

Anamorfose no Ensino de Geometria

SIMONE SEMMER¹, SANI DE CARVALHO RUTZ DA SILVA² e MARCOS CESAR DANHONI NEVES³

Universidade Tecnológica Federal do Paraná – UTFPR Ponta Grossa - Pr

¹sani@utfpr.edu.com.br, ²simone.semmer@gmail.com, ³macedane@yahoo.com

RESUMO. Para o estudo de Geometria Espacial, no Ensino Médio, são necessários desenhos de figuras geométricas em sua tridimensionalidade. Ao desenhá-las, ocorre anamorfose de faces, arestas e vértices. Por intermédio de fotografias e grades anamórficas, buscou-se, nesta pesquisa, uma conexão entre Geometria Projetiva e Geometria Espacial. Neste artigo, relatam-se as experiências sob o ponto de vista do professor e dos alunos, sendo que a composição das imagens necessitou de experimentação, análise e validação de resultados. Por meio de uma sequência de atividades, que envolveu técnicas e conceitos de perspectiva e visualização, foi possível vislumbrar a anamorfose como uma ferramenta necessária para auxiliar a aprendizagem de geometria na escola.

ABSTRACT. To study Spatial Geometry, in the High School, it is necessary to make drawings of geometric figures in a tridimensional way. In this process we have anamorphosis of faces, edges and vertices. Using photographs and an anamorphic grid, we tried, to study, a connection between projective geometry and spatial geometry. In this paper, we report the experiences from the point of view of the teacher and the students, using a composition of images derived of a process of experimentation, analysis and validation of results. Using a sequence of activities involving techniques and concepts and perspective and viewing, it was possible to discern anamorphosis and its understanding as a necessary tool to assist the learning of geometries in the school.

Palavras-chave: Anamorfose, Geometria Espacial, Geometria Projetiva, fotografias.

Keywords: Anamorphosis, Spatial Geometry, Projective Geometry, photographs.

Introdução

O que há em comum entre o estudo de poliedros no Ensino Médio e uma composição de arte urbana de Julian Beever? Essa questão pode ser respondida com apenas uma palavra: anamorfose. Num sentido mais amplo, poder-se-ia afirmar: a conexão de Matemática com Arte.

Para entender o que significa anamorfose e sua relação com Matemática e Arte, é necessário observar e compreender representações gráficas, ditas semióticas, como as da figura 1, em que uma composição de Beever foi fotografada sob dois pontos de vista.



Figura 1 – *Anamorphic illusions drawn* - Julian Beever.
(Fonte: <http://liz.petree.tripod.com/final/index.html>)

Na primeira imagem, o observador consegue ver a tridimensionalidade do desenho, reconhecendo, por meio de sua forma arredondada, uma aproximação com o planeta Terra. Já na segunda imagem, o observador, que se encontra num outro ponto de visão, visualiza o desenho na sua forma elíptica, como se o formato da Terra estivesse esticado ao chão.

Nesse mesmo sentido, ao visualizar um poliedro, mais precisamente um modelo de dodecaedro regular confeccionado em acrílico, e registrá-lo em fotografias (figura 2), nelas se pode observar que, apesar de ser o mesmo poliedro de faces pentagonais, as fotografias o expõem, sob diferentes ângulos de visão e, conseqüentemente, suas faces adquirem formatos diferentes, mas não deixam de representar pentágonos.

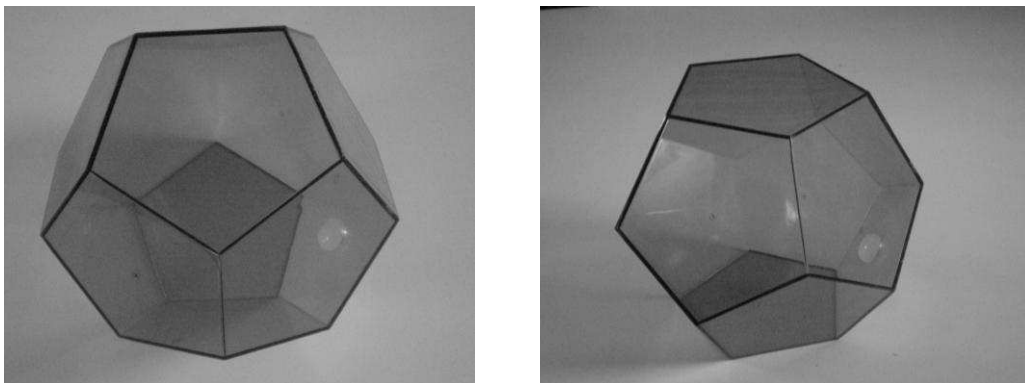


Figura 2 – Fotografias de dodecaedro regular.
(Fonte: Acervo do autor)

Cabe lembrar que num dodecaedro regular, todas as doze faces possuem arestas e ângulos congruentes, no entanto, não é o que se visualiza nas fotografias do dodecaedro, na figura 2, as faces não deixam de ser pentágonos, mas, se visualizam como não regulares.

Assim como as faces do poliedro possuem a mesma forma geométrica (pentágono regular), o desenho de Beever, ao longo da calçada, é o mesmo. O que se modifica, nas imagens, é o ângulo da fotografia, nesse caso, o ponto de observação do fotógrafo.

Ou seja, uma composição de arte urbana, realizada sobre calçada ou rua, poderá ser reconhecida pelo observador, se seu ângulo de visão for o mesmo do artista que a compôs. Da mesma forma, um poliedro poderá ser reconhecido não somente pela sua visualização, mas pelas propriedades geométricas que possui. Então, entende-se que o reconhecimento das propriedades que envolvem uma imagem precisa relacionar o que se visualiza com o que se sabe sobre ela.

Semelhantemente, ao desenhar poliedros sobre o papel, torna-se necessária sua observação sob um ponto de vista, pois, no desenho ocorrem distorções no contorno das faces desse objeto e não há como registrar todas as faces com suas reais medidas, incidindo em anamorfozes. Trata-se de uma representação semiótica em perspectiva.

O reconhecimento de uma representação gráfica e as propriedades das figuras envolvidas, suas interpretações, emergem do conhecimento que se tem sobre elas, necessitando-se, portanto, compreender suas linguagens e, nesse caso, em representações semióticas, diferenciar desenho de figura. Para tanto, ao ensinar um conteúdo, Duval (2009) sugere que sejam utilizados pelo menos dois registros de representação semiótica diferentes, como os dois que estão representados na figura 3 (representação semiótica em perspectiva 3D/2D e planificação de poliedro).

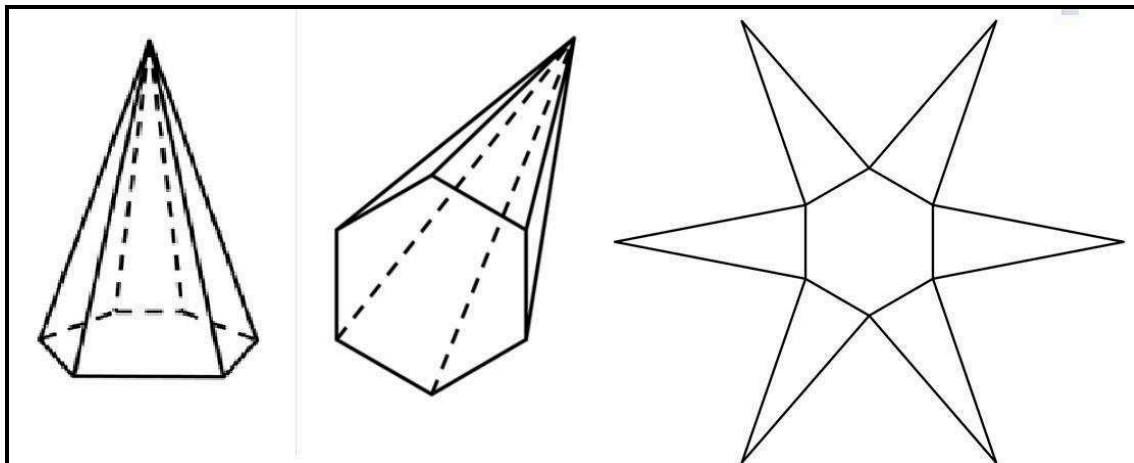


Figura 3 – Registros de representação semiótica de pirâmide hexagonal regular: representação semiótica em perspectiva 3D/2D e planificação de poliedro.
(Fonte: Acervo do autor)

O reconhecimento de sólidos geométricos e suas planificações por estudantes nem sempre são imediatos, principalmente quando se encontram desenhados sobre o papel. Em particular, isso foi verificado, quando se trabalhou com alunos do Ensino Médio de uma escola pública, sujeitos desta investigação, em análise realizada por meio de pesquisa diagnóstica, 18% dos estudantes não reconheceram o desenho tridimensional de sólidos geométricos com sua

respectiva planificação. Essa comprovação indicou que esses estudantes apresentavam dificuldades no reconhecimento de figuras geométricas e, conseqüentemente, poderiam apresentar dificuldades com as propriedades dessas figuras, podendo comprometer o cálculo de áreas, volumes e outros elementos geométricos no trato com a Geometria Espacial.

Para Duval (2011), o reconhecimento das propriedades de superfícies e faces de sólidos geométricos tanto pode facilitar a compreensão de um problema matemático como dificultá-lo, pois os registros de representação semiótica se referem a significados, a concepções e a comunicações de ideias mentais (DUVAL, 2003, 2009).

Objetos matemáticos, segundo esse autor (2012, p. 268), “não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata”, como estão os objetos reais. É preciso saber representá-los. Duval complementa que “a distinção entre um objeto e sua representação é, [...] um ponto estratégico para a compreensão da Matemática” (idem, p. 268).

Há aí um paradoxo: não se pode ter compreensão em Matemática, se não houver distinção entre um objeto e sua representação e, ao mesmo tempo, é por meio (de pelo menos duas) representações semióticas, que se podem compreender objetos matemáticos (DUVAL, 2009, 2012).

Assim, compreende-se que ao fotografar um modelo de sólido geométrico, este fica registrado sob um ponto de vista. Pode-se, então, comparar o objeto real, o modelo tridimensional com o registro fotográfico e compor seu molde, realizando uma construção geométrica. A partir disso, reconhecer e comprovar propriedades das arestas, faces e vértices, bem como visualizar sua representação gráfica, a procura dessas propriedades. Estes processos cognitivos (visualização, construção e raciocínio), quando integrados, segundo Duval (2009), favorecem o pensamento matemático.

Afirma ainda esse autor (2009), que apreensão ou produção de uma representação semiótica é chamada *semiósis* e a apreensão conceitual de um objeto é denominada *noésis*. E reafirma: “Não há *noésis* sem *semiósis*, é a *semiósis* que determina as condições de possibilidade e do exercício da *noésis*” (idem, p. 17). Isto é, a aprendizagem de um conceito matemático depende da apreensão ou produção de sua representação semiótica.

Ou seja, um objeto de estudo da Geometria Espacial - um poliedro - precisa do reconhecimento de um conteúdo de Geometria Projetiva - a perspectiva. Todavia, perspectiva é, também, conteúdo de Arte, isto é, uma conexão de Matemática e Arte.

No ensino de Arte, a partir da análise de uma imagem, pode-se questionar sobre como foi realizada, em que tempo, lugar e circunstâncias, e ainda, realizar uma composição semelhante, baseada nas imagens. Ao realizar tudo isso, se estará realizando uma abordagem triangular (BARBOSA, 2005), em que a arte é vista não somente como expressão, mas como objeto do conhecimento, como desenvolvimento cultural, cujo ensino exige mais que desenhar, pintar ou modelar, exige a estimulação da alfabetização do olhar. Segundo essa autora, “o conhecimento em artes se dá na interseção da experimentação, da decodificação e da informação” (idem, 2005, p. 32).

No âmbito de pesquisas e publicações, nas quais as relações entre Matemática e Arte estão inseridas, podem-se citar: Joly (2002); Barth (2006), Fainguelernt e Nunes (2006); Flores (2007, 2012); Serenato (2008); Wagner (2012), entre outros. Entretanto, Santos e Teles (2012) categorizaram dados de sua pesquisa envolvendo simetria, baseando-se em três campos de conhecimento – a leitura de imagens, a contextualização e o fazer artístico –, e, corroboram, ao aliar Matemática e Arte usando também as concepções da abordagem triangular.

Nessa abordagem, ao ler obras de arte, realiza-se análise de imagem, decodificando-as. Essa decodificação, segundo Barbosa (2005, p. 37), “envolve análise crítica da materialidade da obra e princípios estéticos ou semiológicos, ou gestálticos ou iconográficos”. A leitura ou análise implica em questionamentos, busca de informações, intuição, descoberta e crítica, e nessa interpretação não há certo ou errado, mas se deve ter o cuidado de interpretar a obra em consonância com seu observador e não a obra e seu realizador (RIZZI, 2003).

Assim, agrupando os conteúdos básicos de Geometria Projetiva e de Geometria Espacial, aglutinando as teorias de Barbosa e Duval, conectando Matemática e Arte, realizou-se uma aplicação prática de anamorfose a estudantes do Ensino Médio, buscando responder a questão: Como reconhecer as propriedades das superfícies e faces de sólidos geométricos mediante sua representação semiótica em perspectiva?

Para tanto, objetivou-se desenhar tridimensionalmente modelos de sólidos geométricos; fotografar modelos de sólidos geométricos em ângulos específicos de visão e comparar desenhos e fotografias desses modelos com propriedades de figuras planas e especiais.

No entanto, para realizar esses objetivos, foi necessário realizar, conjuntamente com os sujeitos da pesquisa, um estudo sobre anamorfose, voltado à análise de imagens, à composição de fotografias e à compreensão de perspectiva. Nesse aspecto, foram utilizados os recursos históricos, o fazer artístico, bem como o reconhecimento de espaços escolares em

que os estudantes puderam conhecer anamorfoses e aplicá-las no estudo de figuras geométricas espaciais, bem como, visualizarem o mundo geometricamente, fazendo conexão da Matemática com imagens fotográficas.

Neste artigo se apresentam três seções: na primeira seção, apresentam-se os aportes teóricos que fundamentaram o conceito de anamorfose historicamente; na segunda, apontam-se a anamorfose no ensino de geometria e o plano de trabalho realizado com alunos de Ensino Médio por meio de uma sequência de atividades; na terceira seção se apresentam os resultados de uma das atividades, a qual enfocou os desenhos de poliedros e a comparação com registros fotográficos e reflexões a respeito da técnica utilizada.

Anamorfose

O uso da anamorfose vem da China, quando “artistas trabalhavam empiricamente, pintando ao mesmo tempo em que viam o pincel através do espelho apropriado” (DANHONI NEVES e SILVA, 2010, p. 55). Para Atalay (2007, p. 173) a anamorfose é uma perspectiva levada ao extremo, em que “o artista observa seu tema de um ponto de vista absolutamente incomum, por vezes por um olho mágico”. O autor explica a etimologia da palavra, inequívoca, mas concorda com as duas interpretações. A palavra pode ter raízes em *ana* ‘de novo’ e *morphe* ‘forma’, ou ainda pode derivar de *an* ‘ausência de’, ‘sem’ e *morphe*, resultando em ‘amorfo’, ‘sem forma’. Ou seja, “o observador precisa ter parte ativa na percepção da imagem, pois a imagem certamente se apresenta ‘amorfa’ e o observador precisa olhar ‘de novo’, e ‘de novo’”.

A obra mais conhecida onde aparece anamorfose se intitula *Os Embaixadores* de Holbein (1497-1543) que pode ser observada na figura 4.

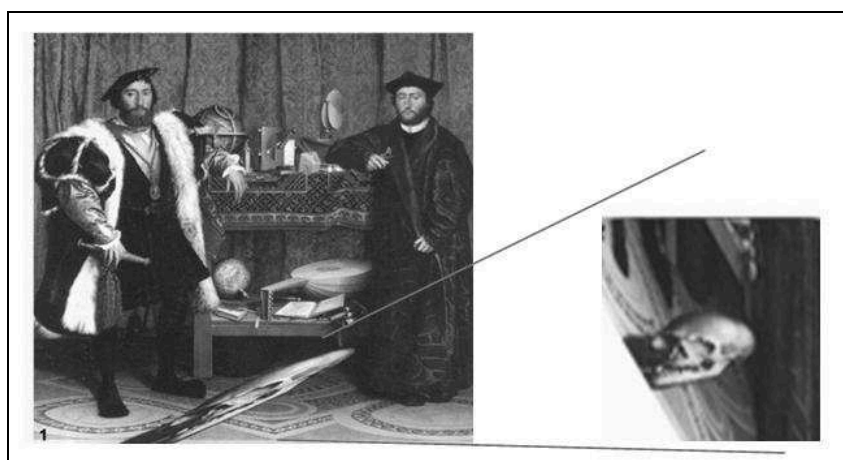


Figura 4– Os Embaixadores de Holbein (1655).

(Fonte: <http://forum.outerspace.terra.com.br/showthread.php?t=385917>)

Ao passar pelo quadro e observá-lo de frente, além das duas pessoas em pé e vários objetos ricamente descritos pelo artista, via-se aos pés dos homens, no chão, entre eles, uma espécie de mancha de difícil definição. Interagindo com a obra, por meio de uma visão periférica é possível visualizar no quadro em vez de uma mancha, a imagem de um crânio humano (CUMMING, 1995). O autor cita que “o artista utilizou a anamorfose, uma forma extrema de perspectiva. É uma técnica descrita pela primeira vez nas anotações de Leonardo da Vinci” (p. 39).

Atalay (2007, p. 174) confirma que o primeiro desenho usando anamorfose é de Da Vinci (1485), aparentemente um desenho pueril (figura 5), colocado discretamente, sem explicações entre páginas de desenhos de um dos manuscritos do pintor.

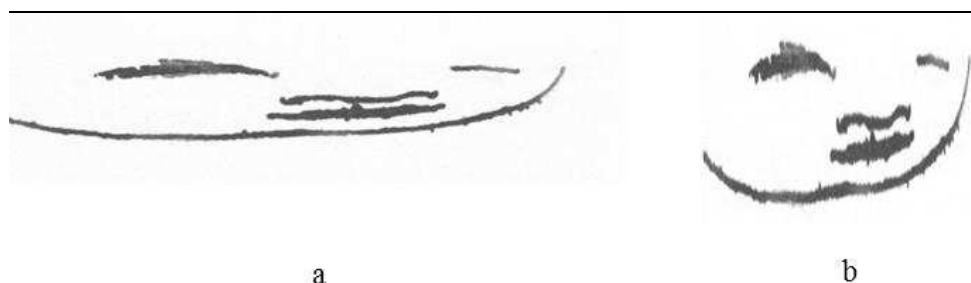


Figura 5 – Arte anamórfica de Leonardo da Vinci.
(Fonte: Atalay, 2007, p. 175)

Leonardo da Vinci estudou e desenvolveu várias técnicas artísticas e científicas, Capra (2008) descreve-as detalhadamente em *A Ciência de Leonardo da Vinci*. Afirma o autor, que Leonardo demonstrou grande imaginação e enormes poderes de observação quando transformou um dodecaedro em um cubo de volume idêntico, realizando apenas quatro passos ilustrados. E, na sua confiança e destreza, dedicou-se às transformações de figuras curvilíneas. Em Capra (2008, p. 213):

Em um interessante exemplo “transicional”, desenha um quadrado com um círculo inscrito e então transforma o quadrado em um paralelogramo, transformando assim o círculo em elipse. No mesmo fólio, transforma o quadrado em um retângulo que prolonga o círculo em uma elipse diferente. Leonardo explica que a relação da *figura ovale* [elipse] com relação ao paralelogramo é a mesma do círculo com relação ao quadrado, e afirma que a área de uma elipse pode ser facilmente obtida se o círculo equivalente for encontrado.

Leonardo da Vinci, segundo Capra (2008) tentava fazer a quadratura do círculo, problema clássico da Geometria grega - impossível de realizar com régua e compasso - aproximou-se grandemente de processos somente reconhecíveis no século XVII com o desenvolvimento do cálculo. Mas indicou possíveis rotas a serem utilizadas na configuração da anamorfose. A

transformação do quadrado em paralelogramo e o círculo em elipse e a transformação do quadrado em retângulo e o círculo em elipse são mostradas na figura 6.

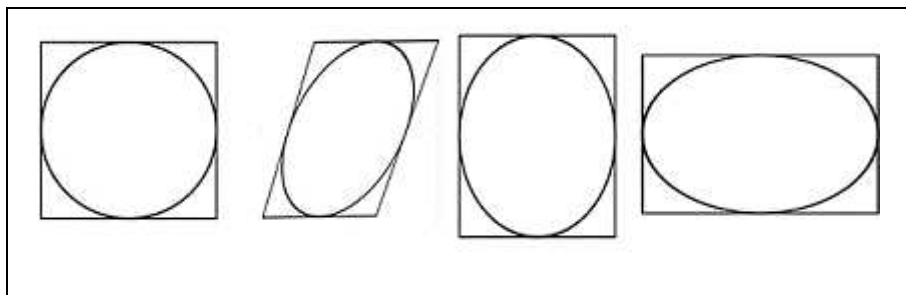


Figura 6– Anamorfose de uma circunferência inscrita num quadrado.
(Fonte: acervo do autor)

Um desenho de Leonardo da Vinci em que supostamente utilizou a anamorfose é *Leonardo's Eye* (o olho de Leonardo), uma pintura de 1485 destacada na figura 7a, que segundo Medeiros e Flores. (2012) foi a primeira anamorfose oblíqua, e, criada por Leonardo da Vinci. Essa imagem nem sempre é reconhecida quando vista de frente, no entanto, colocando-o em um certo ponto de vista, consegue-se perceber a pintura de um olho, como se verifica nas figuras 7b e 7c, com suas pálpebras e sobrancelhas.

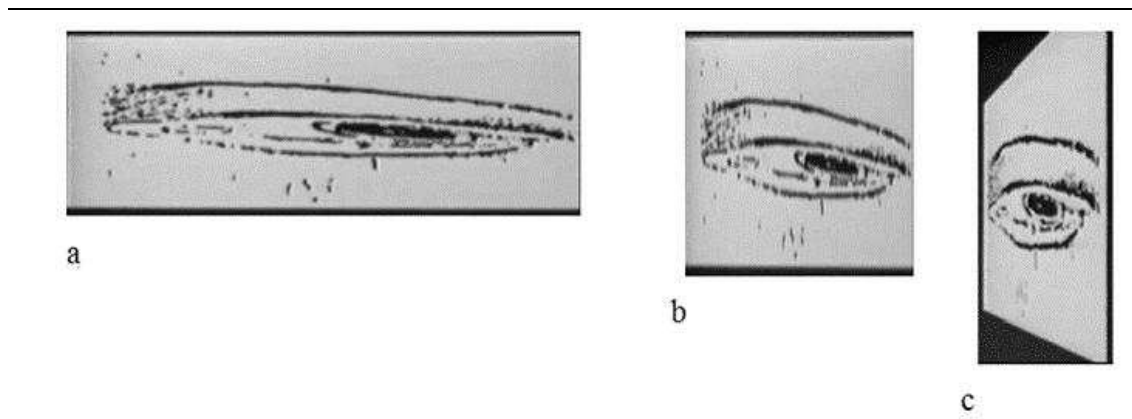


Figura 7 - *Leonardo's Eye* (1485).
(Fonte:<http://obelogue.blogspot.com/2010/05/o-carteiro-chamar-as-anas-pelos-nomes.html>)

Os objetivos dos artistas ao utilizarem a anamorfose eram bem distintos. Entre os séculos XVI e XVII foram usados para transmitir mensagens pornográficas, políticas, magia e caricaturas, também para mensagens secretas em períodos de guerra. Atualmente a técnica é usada em publímetas, arte urbana e sinalização de trânsito.

No trânsito é comum o motorista se deparar com símbolos ou legendas, sinalizadas no chão à sua frente e que podem ser lidas naturalmente com o carro em movimento (figura 8).



Figura 8 – Sinalização horizontal Vila Prado, SP.

(Fonte: <http://www.saocarlosemrede.com.br/portal/noticias/item/15433-prefeitura-transito-sinalizacao-sao-carlos?tmpl=component&print=1>).

Ao lado da sinalização, poder-se-á notar que as letras ou desenhos estão esticados no chão. Suas dimensões dependem da velocidade regulamentada em função do tempo de leitura e reação motora pretendida.

A mesma impressão pode ter um observador de um jogo de futebol transmitido pela TV ao visualizar a propaganda tridimensional colocada ao lado da trave do gol, como mostra a figura 9.



Figura 9 – Publimeta.

(Fonte: <http://www.klefer.com.br/produtos/publimetas.html>)

Um torcedor que estiver na arquibancada poderá observar a propaganda escrita de forma distorcida. A propaganda denominada publimeta é realizada num painel plástico adesivo, esticado no plano sobre o campo, contendo uma imagem cuja representação só pode ser

reconhecida na sua tridimensionalidade sob um ponto de vista, neste caso, o ângulo de captação da emissora de TV.

Artistas como Julian Beever, Kurt Wenner e Edgar Mueller utilizam a mesma técnica (*trompe l'oeil*) para desenhar nas ruas, no plano bidimensional, transformando o espaço plano numa ilusão tridimensional. Nessas obras, ao observá-las, é necessário estar no mesmo ponto informado pelo artista, do contrário, a visão tridimensional não será captada pelos olhos do observador. A linguagem artística dessas obras na paisagem urbana usa a anamorfose. Também a utilizam os geógrafos, arquitetos, publicitários e astrônomos, com finalidades distintas, mas baseados na mesma técnica.

O crescimento das aplicações da anamorfose em publicidade e comunicação pode motivar os estudantes, que, além de se surpreenderem com os resultados da técnica, oportuniza-os a entender os processos que envolvem Matemática e Arte.

A anamorfose no ensino de Geometrias

No ensino de Geometrias destacam-se a importância de transformações geométricas que permitam aos estudantes, desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e de visualização.

Um exemplo de representação gráfica em que ao observá-la, não se pode ter certeza sobre o que se apresenta, é o ilustrado na figura 10. O que pode ser visto nela?

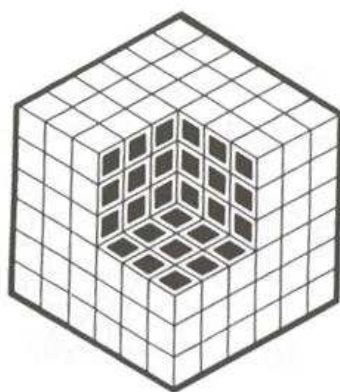


Figura 10 - Um cubo num canto ou um cubo com um canto cortado.
(Fonte: Kids Bathroom Book, Optical Illusions, 2003, p. 52)

A resposta adequada é: depende do ponto de vista. Tanto pode ser um cubo escuro em um canto, quanto um cubo branco com um canto cortado.

Num desenho, ou seja, numa “construção por linhas” (BARBOSA, 2005, p. 44), de um cubo, segundo Danhoni Neves e Silva (2010, p. 19) “não se pode exatamente localizar a sua face principal”. Observando a figura 11, a face principal tanto pode ser a destacada em negrito, como a destacada em linhas pontilhadas. Dependerá da interpretação visual de cada observador.

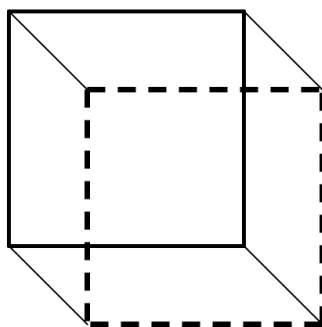


Figura 11 – Desenho de um cubo.
(Fonte: acervo do autor)

A interpretação visual no estudo de Geometria compreende figuras e desenhos. Duval (2011, p. 91) explica a oposição entre os termos *desenho* e *figura*. Segundo o autor, “o desenho é a configuração particular” que pode ser mostrada num suporte como papel, quadro negro ou monitor de computador, enquanto que a figura compreende “propriedades do objeto representado pelo desenho, ou, ainda, a classe de todos os desenhos que podem ser representações visuais desse objeto”.

Dessa forma, a figura 11 é um desenho, enquanto que o cubo, ou melhor, o hexaedro regular que está representado nela é uma figura, pois possui propriedades, arestas de mesma medida e ângulos retos.

Kaleff (2003, p. 16) afirma que, “ao visualizar objetos geométricos, o indivíduo passa a ter controle sobre o conjunto das operações mentais básicas exigidas no trato com a Geometria”. E indica que a utilização dos modelos de sólidos geométricos seja em desenhos ou outro modelo concreto pode auxiliar o aluno a “visualizar, reconhecer e analisar as propriedades geométricas”.

Os desenhos dos sólidos geométricos que mostram todas as faces, arestas e vértices deixam algumas de suas faces em projeção anamórfica. Embora a estrutura do modelo de sólido geométrico não perca suas propriedades, a projeção das faces mediante um ângulo de observação, indicará uma distorção dos ângulos, das medidas das arestas e da forma de faces, resultando numa anamorfose. O professor sabe disso, mas, segundo Duval (2011, p. 92):

Não é o que acontece com os alunos, mesmo após vários anos de aprendizagem. É preciso ter tomado consciência dos tipos de operações figurais e ter adquirido a mobilidade de focalização dimensional do olhar para reconhecer as múltiplas unidades figurais que se fundem no reconhecimento imediato de qualquer forma 2D. A oposição entre desenho e figura ignora a complexidade da maneira matemática de ver para poder utilizar em um encaminhamento matemático o que é dado a ver.

Esse reconhecimento de desenho e figura e sua compreensão de propriedades passam pelo processo de desenhá-las e, para isso, é necessário utilizar técnicas como a perspectiva. Raynaud (2009) indica que o trabalho é realizado por meio de projeções geométricas, pois a anamorfose encontrada nos desenhos tridimensionais dos sólidos geométricos é também uma forma de perspectiva.

Em sendo a perspectiva conteúdo comum à Arte e Matemática, particularmente, visualiza-se na conexão dessas duas disciplinas, uma integração entre os estudos de Duval (2003) e a proposta de Barbosa (2005). Tal integração pode derivar da aglutinação entre a visualização, a

construção e o raciocínio vindos dos processos cognitivos indicados por Duval (2009), com a análise de imagens, o fazer artístico e a contextualização, propostos por Barbosa (2005).

Essa integração pode vir a auxiliar o ensino de geometria, no que diz respeito à apropriação de conhecimentos, ao aprimoramento de técnicas, bem como o respeito à história, à cultura e valores envolvidos. Assim, buscando desenvolver essas capacidades, e enfatizando conceitos da Geometria Espacial e da Geometria Projetiva, idealizou-se uma aplicação prática de anamorfose em 90 alunos de três turmas de 2ª série de Ensino Médio, de um colégio da região metropolitana de Curitiba/PR.

Para tanto, foram utilizadas, para a realização das atividades, dezoito aulas de Matemática do primeiro semestre de 2012, nas quais a professora regente foi também a pesquisadora. Os estudantes interagiram em aulas práticas e teóricas, usando recursos tecnológicos e realizando atividades fora de sala de aula.

As aulas seguiram a sequência de atividades destacadas no quadro 1, e os dados emergiram das observações das aulas, como comportamento dos estudantes, relatos e conclusões orais e escritas de cada aula trabalhada. Na coleta de dados foram utilizados os seguintes instrumentos: registros fotográficos, anotações em diário de bordo, realizado somente pela pesquisadora e, gravações em áudio das atividades.

Atividade	Objetivo	aulas
Apresentação da biografia de “Temple Grandin” relatada em filme	Proporcionar uma visão geométrica do mundo cotidiano por meio da inteligência visual espacial da protagonista.	3
Apresentação de uma cena do filme de animação “UP Altas Aventuras”	Perceber ilusões de ótica através do ângulo de visão do observador.	3
Mostra de imagens de ilusão de ótica	Fazer analogia entre as imagens utilizadas e as cenas dos filmes. Distinguir figura e fundo em imagens, num exercício de observação. Discutir o ângulo de visão do observador e a forma de organização das imagens (figura e fundo) na composição de uma fotografia.	
Estudo de perspectivas	Mostrar que o ângulo de visão e a distância dos objetos visualizados geram anamorfozes nas imagens.	2
Histórico, classificação e aplicações da anamorfose em obras de arte, arte urbana, publicidades e sinalização de trânsito	Divulgar a história e explicar as aplicações da anamorfose nos diversos usos contemporâneos.	
Composição de imagens com ilusão de ótica e perspectiva de espaços escolares	Manipular recursos tecnológicos e elaborar imagens anamórficas observando ângulos de visão, distâncias entre figura e fundo. Observar possíveis pontos de fuga e os conceitos visuais da perspectiva. Captar ilusões de ótica e perspectivas nos ambientes escolares, registrando em fotografias.	3
Estudo das imagens fotográficas em relação à perspectiva e proporções métricas	Estudar proporções em imagens anamórficas. Comparar medidas de objetos reais com as medidas do mesmo objeto em fotografias.	3
Anamorfose em grades quadriculadas	Realizar composições anamórficas usando grades quadriculadas.	
Desenho e fotografia de modelos de sólidos geométricos	Desenhar tridimensionalmente modelos de sólidos geométricos. Fotografar modelos de sólidos geométricos em ângulos específicos de visão. Comparar desenhos e fotografias de modelos de sólidos geométricos.	4

Quadro 1: Sequência de atividades
(Fonte: acervo do autor)

Analogamente, com a realização da sequência de atividades estudou-se a história, analisaram-se obras de arte e imagens anamórficas, bem como realizou-se composições em fotografias, usando a conexão Matemática e Arte. A metodologia triangular utilizada em Arte-Educação foi parte integrante da organização das aulas.

Desenho e fotografia de modelos de sólidos geométricos

Para reconhecer as propriedades das superfícies e faces de sólidos geométricos mediante sua representação semiótica em perspectiva, foram realizados desenhos de observação. Flores (2007) esclarece que a representação em perspectiva, o que hoje parece natural e simples, derivou de um processo histórico e culturalmente complexo. Segundo essa autora, o conhecimento sobre a técnica e o desenvolvimento da habilidade de visualização em aulas de Matemática tem favorecido o ensino de geometria.

Segundo Andrade *et al.* (2007), atividades de desenho de observação estão diretamente ligadas à percepção e à visão espacial. Em técnicas de desenho, segundo Wong (2010, p. 237), “é pelo olhar humano que o mundo bidimensional ganha significado” e a visualização de um objeto tridimensional quando desenhado, não será completo, o olhar humano “verá mais determinadas superfícies e menos outras”. Entretanto, para Flores e Wagner (2012, p 11):

[...] aquilo que vemos não é determinado simplesmente pela configuração orgânica do olho, mas que o conjunto olho físico e olhar, são construções sociais e culturais que dão forma ao nosso mundo e determinam o modo pelo qual percebemos e nos relacionamos com ele.

Sendo assim, o olhar que determina a forma do desenho é também determinado pelo modo de olhar, então, para se realizar um desenho de observação é necessário fixar o objeto e desenhá-lo conforme a sua visão sobre ele. Ou seja, ao se desenhar um poliedro, deve-se colocá-lo sobre uma superfície e posicionar-se, durante a execução do desenho, sem sair do seu lugar e sem mexer o poliedro. Este, ao ser desenhado, deixará algumas faces à mostra, e se for transparente, sua estrutura de arestas e vértices poderá ser desenhada conforme o ângulo de visão do observador, gerando anamorfose.

Aos estudantes foram solicitados esboços e desenhos de observação de modelos de sólidos geométricos de acrílico. Objetivou-se com essa atividade, registrar tridimensionalmente modelos de sólidos geométricos no papel, desenhando-os anamorficamente. Exemplos dessa atividade podem ser observados na figura 12.

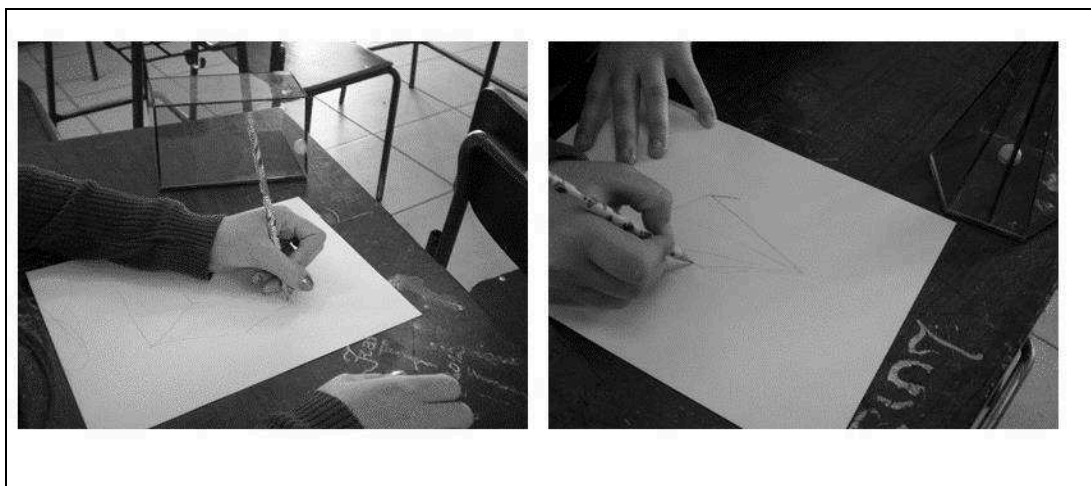


Figura 12: Desenhos de observação.
(Fonte: Acervo do autor)

Ao desenhar o primeiro esboço visualizando o modelo de sólido a sua frente, um aspecto relevante na análise dos esboços apontou que 60% dos estudantes conseguiram realizar o desenho já na primeira vez. Entre os que conseguiram desenhar o poliedro, 80% deles acharam-no muito difícil de realizar, pois nunca tinham feito esse tipo de atividade antes e comentaram, também, que copiavam sempre os desenhos do livro ou do quadro, sem usar modelos tridimensionais, apenas desenhos prontos. Cabe destacar, também, que a apreciação dos esboços pelos estudantes indicou que apenas 10% consideraram um bom resultado em seus desenhos.

Os estudantes não só desenharam o poliedro segundo sua visão, mas tentaram representá-lo segundo sua experiência visual, muitas vezes baseada em desenhos de poliedros de livros didáticos, os quais, geralmente os mostram, somente por um ponto de vista. Assim, o reconhecimento de seu desenho como bom ou ruim, passou pela sua própria construção visual.

Dos desenhos ou esboços realizados, em 10% deles, segundo os próprios estudantes, apresentavam bons resultados, 30% dos estudantes consideraram seu esboço ruim; 50% horrível e 10% acharam que se aproximaram de um bom resultado, mas não o ideal. Quanto a isso, Flores (2007) percebeu que o modo atual de olhar as representações tridimensionais leva a problemas com “implicações abrangentes e profundas, que colocam a necessidade de compreender a sua própria formação, a formação de um modo de olhar e representar que permitiu a constituição do saber representar, tal qual ele se apresenta hoje” (idem, p. 40).

Para Flores (2007), a visão está enraizada à cultura, ao modo de ver, ao modo de visualizar sempre em perspectiva, e os relatos dos alunos mostraram isso ao designar um “desenho

ruim”, “torto”, mas que se aproximava muito do que realmente estava sendo visualizado. Alguns esboços podem ser visualizados na figura 13, as letras do alfabeto indicam a ordem de esboços que realizaram.

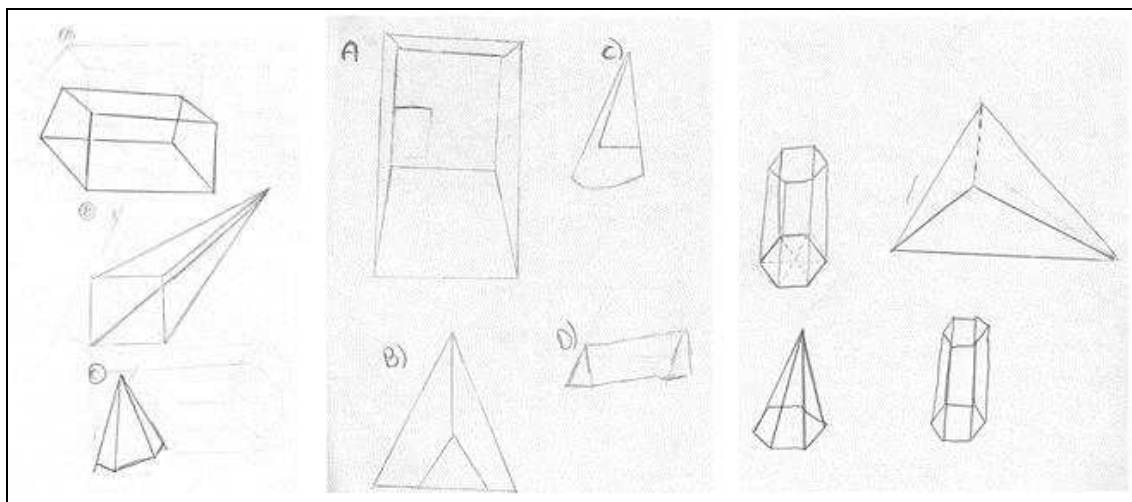


Figura 13: Esboços de desenhos de poliedros.
(Fonte: Acervo do autor)

Comentários como estes foram comuns entre os estudantes: “Achei o desenho fácil, mas não ficou bom” (Aluno 11); “Foi difícil de desenhar, ficou bem podre (ruim)” (Aluno 7); “Eu não consegui fazer bonito ou certo” (Aluno 32); “O desenho ficou mais ou menos, pois na hora que eu comecei a fazer o desenho foi um pouco difícil, mas o resultado do desenho ficou legal” (Aluno 45).

Pode-se observar que os comentários são antagônicos, os estudantes tanto acharam a atividade fácil quanto difícil. Para eles, se o desenho ficou parecido com sua visão do modelo de sólido, então o classificaram como um “desenho bom”. No entanto, se não ficou parecido, o desenho foi classificado por eles mesmos como um “desenho ruim”, entre outros termos por eles empregados. O aluno 32 ficou perguntando se o desenho estava certo, apagou várias vezes, até que conseguiu, segundo ele próprio, “um desenho legal”, que se aproximava do que ele considerava bom. Esse desenho pode ser observado na figura 14.

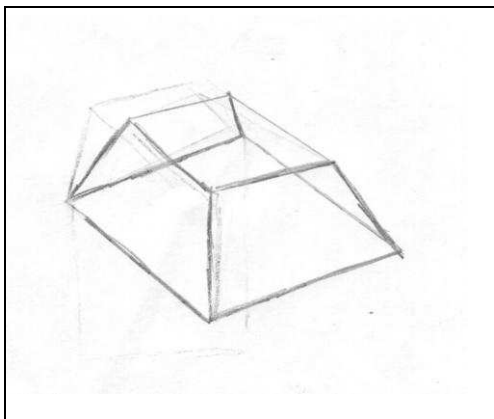


Figura 14: Esboços de desenhos de poliedros, aluno 32.
(Fonte: Acervo do autor)

No desenho desse poliedro, considerado “bom” pelo aluno 32, reflete a sua concepção sobre as imagens representadas, a sua educação do olhar, voltada à representação em perspectiva, enraizada pelo “meio ‘correto’ de representação” (FLORES, 2007, p. 39). Essa autora aborda a questão voltada ao modo de olhar o mundo em perspectiva e, indica uma discussão educacional acerca da perspectiva e sua história e, de como esta influenciou o modo de representar em geometria, funcionando como efeito e “suporte para ver as imagens tridimensionais” (idem, p. 40).

Com o intuito de melhorar os desenhos dos modelos de sólidos, adequando-os à visão geométrica dos estudantes, utilizou-se a tecnologia da fotografia para observar os modelos.

Com os esboços prontos, cada estudante fotografou seu modelo de sólido geométrico, verificando, comparando a imagem da máquina com o seu desenho. A comparação objetivou a visualização da anamorfose resultante tanto no desenho, quanto no registro fotográfico, como pode ser observado na figura 15.

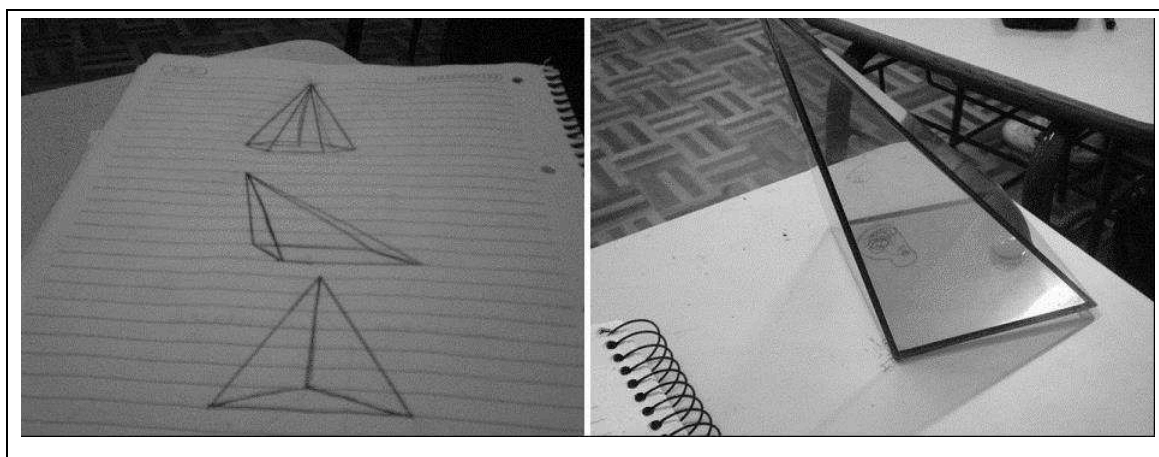


Figura 15: Comparação do desenho com o registro fotográfico.
(Fonte: Acervo do autor)

Perguntou-se aos estudantes se era possível visualizar que as arestas do poliedro ficaram com medidas diferentes na fotografia e explicou-se o que ocorre na imagem anamórfica. Assim, usando fotografias impressas, os estudantes puderam comparar os desenhos, os esboços, com as imagens das fotos, que captaram a anamorfose de algumas faces, ângulos e arestas.

Solicitou-se, também, que ao comparar o esboço com a fotografia, ainda registrada na máquina fotográfica, como pode ser observado um exemplo da atividade na figura 16.

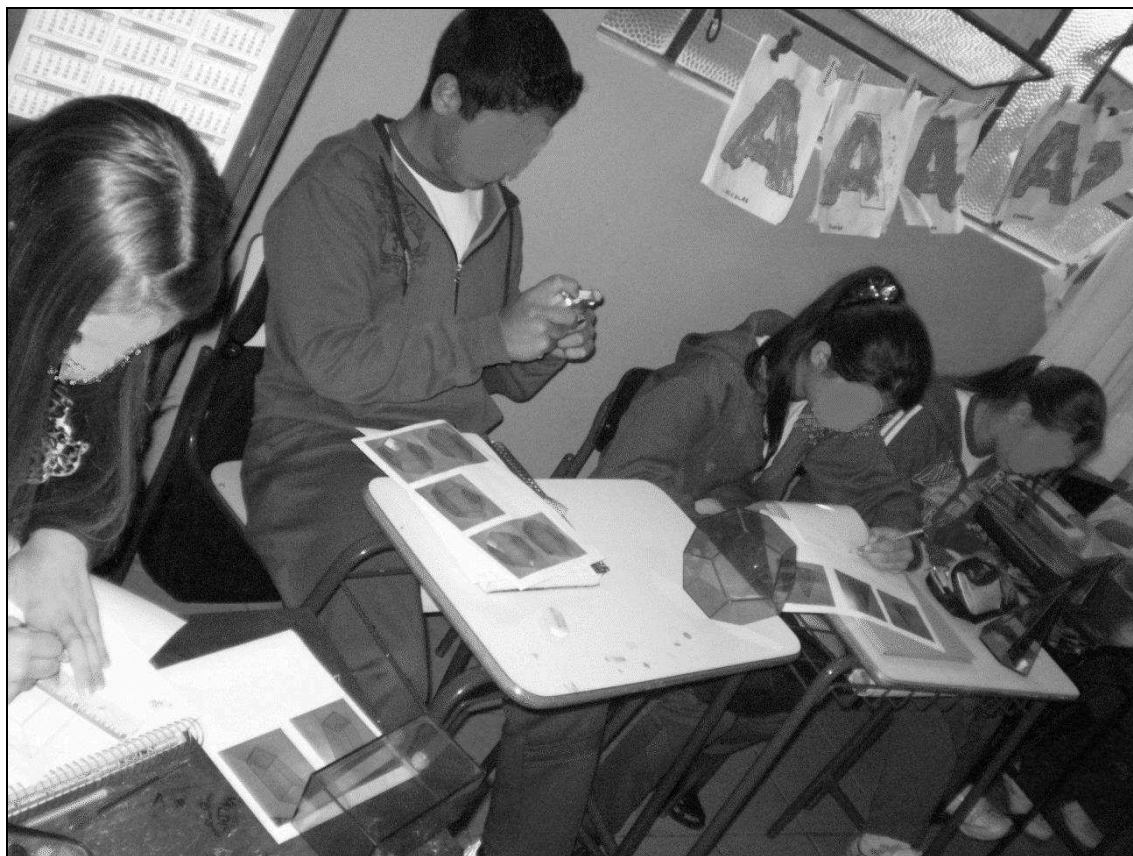


Figura 16: Aluno observando a imagem do modelo de sólido geométrico na lente da máquina fotográfica.
(Fonte: Acervo do autor)

Foi solicitado que os estudantes observassem tanto a foto, quanto o poliedro e os comparassem com o desenho realizado, procurando estabelecer semelhanças e diferenças entre as diversas representações semióticas do modelo de poliedro. Os relatos da experiência mostraram as comparações realizadas: “A imagem na foto parece ser um plano, fica mais claro na foto” (A75); “Eu acho que a fotografia só atrapalha a cabeça da gente e o próprio objeto pode ser visto e desenhado, porque viramos ele de jeito que achamos mais fácil desenhá-lo” (A37); “Foi mais fácil desenhar com a imagem da máquina pois dá pra ver que a

imagem fica torta e no objeto não dá.” (A7) e “A imagem da máquina ajuda, pois a imagem retrata o desenho e o sólido não” (A77).

Diante da atividade, os estudantes puderam comparar em seus desenhos, os erros e acertos, pois tanto nas imagens virtuais quanto nas impressas, pode-se enxergar quais linhas estavam mal traçadas nos esboços, se as dimensões do poliedro desenhado deveriam ser aumentadas ou não, e se os ângulos precisavam de ajustes. Em alguns esboços, os estudantes iniciaram outro desenho, abandonando o anterior, e conseguindo melhores resultados. Ou seja, a atividade do desenho de observação, aliada ao registro fotográfico, utilizou o fazer artístico, a análise de imagem e o registro semiótico, como indicam Barbosa (2005) e Duval (2009).

Mediante as fotografias impressas, os estudantes puderam, então, compará-las com os desenhos e foram desafiados a desenhar poliedros novamente, podendo usar a fotografia ou o modelo de sólido como referência, como exemplificado pela figura 17.

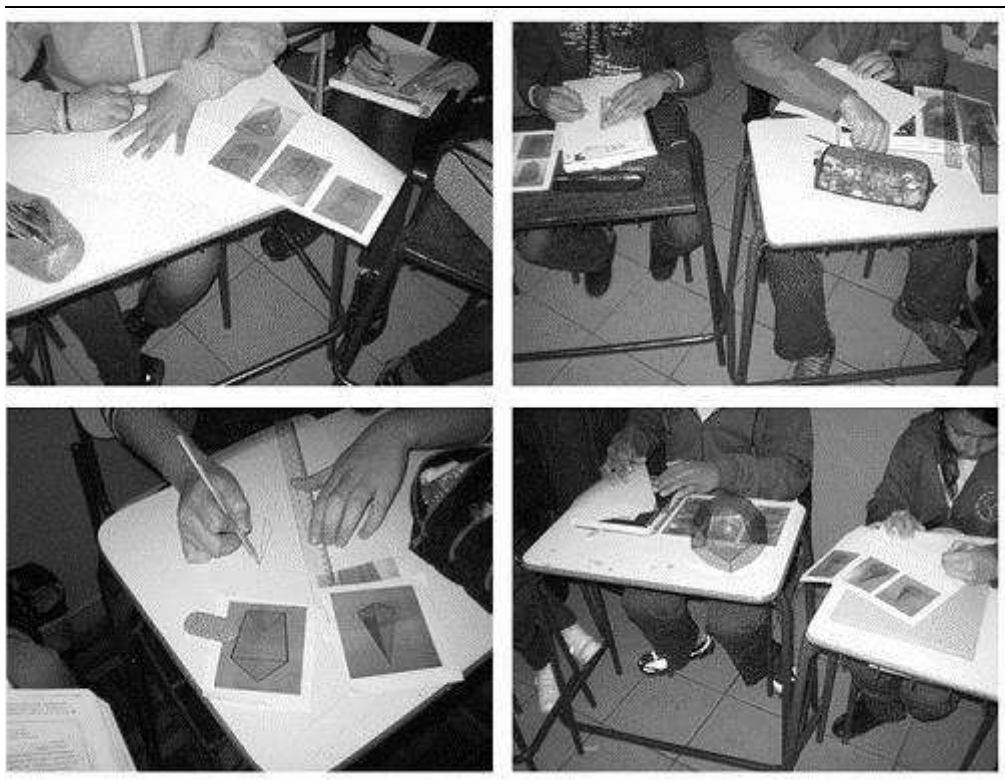


Figura 17: Atividade envolvendo fotografias impressas e desenhos de modelos de sólidos geométricos.
(Fonte: Acervo do autor)

Alguns relatos dos estudantes exemplificam as comparações realizadas: “Foi mais fácil desenhar com a foto porque a gente não se confundia com os vértices” (Aluno 35); “com a foto foi melhor, porque deu para ter uma visão melhor, fixa” (Aluno 1); “Desenhar só com o sólido foi melhor, a foto atrapalha para desenhar” (Aluno 86); “Eu acho que desenhar com a fotografia facilita muito mais do que desenhar olhando para as figuras, a fotografia me ajudou

a desenhar” (Aluno 19); “Eu acho que foi mais fácil com a fotografia, pois a foto mostra bem aonde os contornos saem e também pois dá pra ver melhor” (Aluno 34).

Quanto à essas comparações, os relatos dos estudantes mostraram que na comparação do desenho com a foto, 30% deles afirmaram que o esboço estava se aproximando da imagem da foto, e que poderiam, por meio da foto, arrumá-lo e, 70% nas suas concepções, conseguiram arrumar ou melhorar o desenho. Segundo Duval (2011, p. 100), “não é suficiente justapor representações de registros diferentes para que os alunos ‘vejam’ as correspondências entre as unidades de sentido matematicamente pertinentes” das representações. O autor explica que é necessário que os registros funcionem em sinergia, em integração, em esforço coordenado, ou seja, realizar conversões de um registro a outro pode levar os estudantes a “uma tomada de consciência do funcionamento representacional próprio de cada registro”(idem, p. 100).

Na comparação do desenho com a foto impressa, verificou-se ainda, que 30% dos estudantes afirmaram que o esboço estava se aproximando da imagem da foto e que poderiam, por meio dela, arrumar o desenho inicial. Utilizando-se da fotografia impressa, 70% conseguiram arrumar ou melhorar o desenho. Pode-se observar, nos relatos dos estudantes, mais algumas opiniões quanto ao uso da máquina fotográfica, das fotografias e da realização do desenho: “Deu para usar a foto, ficou mais legal, pois pude ver as linhas e onde desenhar”(aluno 65); “Não usei a foto, a imagem da máquina ficou melhor, mas precisava colocar ela em algum lugar fixo, pois cada vez que eu mexia nela, o desenho ficava diferente” (aluno 38); “Não gostei nem da máquina, nem da foto, usei só o de vidro (modelo em acrílico), e o desenho ficou bom”(aluno 81).

Ao desenhar, usando como recursos registros fotográficos e modelos de poliedros, aproximadamente 20% dos estudantes optaram por usar o modelo em acrílico, não se adaptando à imagem da foto, enquanto que 60% preferiram observar a imagem da fotografia, para desenhar melhor. Ao todo 12% deles não gostaram de usar nem um nem outro recurso, pois não conseguiram desenhar como gostariam.

Pode-se observar na coletânea de desenhos que grande parte dos estudantes conseguiu desenhar e organizar um esboço, usando a anamorfose. A escolha, a preferência de um ou outro registro de representação semiótica para a realização de uma atividade matemática, seja ela numérica algébrica ou geométrica, depende, segundo Duval (2011), da concepção fenomenológica do estudante sobre o assunto estudado.

Com as respostas dos estudantes pode-se verificar, também, que eles não visualizaram o modelo de sólido de somente um ponto de vista. A opção de usar o modelo estava em

visualizá-lo tridimensionalmente, com vários ângulos de visão, cerca de 15% dos alunos o giravam para ver detalhes, como exemplificado pelo relato do aluno 56: “Desenhar o sólido foi difícil pois de cada lado que se olha a imagem aparece diferente, e a gente não sabe para onde olhar e o que fazer. Com a foto, aí tinha um desenho só para fazer”. Wong (2010) explica que o desenho, quando realizado sob vários pontos de vista, pode se tornar tridimensional, pois o desenhista visualiza mentalmente a forma toda e a faz girar mentalmente, como se ela estivesse em suas mãos.

Essa observação em sala passou despercebida e pode ter sido uma das razões dos alunos não conseguirem desenhar com o modelo, pois com a fotografia a imagem ficava estática, sem movimento e a visão se tornava única, somente sob o ângulo da fotografia. Neste caso, girando o modelo de acrílico, os estudantes realizaram desenhos em que não ocorreram anamorfozes, pois cada face é analisada separadamente. A fotografia realizada num só ponto de vista não pode ser comparada ao processo semiótico que eles estavam usando.

Entre os que preferiram usar a fotografia, foram comuns os relatos: “Com a imagem da foto ficou mais fácil pra desenhar, porque compreendo mais as linhas e as repartições do desenho” (Aluno 67); é mais fácil ver na fotografia porque quando vemos a imagem, vemos apenas ‘o lado’ ou uma das partes e não tem muitos detalhes que possam atrapalhar” (Aluno 20). Ou seja, os alunos afirmaram que podiam visualizar e estimar o tamanho das linhas, o lugar do papel que deveriam colocar os vértices e até onde deveriam desenhar a aresta do poliedro para aparecer a profundidade da peça, no registro bidimensional. Segundo Duval (2011, p. 119):

Mudar de registro uma representação dada ou obtida após um tratamento muito elementar é o primeiro gesto do pensamento em matemática. Sem esse gesto que deve ser mais ou menos automático, nenhuma atividade ou encaminhamento matemático é possível. Ficamos com o espírito bloqueado, sem nada reconhecer daquilo que é possível fazer. E se alguém sugerir a mudança de representação a fazer e desbloquear a situação, a incompreensão permanece. A questão essencial fica sem resposta: o que permitiria e o que permitirá, em outra situação, reconhecer a mudança a realizar? Certamente essas vivências negativas são esquecidas rapidamente, mas elas se acumulam inconscientemente no decorrer da escolaridade.

O comentário de Duval relaciona-se diretamente com a afirmação do estudante 5: “Quanto mais desenhava, melhor ficava o desenho, optando pelo sólido ou pela fotografia, o importante foi o treino”. Esta afirmativa poderia mostrar a razão do trabalho com Geometria, fazer experiências mais vezes, aprofundar seu estudo, de vários ângulos, com vários recursos, fazendo conexão com outras áreas do conhecimento. E, ao estabelecer conexões entre conhecimentos matemáticos de diversas subáreas específicas, estar-se-á usando o que Leivas

(2009) caracteriza como Cultura Matemática Geométrica. Realiza-se assim, conversões de registros semióticos de forma automática, que em linguagem coloquial pode-se dizer que os estudantes estariam “treinados” para ler o seu mundo geometricamente e a representá-lo.

Diante do exposto, resume-se que à representação de mundo conferem-se determinadas concepções históricas, culturais e científicas. Verificou-se na aplicação das atividades voltadas à anamorfose, e baseando-se em Duval (2009), que é o olhar humano que determina o que se vê, mas é a mente que visualiza, num exercício constante de decodificações, de construção e desconstrução de significados, a *noésis* e a *semiósisis*. E que também, a partir de Flores (2007), que o olhar está instaurado sobre a história e as técnicas de visualização de imagens, necessitando, portanto, que se restaurem os modos de ver e representar.

Visualizar e representar, utilizando duas visualizações semióticas também foi possível, realizando-se esboços e desenhos de observação de modelos de sólidos geométricos de acrílico. A atividade propiciou que cada aluno posicionasse um modelo de sólido a sua frente, e desenhasse-o observando o modelo, realçando suas arestas com lápis. Os estudantes puderam fazer e repetir os esboços quantas vezes fossem necessárias e, mais tarde, usando mais uma visualização semiótica, ainda compararam com imagens na máquina fotográfica e impressas.

Verificou-se nessa aplicação de atividades que a variedade de instrumentos e de metodologias, em sala de aula, pode propiciar situações de aprendizagem interdisciplinares, mostrando a diversidade das formas de representação, para um mesmo conteúdo estudado.

Considerações

A opção em desenvolver um trabalho conectando Matemática e Arte evidenciou a ligação entre história, análise de imagens e composição de fotografias, bem como produção de significados, argumentação e criação nas aulas de Matemática. Isso foi possível, integrando metodologia triangular da Arte-Educação com teoria de registro de representações semióticas. Percebeu-se que os estudantes na sequência de atividades puderam usar a criatividade, a intuição e a imaginação em visualizações geométricas e em representações semióticas (DUVAL, 2011). Assim, visualização e intuição, auxiliadas pela imaginação e criatividade, são elementos transversais interdisciplinares que, segundo Leivas (2009), devem ser utilizadas no ensino da Matemática. Ao mesmo tempo, quando se referem à metodologia

interdisciplinar, Fainguelernt e Nunes (2006) indicam que ao inserir Arte nas aulas de Matemática, estar-se-á aliando razão e sensibilidade, usando criatividade, emoção, sensibilidade, intuição e imaginação. E, ainda, aceitando a sugestão de Flores (2007, p. 39), para “partir de outras formas de saber e de práticas, no caso das artes, pois afinal a representação do espaço e dos objetos no espaço não se limita à matemática”.

Por sua vez, o fato de conectar Geometria Projetiva com Geometria Espacial motivou os estudantes a visualizarem Geometrias ao seu redor, a entenderem as aplicações da anamorfose e a utilizarem nas aulas de Matemática. Ou seja, estimulou a ligação entre conceitos geométricos distintos, configurando Cultura Matemática Geométrica (LEIVAS, 2009).

Ao procurar respostas a questão: “Como reconhecer as propriedades das superfícies e faces de sólidos geométricos mediante sua representação semiótica em perspectiva?” procurou-se, em uma sequência de atividades, associar a visualização da anamorfose aos referenciais históricos, analisando imagens e as comparando com modelos tridimensionais.

Ao aplicá-la, pode-se verificar que os alunos pouco conhecem sobre a técnica da perspectiva, mas que o olhar deles em relação à representação gráfica é dentro da perspectiva. Isso confirma os estudos de Flores (2007), que reforçam que a construção do olhar humano está instaurada historicamente, há séculos, e, que seus efeitos ainda perduram sobre a cultura, e o modo de olhar das pessoas na atualidade.

Por fim, cabe dizer que ao aplicar a sequência de atividades envolvendo anamorfoses, foi possível, como indica Flores (2007), realizar um trabalho interdisciplinar entre Arte e Matemática de forma articulada, refletindo sobre a própria prática pedagógica, e explorando conceitos comuns às duas disciplinas, enfocando visualização e representações semióticas, como indica Duval (2009), buscando compreender o olhar geométrico sobre o ensino da Matemática.

Referências

ANDRADE, A. F. *et al.* *Um estudo de polígonos e poliedros através do desenho de observação*. Graphica. Curitiba, 2007. Disponível em: <http://www.degraf.ufpr.br/artigos_graphica/UMESTUDO.pdf>. Acesso em 12 jan. 2013.

ATALAY, B. *A matemática e a Mona Lisa: a confluência da arte com a ciência*. São Paulo: Mercuryo, 2007.

BARBOSA, A. M. *A imagem no ensino da arte*. São Paulo: Perspectiva, 2005.

BARTH, Glauce Maris Pereira. *Arte e Matemática, subsídios para uma discussão interdisciplinar por meio das obras de M. C. Escher*. Dissertação (Mestrado em Educação) Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2006.

CAPRA, F. *A ciência de Leonardo da Vinci*. São Paulo: Cultrix, 2008.

CUMMING, R. *Para entender a arte*. São Paulo: Ática, 1995.

DANHONI NEVES, M. C. e SILVA, J. A. P. Da Terra, da Lua e Além: 1ª. Parte. in: DANHONI NEVES, M. C. et al. *Da Terra, da Lua & além*. Maringá, PR: Massoni, 2010.

DUVAL, R. Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência. *Revista REVEMAT*. Florianópolis, v. 07, n. 1, p. 118-138, 2012.

_____. *Ver e ensinar a matemática de outra forma*. São Paulo: PROEM, 2011.

_____. *Semiósis e pensamento humano, registros semióticos e aprendizagens intelectuais*. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

_____. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In MACHADO, S. D. A. (org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. Campinas, SP: Papirus, 2003.

FAINGUELERNT, E. K. e NUNES, K. R. A. *Fazendo arte com a matemática*. Porto Alegre: Artmed, 2006.

FLORES, C. R. *Olhar, saber, representar: sobre a representação em perspectiva*. São Paulo: Musa Editora, 2007.

FLORES, C. R., WAGNER, D. R. Práticas do olhar na pintura do renascimento: contribuições para a educação matemática. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura*. ano 7, n. 10, jan.-jun.2012. p. 09-20.

JOLY, L. F. *Matemática e arte: um estudo de sequências e progressões como modelo para a construção teórica da estética da matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2002

KALEFF, A. M. M. R. *Vendo e entendendo poliedros: do desenho ao cálculo do volume através de quebra-cabeças geométricos e outros materiais concretos*. Niterói – RJ: EdUFF, 2003.

LEIVAS, J. C. P. *Imaginação, intuição e visualização: a riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática*. 2009. 294 f. Tese de doutorado em Educação Matemática – Universidade Federal do Paraná – Curitiba _ PR. 2009.

MEDEIROS, L. S. de; FLORES, C. R. *O efeito anamorfose e a educação matemática: primeiros apontamentos*. Disponível em:

<<http://matematica.ulbra.br/ocs/index.php/ebrapem2012/xviebrapem/paper/viewFile/290/285>>. Último acesso em 23 fev. 2013.

RAYNAUD, D. As redes universitárias de difusão das ciências matemáticas como fator de desenvolvimento da perspectiva. Uma agenda de pesquisa para o historiador da perspectiva no Brasil. *História da Arte e da Ciência*. Belo Horizonte: Brasil, 2009. Disponível em <<http://halshs.archives-ouvertes.fr/halshs-00479822/>>. Último acesso em: 25 fev. 2013.

RIZZI, M. C. de S. Caminhos metodológicos. In: BARBOSA, A. M. (org). *Inquietações e mudanças no ensino da arte*. São Paulo: Cortez, 2003. p. 63-70.
Santos e Teles (2012)

SANTOS, L. F. e TELES, R. A de M. Aportes mútuos na relação entre simetria e artes visuais em livros didáticos de matemática para os anos iniciais. *Revista de Matemática, Ensino e Cultura*. ano 7, n. 10, jan.-jun.2012. p. 38-55.

SERENATO, L. J. *Aproximações interdisciplinares entre matemática e arte: resgatando o lado humano da matemática*. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.

WAGNER, Débora R. *Arte, técnica do olhar e educação matemática: o caso da perspectiva central na pintura clássica*. 2012, 126f. Dissertação (Mestrado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2012.

WONG, W. *Princípios de forma e desenho*. São Paulo: Martins Fontes, 2010.

SIMONE SEMMER: Artista Visual, Professora de Matemática do Estado do Paraná. Professora de Licenciatura em Matemática e Licenciatura em Pedagogia da Universidade do Contestado, Mafra, SC. Mestre em Ensino de Ciência e Tecnologia (2013) – PPGECT, Universidade Tecnológica Federal do Paraná - UTFPR, Ponta Grossa, PR.

SANI DE CARVALHO RUTZ DA SILVA: Graduada em Licenciatura em Matemática pela Universidade Estadual de Ponta Grossa (1993), Mestre em Matemática Aplicada pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (1998), Doutora em Ciência dos Materiais (Instituto de Física, Instituto de Química e Escola de Engenharia Metalúrgica) pela Universidade Federal do Rio Grande do Sul (2003). Professora da Universidade Tecnológica Federal do Paraná e Coordenadora do programa de mestrado PPGECT. Membro do grupo de pesquisa M2Real (INSA de Lyon, França).

MARCOS CESAR DANHONI NEVES: Professor Titular do Departamento de Física da Universidade Estadual de Maringá, do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Tecnologia-UTFPR/PG e do Programa Internacional de Master in Science (BUAP-Puebla-México/INSA-Lyon-França/UTFPR-PG) Graduado em Física pela Universidade Estadual de Maringá (1983), Mestre em Física pela Universidade Estadual de Campinas (1986) e Doutor em Educação pela Universidade Estadual de Campinas (1991). Especialista em Educação e Divulgação Científica pelo MASHAV-Jerusalém (Israel -1991/92).

Recebido: 08 de março de 2013
Revisado: 12 de outubro de 2013
Aceito: 28 de outubro de 2013