSON y LESH, 2002; SUÁREZ, 2008; TORRES et al., 2008), la implementación de la modelación como proceso y recurso en el aula de matemáticas (BASSANEZI, 2002; CROUCH y HAINES, 2004; BIEMBENGUT y HEIN, 2004; BORROMEO, 2006; BURKHARDT, 2006; BARBOSA, 2006; VILLA, 2007).

Contrario a los desarrollos a nivel internacional, la modelación matemática en la educación colombiana aún se encuentra en ciernes, ya que a pesar de que su inclusión en el aula de matemáticas se propuso desde 1998 con la presentación, por parte del Ministerio de Educación Nacional (MEN), del documento de los Lineamientos Curriculares, son diversas las fuentes que documentan la poca apropiación de estos elementos por parte de muchos profesores (AGUDELO-VALDERRAMA, 2006; VILLA et al., 2008). En este documento reportamos los hallazgos parciales de una investigación que indagó por el papel de la modelación en las aulas escolares de cuatro profesores de una subregión antioqueña en Colombia.

EL PROCESO DE MODELACIÓN MATEMÁTICA

El proceso de modelación matemática es considerado como una actividad científica en matemáticas que se involucra en la obtención de modelos propios de las demás ciencias. En los últimos años se han venido adelantando investigaciones (BASSANEZI, 2002; BIEMBENGUT y HEIN, 2004) que posibilitan la adaptación de esta actividad científica en la enseñanza de las

matemáticas, de tal manera que se convierta en estrategia didáctica para abordar conceptos matemáticos en el aula de clase. Para iniciar, precisaremos los términos en los cuales se han de entender los conceptos de modelo y modelación matemática en el desarrollo de este artículo.

Modelación matemática escolar

Comúnmente el término modelación se asocia a la actividad de construir modelos a partir de un problema o un fragmento de la realidad. Por su parte, el concepto de *Modelo Matemático* ha estado presente en muchos de los campos de las ciencias con las cuales las matemáticas tienen amplia relación. Al respecto se han planteado definiciones tales como:

- Se define un Modelo Matemático como una construcción matemática dirigida a estudiar un sistema o fenómeno particular del “mundo-real”. Este modelo puede incluir gráficas, símbolos, simulaciones y construcciones experimentales. (GIORDANO et al., 1997: 34)
- Un Modelo Matemático de un fenómeno o situación problema es un conjunto de símbolos y de relaciones matemáticas que representan, de alguna manera, el fenómeno en cuestión. (BIEMBENGUT y HEIN, 2004: 106)
- Se define como Modelo Matemático de un sistema prototipo S (físico, biológico, social, químico, etc.) a un completo y consistente sistema de ecuaciones matemáticas Σ , que es formulado para expresar las leyes de S y su solución intenta representar algún aspecto de su comportamiento. (RUTHERFORD, 1978: 5)
- Un modelo puede entenderse como un sistema figurativo mental, gráfico o tridimensional que reproduce o representa la realidad en forma esquemática para hacerla más comprensible. Es una construcción o artefacto material o mental, un sistema –a veces se dice también “una estructura”– que puede usarse como referencia para lo que se trata de comprender; una imagen analógica que permite volver cercana y concreta una idea o un concepto para su apropiación y manejo. (MEN, 2006: 52)

Estas definiciones de modelo hacen referencia, en gran medida, a la visión que se tiene de las matemáticas en relación con el *mundo real*. En términos de Villa (2007), existen diferencias entre las anteriores definiciones de acuerdo con la forma cómo se “materializa” matemáticamente dicha relación, es decir, en la forma de representación matemática del concepto o relación. La verdadera importancia de un modelo desde el punto de vista didáctico radica según Bassanezi (2002) en tener un lenguaje conciso que expresa nuestras ideas de manera clara y sin ambigüedades, además de proporcionar gran cantidad de resultados que propician el uso de

elementos computacionales para calcular sus soluciones numéricas. Por ello, llamamos simplemente modelo matemático, *a un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas que intentan explicar, predecir y solucionar algunos aspectos de un fenómeno o situación.*

Una buena modelación matemática involucra el establecimiento de relaciones entre mundo real y el mundo matemático y la habilidad para moverse entre cada uno de ellos (CROUCH y HAINES, 2004: 199). Sin embargo ¿Qué significado tiene el término *mundo real*? Esta pregunta evidencia una problemática epistemológica y filosófica que no pretendemos resolver en este artículo, sin embargo la discusión toma relevancia pues muchos trabajos justifican el uso de *situaciones artificiales* como situaciones de modelación basados en un entendimiento de la *realidad* como si fuera algo próximo o posible. (POSADA y VILLA, 2006).

Para Blum et al., (2007) el *mundo real* es entendido como todo aquello que tiene relación con la naturaleza, la sociedad o la cultura, incluyendo tanto lo referente a la vida cotidiana como a los temas escolares y universitarios y disciplinas curriculares diferentes de las matemáticas. Por su parte Alsina (2007: 88-90) presenta una clasificación de las diferentes realidades que con frecuencia se evocan en los contextos escolares. En la siguiente tabla se resumen los diferentes tipos de realidades presentadas en las matemáticas escolares las cuales, en su mayoría, no cumplen con el verdadero papel de la realidad en el contexto escolar, “*convirtiendo lo que debería ser una motivación para unas matemáticas activas en un artificio para consagrar unas matemáticas pasivas*” (ALSINA, 2007).

<i>TIPO DE REALIDAD</i>	<i>CARACTERÍSTICA</i>
Realidades falseadas y manipuladas	Son situaciones aparentemente realistas (al contar con palabras y datos de uso cotidiano) pero deformadas o cambiadas para poder dar lugar a ejercicios matemáticos rutinarios. Se trata de una preparación ad-hoc justificada por motivos pedagógicos.
Realidades inusuales	Son situaciones de carácter excepcional o muy poco frecuente que aparecen como si fueran cotidianas.
Realidades caducadas	Se trata de situaciones ya pasadas, en general irrepetibles, que algún día fueron de actualidad pero que el paso del tiempo ha hecho desaparecer. Para los estudiantes del siglo XXI son ya ficciones históricas.
Realidades lejanas	Están relacionadas con escenas de culturas alejadas, hechos exóticos, folklóricos y curiosos que en absoluto se identificarán con las realidades locales actuales.
Realidades ocultas	Se trata de hechos no observables directamente, sobre los que no hay ni intuición ni experiencia, que dan lugar a ejercicios formales o modelos cuyos resultados no pueden ser contrastados (medios de transporte que no existen, balanza que no puede fabricarse, inventos futuristas, etcétera).
Realidades no adecuadas	Son situaciones no adecuadas a la edad y circunstancias de los estudiantes, o no correctas pues pueden confundirlos u ofenderlos. En general, ni son positivas ni son interesantes.
Realidades inventadas	Se trata de realidades ficticias, maquilladas como situaciones aparentemente posibles. A menudo incluyen datos o medidas equivocadas, guiando, perversamente, a creencias falsas e induciendo más tarde a errores inadmisibles.

Tabla 1. Realidades en las clases de matemáticas (ALSINA, 2007)

Basados en algunas de estas realidades, muchos maestros e investigadores desarrollan situaciones y teorías con respecto a la modelación en las aulas de clase, lo cual en algunos casos, centra más la atención sobre el proceso de representación que en los procesos de experimentación que la modelación implica (POSADA y VILLA, 2006).

EL ESTUDIO

El contexto

En este estudio intervinieron cuatro profesores que se desempeñaban en diferentes niveles de instituciones educativas estatales. Los cuatro profesores eran licenciados en matemáticas y adicionalmente uno de ellos tenía título de posgrado a nivel de especialización en enseñanza de las matemáticas, ellos estaban ubicados en una subregión colombiana la cual tiene acceso a una de las

principales ciudades del país por viajes terrestres de aproximadamente 3.5 horas. Los cuatro profesores aceptaron voluntariamente participar de esta investigación después de haberse desempeñado como asesores de *práctica docente* de cuatro estudiantes de un programa de pregrado en Licenciatura en Educación con énfasis en Matemáticas de la misma subregión. Los profesores fueron observados en su ejercicio docente por los investigadores durante los meses de abril a junio de 2008, posteriormente se aplicó un cuestionario, se desarrolló una sesión de cinco horas en la cual se discutió acerca de los episodios preparados sobre la modelación y finalmente se les hizo una entrevista. Con base en los análisis de los datos obtenidos, establecimos algunas concepciones de los profesores frente a elementos propios del proceso de modelación (i.e. la realidad) las cuales determinan ciertas prácticas al interior de aula de clase.

Metodología

Este estudio puso especial atención a las formas cómo los profesores reconocen la importancia de la modelación en el aula de clase y las prácticas que pretenden implementarla en las matemáticas escolares. En tal sentido, adoptamos como método de investigación el ***estudio de casos*** el cual asumimos como el “*método empleado para estudiar a un individuo o una institución [en nuestro caso un fenómeno educativo] en un entorno o situación única y de una forma lo más intensa o detallada posible*” (SALKIND 1999: 211). Yin (2003) establece que un estudio de caso es una indagación empírica que investiga un fenómeno contemporáneo al interior de su contexto real de existencia, cuando los límites entre el fenómeno y el contexto no son claramente evidentes. De igual manera Hernández et al., (2006: 223) se apoya en los trabajos Mertens (2005) para afirmar que “[un estudio de caso] *constituye un método para aprender respecto a una instancia compleja, basado en un entendimiento comprehensivo de esta instancia como un “todo” y su contexto, mediante datos e información obtenidos por descripciones y análisis extensivos*”.

Registramos la información recogida a través de diferentes medios (audio, video, diarios de campo y otros registros escritos) para posteriormente organizarla y analizarla. Con base en los análisis logramos determinar algunas de las concepciones que los profesores tenían frente a la *realidad* y cómo dichas concepciones marcan directrices para abordar los procesos de modelación en las aulas escolares.

Para identificar las concepciones de los profesores sobre el tema en cuestión, centramos la atención en las verbalizaciones y ejemplificaciones que ofrecían frente al papel de los “problemas del mundo real” en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en un segundo lugar, en las confrontaciones con los diarios de campo, producto de las observaciones de las sesiones de aula y de los cuestionarios realizados.

RESULTADOS

En este artículo reportamos el caso de Alberto¹ quien era un profesor que tenía cerca de trece años de experiencia docente y se había desempeñado como profesor de matemáticas en diferentes grados de la Educación Básica y Media (estudiantes entre 11-18 años). La selección de este caso obedece al estrecho vínculo que se presenta entre las concepciones que el profesor tiene sobre la *realidad* y la forma como él se observa en el ejercicio de su práctica en lo relativo a la modelación, ya que según Agudelo-Valderrama, et al., (2007) necesitamos estudiar no simplemente las concepciones que los profesores tienen de las matemáticas y de su enseñanza, sino que también necesitamos estudiar las formas en cómo ellos observan su propia práctica de enseñanza.

Concepciones de Alberto acerca de la realidad.

Para Alberto *la realidad* es una propiedad de las situaciones externas a las matemáticas, pero que, de una u otra forma, trasciende la idea de revestir un concepto matemático en un contexto artificial (BASSANESI, 2002). Tampoco consiste en tratar de cotidianizar o simular algunas prácticas con el ánimo de usarlas en el aula de clase. Esta aserción se hace evidente en las verbalizaciones que Alberto ofreció, frente al enunciado “*Una familia de cuatro (4) personas ha invitado a tres (3) amigos a comer a su casa. ¿Cuántos puestos se pondrán en la mesa?*” (MEN, 1998: 78)

Yo pensaría que no [es real], que eso se dé o no se dé [...] mis chicos me dirían “no tenemos para uno, ahora para invitar, a tener para tres” Lo real, el lenguaje que ese utiliza, lo común a la realidad es lo que yo vivo o es lo que se puede dar [...]. Por ejemplo, [diez personas se encuentran y se saludan, ¿Cuántos saludos se dan?] para mí no es real, eso no se va a dar. Para mí una situación real, no es que sean vivenciales por él, sino que existan, que hablen del lenguaje que él conoce, que él ve, que él sí lo ha tocado y que lo puede hacer, pero no son situaciones reales o salidas de contexto. Esas situaciones son fuera de contexto o disimuladitas, y realmente todos los problemas que son planteados son por el mismo estilo, cruce un río, tiren una liana, calculen el ángulo, mida la distancia, en fin [...]. Que nosotros utilicemos situaciones reales para solucionar problemas, no. Más bien son situaciones del común, del lenguaje, eso tampoco justificaría para que sirven [las matemáticas].

¹ El nombre Alberto obedece a un seudónimo del profesor reportado en este caso.

De manera complementaria podemos observar cómo para Alberto, “*la realidad*” es una característica que deben tener las situaciones de manera tal, que tengan significado para los estudiantes, convirtiéndose así en una herramienta que al implementarse en el aula de clase, permite fundamentarle a los estudiantes la importancia de las matemáticas y una forma de responder a la pregunta cotidiana ¿Para qué sirven las matemáticas? Sin embargo la inclusión de dicha *realidad* a través de situaciones en el aula de clase, es un sueño que para Alberto es aún difícil de alcanzar. En el siguiente comentario, este profesor hace evidente su insatisfacción con los vínculos entre realidad y las matemáticas que él mismo ha presentado a sus estudiantes reiteradamente.

Pues frente a la pregunta [¿para qué me sirven las matemáticas?], yo llevo 13 años en esto [en la docencia], y la he encontrado un resto de veces y nunca he podido satisfacer, ¡yo! Nunca he encontrado, doy la respuesta que pienso que muchos daríamos pero yo no he quedado satisfecho con ella, no he podido ¿Qué sirva para todo? Yo no he encontrado que verdaderamente me sirva para todo.

La modelación en las prácticas de Alberto dentro del aula de clase

Vimos como para Alberto, *la realidad* en el aula de clase, es una forma de aplicar las matemáticas a contextos extraescolares. Sin embargo el uso de los “ejercicios de aplicación” como *realidades no adecuadas o realidades inventadas* (ALSINA, 2007) son los que frecuentemente se usan para establecer la relación entre las matemáticas y el *mundo real* sin que estos llenen las expectativas de Alberto como profesor. En este sentido, podemos observar en el siguiente fragmento cómo las relaciones entre la *realidad* y las matemáticas están permeadas más por las aplicaciones que por los procesos de modelación que interpretan esa *realidad*. En términos de Blum et al., (2007), entendemos las aplicaciones como una forma de ir de las matemáticas hacia el mundo extra-matemático, y recíprocamente la modelación la entendemos como una forma de ir del mundo real, a las matemáticas.

Yo soy profe, soy licenciado en matemáticas, y yo doy a veces a mis chicos de noveno, y les digo “hay que verlo porque hay que verlo” [los temas matemáticos], ¡yo!, ¡yo! Yo me siento en esa incapacidad, yo no le encuentro aplicación a todo, hay unas cositas que yo le puedo decir, si, que trigonometría, ley del seno y del coseno, si, vea topografía... se puede visualizar, construyamos no sé qué y pillemos [hallemos] el ángulo se puede ver, que geometría, si... la comética [barrilete], el ángulo, ... se puede ver. Hay cositas que yo le puedo mostrar a mis chicos, pero todo el contenido que traen Lineamientos Curriculares

[MEN, 1998] y hoy *Estándares Curriculares* [MEN, 2006] que nos llenan de contenidos nuestro plan de aula ¡grandísimo!

Evidenciamos entonces en Alberto un deseo fuerte de encontrar sólidos argumentos que justifiquen la importancia de las matemáticas a partir del establecimiento de relaciones entre *la realidad* y las matemáticas. Alberto considera que el hacer explícito las aplicaciones, es una forma de “convencer” a la gran mayoría de los estudiantes que muestran apatía por las matemáticas en la escuela.

[...] y encuentro, tres o cuatro que sé los hay [estudiantes], que disfrutan viéndolo a uno hacer cositas [procedimientos y algoritmos] pero la gran mayoría preguntan ¿por qué?, ¿cuándo lo voy a utilizar? [las matemáticas] por eso uno tiene que meterse en el cuento de encontrar relación porque la palabra que aparece allá [las matemáticas están en la naturaleza, en la caricatura presentada en el anexo 1],... los matemáticos antiguos, los pitagóricos encontraron esa relación, la vivieron y a partir de allí construyeron, quiere decir que [la matemática] sí está en la naturaleza, la belleza de los números si está allí; yo no la he encontrado, yo sé que es linda, yo sé que es bonita, pero yo no la he podido sacar o llevarla a mis chicos y ahí encuentro una razón fundamental de por qué para la mayoría de los chicos esto es una tortura [...].

Alberto tiene una fuerte convicción de que la naturaleza ha sido fuente de inspiración en la construcción de las matemáticas, sin embargo reclama que él aún no ha encontrado dichas “aplicaciones” pues su formación como docente se fundamentó más en el desarrollo formal y procedimental de las matemáticas que en bases fenomenológicas de las mismas. Se ratifica nuevamente la idea de que los ambientes generados por el profesor al interior de la clase son, en gran proporción, una réplica de las ideas y estrategias recibidas durante su formación. Alberto es consciente de la fuerte influencia que este tipo de prácticas tiene en la motivación y construcción del conocimiento de los estudiantes, al respecto afirma:

[...] pienso que nuestros chicos, a veces yo pienso que cuando salgo de una clasecita un día cualquiera, salgo más aburrido yo que ellos, viéndoles a ellos la apatía tan verraca [intensa], de ellos no, si yo no los muevo.... A mí me desarrolla [emociona] el tablero, y soy feliz haciendo mis algoritmos, mi educación fue esa... hago y hago, y los números me gustan, pero esa relación que allá se registra [en la caricatura, ver anexo 1] y que ellos se preguntan ¿por qué, por qué?, la tecnología sí, pero por qué, por qué, yo no he podido

pasar de los números binarios en computación, “se construyen con los números binarios 0 y 1 y ahora vamos para las bases”, yo no he podido pasar de allí. Yo pienso que la apatía que yo siento en mis chicos [estudiantes] a veces yo la justifico en mis clases de matemáticas desde allí. Yo tengo que dar unos contenidos que de pronto por desconocimiento, por ignorancia, no sé como relacionarlos con la vida. Entonces de pronto yo soy el culpable de que mis chicos (bueno parte y parte) [tengan apatía]

La carencia de argumentos frente a los cuales se puedan establecer relaciones entre las matemáticas y la realidad, representan para Alberto una causa de la apatía de los estudiantes frente a las matemáticas y se siente en gran medida responsable por este hecho. En ese sentido Alberto afirma que:

Para mí, yo soy ese profesor que está allí [en la caricatura], y yo la veo y si, cojo una hoja y muestro la forma geométrica que tiene la hoja, los árboles, cómo crece la población, crecimiento poblacional exponencial. [...] yo llegó hasta aquí, mis chicos van a la realidad y nada, puede que esté la relación que yo le enseñé pero mi forma de mostrársela no es para que él la visualice. Soy un convencido de que las relaciones están [en la realidad], pero al pasarlo aquí... [al aula de clase] pero el estudiante dice “el profe no me enseñó a descubrirla”. [...] que el estudiante pueda descubrirla, mmmm, mi gran reto está allí.

Con base en todos los elementos presentados, podemos establecer que Alberto es un profesor ‘de atribuciones principalmente internas’ (AGUDELO-VALDERRAMA et al., 2007) ya que desde la perspectiva del uso de la realidad en las matemáticas escolares, este profesor es consciente de la estrecha relación que ha existido entre las situaciones del *mundo real* y las matemáticas y por tanto valora el papel de dicha relación en la enseñanza de las matemáticas, de igual manera califica de insuficientes sus actuales estrategias para el establecimiento de vínculos entre las matemáticas y la realidad y cuestiona los “ejemplos” presentados por la mayoría de los libros de texto.

Aunque este profesor está preocupado porque sus alumnos vean en dónde se usan las matemáticas es consciente de sus limitaciones para ofrecer explicaciones coherentes e innovadoras frente a este asunto. El reconocimiento de dichas limitaciones se convierte en un motor que moviliza su deseo de aprender, prepararse, confrontar sus creencias, y compartir sus experiencias de manera tal que pueda ir construyendo nuevas visiones y alternativas frente a su trabajo escolar. De acuerdo con Alberto las aplicaciones de la matemática a la realidad son una forma de despertar el interés de los estudiantes, sin embargo consideramos que es necesario madurar la idea del

proceso contrario, es decir, ir de los fenómenos del mundo real a las matemáticas, de manera tal que se puedan llevar a efecto verdaderos procesos de modelación que posibiliten la construcción de conceptos matemáticos en el aula de clase.

DISCUSIÓN

Es claro para Alberto, que las situaciones reales abordadas en el aula de clase, deberían ir mas allá de una re-vestidura de conceptos en un contexto artificial, en el mismo sentido, muchas de las situaciones presentadas a partir de los libros de texto, intentan aproximarse a la realidad, pero en la mayoría de los casos, son demasiado simplificadas lo cual poco permite al profesor y a los estudiantes verdaderos procesos de indagación en la búsqueda de datos, en la determinación y simplificación de variables y regularidades. En este orden de ideas, es importante que consideremos que el papel de la *modelación* en el aula de clase debe permear la visión que los profesores tienen de la realidad social y cultural de su entorno; este hecho depende, en gran medida, de la capacidad de los docentes para la identificación de contextos reales para su abordaje. Así por ejemplo, al identificar *una empresa de la región* como una realidad objetiva (tiene oficinas, insumos, personas, ofrece servicios, etc) es necesario considerar las diferentes formas de aproximación de los individuos (estudiantes y profesores) a dicha realidad. En otras palabras, dicha empresa también es una *realidad subjetiva* que involucra diversas realidades, es decir, los profesores y estudiantes al igual que las demás personas del medio, presentan diversas formas de interacción y por tanto construyen significados distintos a partir de experiencias únicas.

Repetidamente se valora en la literatura la importancia de que el profesor reflexione sobre lo que sucede en el aula y que preste atención a las necesidades de todos los alumnos como una condición implicada en la transformación de sus prácticas al interior del aula. Sin embargo, para el caso de Alberto, es posible establecer dicha reflexión como una condición necesaria, pero desde la perspectiva de la modelación y las aplicaciones como una herramienta que permite una aproximación a la realidad social, no es una condición suficiente. Por tal razón consideramos que se hace necesario potenciar el desarrollo de un **“Sentido de realidad”**, el cual entendemos como *la sensibilidad que un profesor debe tener frente a la realidad, que además incluye la intuición y la capacidad de detectar las situaciones y oportunidades del contexto sociocultural frente a las cuales se pueda movilizar el conocimiento de los estudiantes, dicho sentido incluye una buena dosis de imaginación y creatividad*. El *sentido de realidad*, más que una componente racional del conocimiento del profesor, es una componente subjetiva que metafóricamente actúa como una lupa

con la cual el profesor observa la *realidad objetiva* y le posibilita la (re)significación de dicha realidad a partir de un proceso de modelación matemática.

Con base en todo lo anterior, consideramos que al abordar situaciones reales del contexto sociocultural al interior del aula de clase, la modelación se convierte en una herramienta que permite (re)significar dichos contextos. Pero además de esto, pensamos que la modelación debe avanzar hacia la noción de *práctica que incluye (re)elaboración e interpretación de modelos ya construidos*. En consecuencia, los *problemas* deben asumirse como *problemas en contextos reales*; entendiendo por *contextos reales* aquellos contextos cotidianos, sociales, culturales, de consumo o de otras ciencias; en los cuales los estudiantes se ven enfrentados a la identificación y manipulación de datos, a la simplificación y abstracción de cantidades y variables con miras a la construcción del modelo para su resolución.

Desde la anterior perspectiva, *el sentido de realidad* aunado con la *reflexión sobre la práctica y el conocimiento de las necesidades de los estudiantes* debe posibilitar una valoración sobre las *realidades escolares* (ALSINA, 2007) y promover la implementación de otras realidades más cercanas a la cotidianidad del entorno sociocultural de los estudiantes. De esta forma, se pueden privilegiar en primera instancia la “*realidad cercana o tangible*” (i.e. situación de modelación presentada en el anexo 2) que al hacer parte de los contextos de los estudiantes, trasciende la idea de los *contextos posibles* para ubicarse en verdaderos problemas que posibiliten al estudiante posicionarse de manera crítica frente algunas demandas de la sociedad (i.e el consumo). Es ésta una manera de cumplir una de las funciones sociales de la modelación en las matemáticas escolares, pues por medio del “*sentido de realidad*” la modelación no sólo se encarga de la interpretación y de la solución de problemas de la realidad, sino que también promueve su transformación (realidad subjetiva) al (re)significar dicha la realidad (objetiva).

CONCLUSIONES

El estudio de este caso, demuestra que aunque existen profesores con una fuerte convicción positiva del trabajo del aula y con sólidas actitudes favorables al cambio (AGUDELO-VALDERRAMA et al., 2007), es necesario el desarrollo de un *sentido de realidad* lo cual posibilita al profesor una manera de establecer relaciones entre el contexto sociocultural y las matemáticas escolares. Por tanto “reflexionar sobre lo que sucede en el aula y prestar atención a las necesidades de todos los alumnos” son condiciones necesarias dentro del proceso de formación de algunos maestros; sin embargo, en el caso de la modelación y las aplicaciones como una componente próxima al contexto sociocultural, no son condiciones suficientes. ■

Este estudio de caso, pone de relieve, la importancia de la reflexión sobre la *realidad* como una componente cercana al contexto sociocultural de los estudiantes; así mismo evidencia la importancia de una concepción de realidad que trascienda las diferentes realidades escolares (ALSINA, 2007) para ofrecer a los estudiantes mayores aproximaciones al establecimiento de relaciones entre las matemáticas y el mundo real.

De este estudio se generan ciertas implicaciones para los programas de formación inicial y continuada de profesores, pues el caso de Alberto, pone en evidencia la necesidad de reflexión sobre el contexto sociocultural con miras a potenciar el desarrollo del *sentido de realidad*, lo cual demanda serios procesos investigativos que deben indagar por diversos aspectos, entre ellos:

- Las formas como el profesor interpreta la realidad.
- Las formas como el profesor piensa que una situación “armoniza” el contexto escolar.
- La forma como el profesor considera que una situación se “acomoda” o se ajusta hacia la realidad escolar.
- El nivel de comodidad y apropiación que el profesor tenga sobre el contexto sociocultural.
- La “racionalidad” que el profesor le imprima al fenómeno en relación con el concepto a construir.
- El nivel de “entrenamiento” que el profesor posea frente al proceso de modelación.

Consideramos que aunque estos criterios pueden ser juzgados como “poco racionales”, afectan la toma de decisiones y la apropiación de una situación o fenómeno del contexto sociocultural. Finalmente consideramos que con solo despertar un “*sentido de realidad*” no se logra una transformación de las condiciones del aula de matemáticas, pero sin dicho sentido se corre el riesgo de quedarse en un modelo transmisionista del conocimiento, que desconoce las herramientas que ofrece el contexto sociocultural para la construcción del conocimiento matemático escolar.

Agradecimientos

A la Dirección de Regionalización y al Comité para el Desarrollo de la Investigación (CODI) de la Universidad de Antioquia, por la financiación de este proyecto mediante acta N. 559 de febrero de 2008. A la Red colombiana de modelación en Educación matemática (Recomem), a los doctores Carlos Mario Jaramillo y Pedro Vicente Esteban por sus valiosos aportes en la revisión crítica de este trabajo; al grupo FORDAD y al Departamento Administrativo de Ciencia, Tecnología e

Innovación (Colciencias) por el apoyo a este trabajo mediante la beca “Créditos Condonables” para estudiantes de doctorado 2007.

BIBLIOGRAFÍA

AGUDELO-VALDERRAMA, C. The growing gap between colombian education policy, official claims and classroom realities: Insights from mathematics teachers' conceptions of beginning algebra and its teaching purpose. *International Journal of Science and Mathematics Education*, n. 4, p. 513-544, 2006.

AGUDELO-VALDERRAMA, C.; CLARKE, B.; BISHOP, A. Explanations of attitudes to change: Colombian mathematics teachers' conceptions of the crucial determinants of their teaching practices of beginning algebra. *Journal of Mathematics Teacher Education*, n. 10, p. 69-93, 2007.

ALSINA, C. Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? *Revista Iberoamericana de Educación*, n. 43, p. 85-101, 2007. Disponible en <<http://www.rieoei.org/rie43a04.htm>> último acceso en: 19 may. 2008.

BARBOSA, J. C. Mathematical modelling in classroom: a critical and discursive perspective. *ZDM*, v. 38, n. 3, p. 293-301, 2006.

BASSANEZI, R. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. São Paulo: Contexto, 2002.

BIEMBENGUT, M.; HEIN, N. Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación Matemática*, v. 16, n.002, p.105-125, 2004.

BLUM, W., GALBRAITH, P. L., HENN, H.-W.; NISS, M. (Org.). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study*. New York: Springer, 2007.

BORROMEO, R. Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, v. 38, n. 2, p. 86-95, 2006.

BURKHARDT, H. Modelling in mathematics classrooms: reflections on past developments and the future. *ZDM*, v. 38, n.2, p.178-195, 2006.

CROUCH, J.; HAINES, C. Mathematical modelling: transitions between the real world and the mathematical model. *International Journal of Mathematical Education in Science & Technology*, v.35, n. 2, p.197-206, 2004.

DOERR, H. M. Teachers' ways of listening and responding to students' emerging mathematical models. *ZDM*, v. 38, n.3, p.255-268, 2006.

DOERR, H. M. What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? In W. BLUM, P. GALBRAITH, H.-W. HENN; M. NISS (Org.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*. New York: Springer, 2007. p. 69-78.

DOERR, H. M.; LESH, R. A modeling perspective on teacher development. In ., R. LESH; H. M. DOERR (Org.), *Beyond constructivism. Models and modeling perspectives en mathematics*

problem solving, learning, and teaching. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2002. p. 125-139.

GIORDANO, F., WEIR, M.; FOX, W. *A first Course in Mathematical Modelling*. Brooks/Cole Publishing Company. 1997.

GREER, B.; VERSCHAFFEL, L. Modelling competencies-overview. In W. BLUM, P. GALBRAITH, H.-W. HENN; M. NISS (Org.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*. New York: Springer, 2007. p. 219-224.

HERNÁNDEZ S.; FERNANDEZ, C, BAPTISTA, P. *Metodología de la investigación*. México: Mc Graw Hill. 2006.

HENNING, H.; KEUNE, M. Levels of modelling competencies. In W. BLUM, P. GALBRAITH, H.-W. HENN; M. NISS (Org), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*. New York: Springer, 2007. p. 225-232.

JOHNSON, T.; LESH, R. A models and modeling perspective on technology-based representational media. In R. LESH; H. M. DOERR (Org.), *Beyond constructivis. Models and modeling perspectives en mathematics problem solving, learning, and teaching*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2002. p. 265-277.

KOELLNER, K.; LESH, R. A modeling approach to describe teacher knowledge. In R. LESH; H. M. DOERR (Org.), *Beyond constructivism. Models and modeling perspectives en mathematics problem solving, learning, and teaching*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2002. p. 159-174.

LEHRER, R.; SCHAUBLE, L. A developmental approach for supporting the epistemology of modelling. IN W. BLUM, P. L. GALBRAITH, H.-W. HENN; M. NISS (Org.), *Modelling and aplicaciones in mathematics education: The 14th ICMI study (New ICMI Study Series, Vol 10*. New York: Springer, 2007. p. 153-159.

LESH, R.; DOERR, H. M. Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, an problem solving. In R. LESH; H. M. DOERR (Org.), *Beyond constructivis. Models and modeling perspectives en mathematics problem solving, learning, and teaching*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2002. p. 3-33.

LINGEFJÄRD, T. Faces of mathematical modeling. *ZDM*, v.38, n. 2, p.96-112, 2006.

MAAß, K. What are modelling competencies? *ZDM*, v.38, n.2, p.113-142, 2006.

McCLAIN, K. Task-analysis cycles as tools for supporting students' mathematical development. IN R. LESH; H. M. DOERR (Org.), *Beyond constructivis. Models and modeling perspectives en mathematics problem solving, learning, and teaching*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2002. p. 175-189.

MEN (Ministerio de Educación Nacional). *Estándares básicos de competencias*. Bogotá: Magisterio, 2006.

MEN (Ministerio de Educación Nacional). *Lineamientos Curriculares: Matemáticas*. Bogotá: Magisterio, 1998.

POSADA, F.; VILLA, J. A. *Propuesta didáctica de aproximación al concepto de función lineal desde una perspectiva variacional*. Tesis de Maestría en Educación Matemática – Universidad de Antioquia, Medellín. 2006.

RUTHERFORD, A. *Mathematical Modelling Techniques*. New York: Dover Publications, INC., 1978.

SALKIND, N. *Métodos de investigación*. México: Prentice Hall, 1999.

SCHORR, R. Y.; LESH, R. A modeling approach for providing teacher development. In R. LESH; H. M. DOERR (Org.), *Beyond constructivism. Models and modeling perspectives in mathematics problem solving, learning, and teaching*. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates, 2002. p. 125-140.

STRÄSSER, R. Everyday instruments: On the use of mathematics. In W. BLUM, P. L. GALBRAITH, H.-W. HENN; M. NISS (Org.), *Modelling and Applications in Mathematics Education: The 14th ICMI Study*. New York: Springer, 2007. p. 171-178.

SUÁREZ, L. *Modelación – Graficación, una categoría para la Matemática Escolar. Resultados de un estudio socioepistemológico*. Tesis de Doctorado en Ciencias: especialidad Matemática Educativa -CINVESTAV-IPN, México D.F, 2008.

TORRES, T.; COUTINHO, C.; FERNANDES, J.. Aplicações e Modelação Matemática com recurso à calculadora gráfica e sensores. *Unión. Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, n. 15, p. 9-32, 2008.

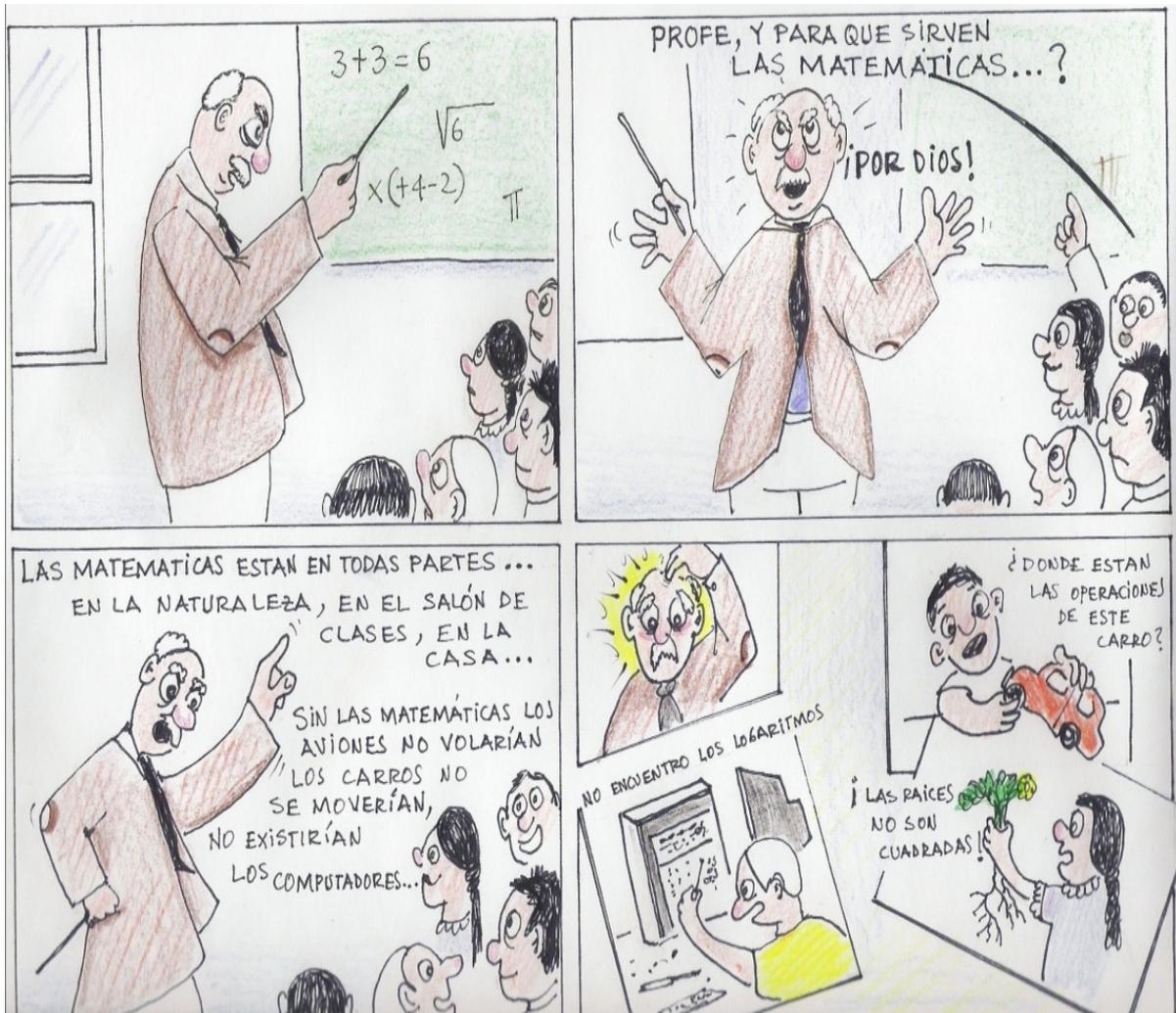
VILLA, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas* , n. 19, p. 51-81.

VILLA, J. A.; BUSTAMANTE, C. A.; BERRIO, M.; OSORIO, A.; OCAMPO, D. *El proceso de modelación matemática en las aulas escolares. A propósito de los 10 años de su inclusión en los Lineamientos Curriculares colombianos*. In: NOVENO ENCUENTRO COLOMBIANO DE MATEMATICA EDUCATIVA. 2008, Garcia. *Memorias del Noveno encuentro colombiano de matemática educativa*, 2008. CD -ROM.

YIN, R. *Case study research: Design and methods*. Thousand Oaks: Sage Publications, Inc., 2003.

ANEXO1. EPISODIO: La Caricatura.

La caricatura fue ideada por los autores del artículo con el ánimo de discutir con los profesores de la investigación el papel que tiene la modelación en las aulas escolares.



ANEXO 2. EPISODIO: Diseño de una situación por parte de un maestro:

A continuación se describe una situación diseñada por un profesor la cual sirvió como episodio para indagar las concepciones de los maestros frente a la realidad y la modelación



Universidad de Antioquia
Grupo de Investigación en Educación Matemática e Historia
(UdeA-Eafit)

Proyecto “El proceso de modelación en las aulas escolares del suroeste antioqueño”

Diseño de una situación de clase por parte de un maestro: Adquisición de un plan de internet

La siguiente situación fue elaborada por un maestro de grado noveno, con el ánimo de introducir el tema de las funciones lineales. La redacción se encuentra en primera persona, pues es el maestro quien narra su propuesta.

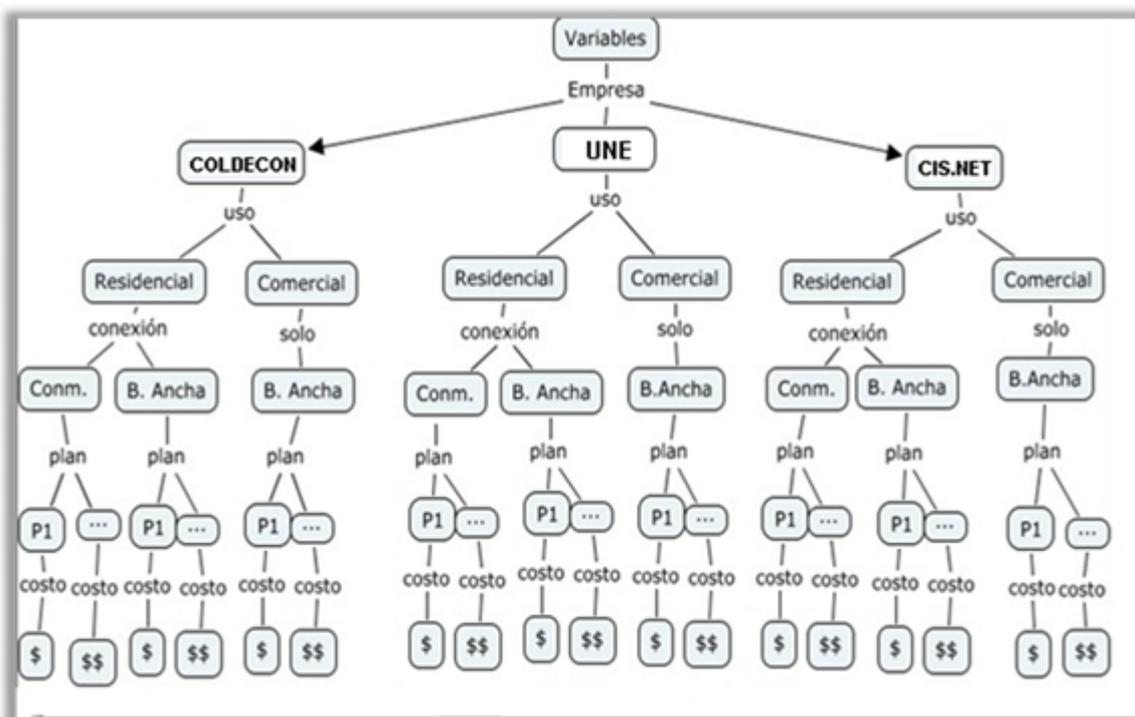
Diseño de la situación

Con el ánimo de abordar el estudio de las funciones, propongo implementar un problema de modelación a partir de una situación de consumo. El enunciado de problema que propondría a mis estudiantes sería el siguiente:

Se desea adquirir un plan de acceso a Internet, para ello es necesario buscar entre las diferentes propuestas de los proveedores para la ciudad, aquella que mejor se ajuste a las necesidades. ¿Cuál de las propuestas existentes en el mercado será la más conveniente para las diversas necesidades de los compañeros del grupo?

Una vez el problema sea planteado, les sugiero a los estudiantes que indaguen en los diferentes medios de comunicación y publicitarios (Tv. Radio, internet, periódico) las empresas que ofrecen el servicio y sus respectivos y planes, realizaré una discusión sobre los diferentes elementos encontrados, por ejemplo, las variables que intervienen.

Antes de proponerles la situación a mis estudiantes, yo había realizado una consulta previa y había encontrado que en Medellín, existían tres empresas diferentes, con dos tipos de uso, dos formas de conexión, y diferentes planes. Con base en toda información organicé un diagrama que muestra las relaciones entre las variables encontradas. (Ver el siguiente diagrama)



Por tanto, una vez que los estudiantes recojan la información de las diferentes empresas en su medio, promoveré una discusión en las cuales se identifiquen las diferentes variables del problema y en conjunto realizaremos un diagrama semejante al realizado anteriormente.

Para el trabajo de clase, propondría que los estudiantes se organizaran en subgrupos y abordaran la construcción de modelos de acuerdo a las variables del problema. Por ejemplo, un subgrupo abordaría el consumo residencial de la empresa CIS, otro el consumo comercial, y así cada subgrupo abordaría un componente de las demás empresas que resulten.

En la información previa que había consultado, encontré que para el uso residencial conmutado de la empresa UNE existe la siguiente información:

Beneficios	Planes
<ul style="list-style-type: none"> * Velocidad de 56 kbps * 1 Login * 1 Cuenta de correo * Acceso remoto al correo * Cobertura 9 ciudades * Roaming Internacional 	<ul style="list-style-type: none"> ▫ Iniciaidores (5 horas) Precio: *\$ 7.500 ▫ Plan A (20 horas) Precio: *\$ 16.500 ▫ Plan Ilimitado Precio: *\$ 27.000 <p><i>El valor de la hora adicional es de \$1.300. La fracción de hora se cobra proporcional al valor de la hora</i></p> <p>* Estos precios no incluyen IVA</p>

Para ayudarles a los estudiantes a la construcción del modelo, promoveré la identificación de regularidades entre las variables a partir de un conjunto de preguntas como:

- 1- ¿Cuánto pagaría una persona por consumir 8 horas en cada uno de los tres planes?
- 2- Si una persona dispusiera de \$10.000, ¿cuánto tiempo podría navegar en el plan *iniciadores*?
- 3- Con base en la información de los planes llene la siguiente tabla.

Número de horas consumidas	Costo del consumo en el plan: <i>Iniciadores</i>	Costo del consumo en el plan: <i>Plan A</i>	Costo del consumo en el plan: <i>Ilimitado</i>
2			
4			
6			
	\$ 11.400		
10			
	\$ 15.300		
15			
	\$ 24.400		
20			
		\$ 24.300	
		\$ 26.900	
29			
		\$ 30.800	
	\$ 53.000		
		\$ 54.200	

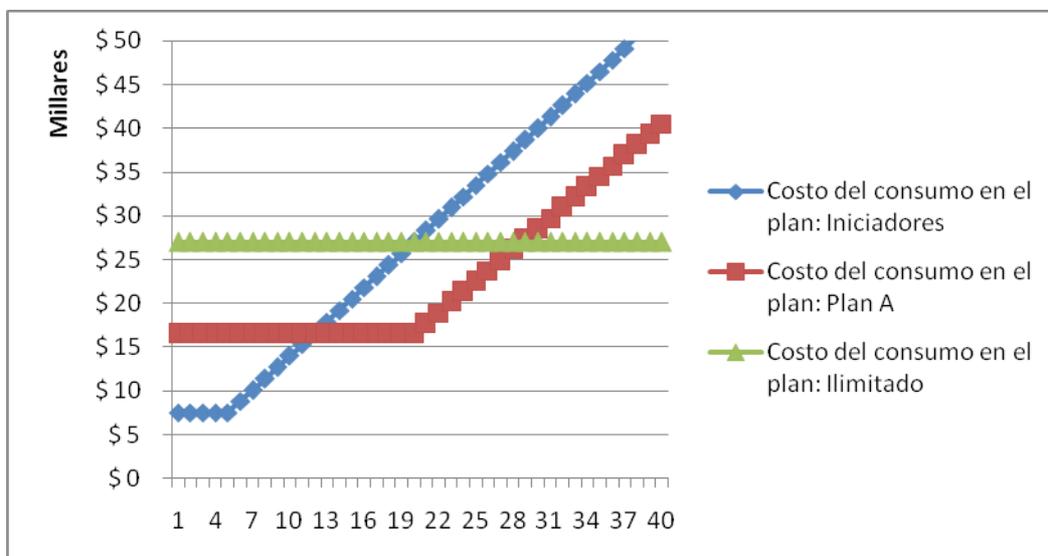
Describe la relación que existe entre:

- 4- El número de horas consumidas y el costo del consumo en el plan *iniciadores*
- 5- El número de horas consumidas y el costo del consumo en el plan A.
- 6- El número de horas consumidas y el costo del consumo en el plan *Ilimitado*.

Considero que con estas preguntas y el análisis de la tabla el estudiante podrá inferir las relaciones matemáticas entre las variables *costo* y *consumo* en cada plan. Inicialmente esa inferencia será expresada verbalmente, pero en un segundo momento, propondré que la relación entre las magnitudes sea expresada mediante otros sistemas de representación, tales como el gráfico y el simbólico. De igual manera, la situación exige al estudiante tener cierto control sobre las variables (magnitudes), de tal forma que, a través de su análisis, pueda anticipar condiciones favorables o desfavorables para los consumidores de Internet, con base en las condiciones generales del problema.

En esta parte de la situación se pone en claro la capacidad de los estudiantes para comunicar conceptos matemáticos, lo cual se hace evidente en los diferentes usos del lenguaje y los diferentes formas de representación.

Entre las representaciones que espero que los estudiantes construyan se tienen:



$$C(x) = \begin{cases} 7.500 & \text{si } x \leq 5 \\ 7.500 + 1300(x - 5) & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

$$C(x) = \begin{cases} 16.500 & \text{si } x \leq 20 \\ 16.500 + 1300(x - 20) & \text{si } x > 20 \end{cases}$$

$$C(x) = 27.000$$

Con base en todas las construcciones de los estudiantes les propondré una discusión y la confrontación de los diferentes resultados. Finalmente les sugeriré que realicen predicciones del plan que más convenga de acuerdo con las necesidades de algunos miembros del grupo y/ o personas externas al mismo, de tal manera que ejecuten las conclusiones que ofrece el modelo y puedan confrontar los resultados del modelo con la situación. De la misma forma, les sugeriré que soliciten entrevistas con asesores comerciales de las empresas u otros especialistas en el tema. La confrontación de los datos experimentales con los datos arrojados por los modelos que van emergiendo durante el proceso se convierte en un elemento clave que permite ir justificando y modificando las propuestas de dichos modelos emergentes.

Jhony Alexander Villa- Ochoa: Es licenciado en Matemáticas y Física (1998), Especialista en Enseñanza de las matemáticas (2001), Magíster en Educación Matemática (2006) y actualmente es candidato a Doctor en Educación (Matemática) de la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia en Medellín- Colombia. Ha sido profesor de Programa de Educación de Adultos del ITM y de la Universidad de Antioquia en las áreas de matemáticas y Educación Matemática. Realiza investigaciones en torno a la modelación matemática y al desarrollo del pensamiento variacional. Coordinador de la red colombiana de modelación en Educación Matemática (RECOMEM) y del grupo Formación y Didáctica para Adultos-Fordad

Carlos Alberto Bustamante Quintero, Mario de Jesús Berrio Arboleda, Jesús Anibal Osorio Castaño, Diego Alexander Ocampo Bedoya: Son licenciados en Educación Básica con énfasis en Matemáticas de la Universidad de Antioquia, seccional Suroeste. Co-investigadores en modelación en Educación Matemática; miembros de la Red colombiana de modelación en Educación Matemática con acceso a través de www.recomem.com