

Dificuldades na Aprendizagem de Frações: Reflexões a partir de uma Experiência Utilizando Testes Adaptativos¹

(Difficulties in the Learning of Fractions: Reflections from an Experience with Adaptive Tests)

ALEXANDRE BRANCO MONTEIRO e CLAUDIA LISETE OLIVEIRA GROENWALD

Universidade Luterana do Brasil (ULBRA) (alexandremonteiro29@hotmail.com, claudiag@ulbra.br)

Resumo. O presente artigo apresenta as principais dificuldades de um grupo de alunos na resolução de testes adaptativos envolvendo o conteúdo de frações. O experimento foi realizado com 19 alunos, do 7º ano do Ensino Fundamental, com testes adaptativos implementados no Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA). Esta análise fez parte da pesquisa desenvolvida para a dissertação de mestrado, intitulada “Estudos de recuperação do conteúdo de frações com o uso de Tecnologias da Informação e Comunicação”. O objetivo desse artigo é identificar as principais dificuldades desses alunos com base na análise de dados realizada na pesquisa de mestrado. Os resultados apontam que os alunos apresentaram dificuldades nos testes envolvendo conceito, equivalência, simplificação e comparação de frações, e por outro lado tiveram um bom desempenho nos testes envolvendo as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com frações.

Abstract. This article presents the main difficulties of a group of pupils in solving adaptive tests about fractions. The experiment was carried out with 19 seven-graders using adaptive tests in the Integrated Teaching and Learning System (SIENA). This analysis was part of a research conducted as an MSc dissertation, “Studies on the Recovery of Fraction Contents using Information and Communication Technologies”. The objective of this article is to identify the major difficulties of these pupils based on the analysis of data obtained in the MSc research. The results indicate that the pupils presented difficulties in the tests about concept, equivalence, simplification and comparison of fractions, meanwhile they had a good performance in the tests about the four operations (sum, subtraction, multiplication and division) with fractions.

Palavras-chave: frações, tecnologias da informação e comunicação, dificuldades de aprendizagem

Keywords: fractions, information and communication technologies, learning difficulties

Introdução

Este artigo apresenta as principais dificuldades de um grupo de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental com base na análise de dados realizada na pesquisa de mestrado, intitulada “Estudos de recuperação do conteúdo de frações com o uso de Tecnologias da Informação e Comunicação”² cujo objetivo era a partir das dificuldades individuais apresentadas pelos alunos participantes da pesquisa, realizar estudos de recuperação utilizando uma sequência didática eletrônica com o tema frações, desenvolvida no Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA).

¹ Pesquisa realizada no âmbito do Projeto Observatório da Educação 38/2010/CAPES/INEP, intitulado: *Formação continuada de professores em Ciências e Matemática visando o desenvolvimento para o exercício pleno da cidadania.*

² Monteiro (2013), dissertação de mestrado defendida em abril de 2013.

A sequência didática eletrônica³ foi desenvolvida utilizando atividades *online*, o aplicativo *JClic*, materiais de estudo em formato *PowerPoint*, todos disponibilizados na plataforma SIENA. O SIENA é um sistema que possibilita ao professor um planejamento do processo de ensino e aprendizagem de acordo com os conhecimentos dos alunos. Através da aplicação de testes adaptativos, é gerado um mapa individualizado das dificuldades dos alunos, esses testes estão vinculados a sequências didáticas eletrônicas, as quais servem como estudos de recuperação para os alunos que apresentarem dificuldades.

Conforme Groenwald e Moreno (2006), o SIENA é um sistema informático que auxilia na autoaprendizagem e autoavaliação, a partir dos conhecimentos prévios dos alunos. É um sistema que possibilita ao professor um planejamento de acordo com as dificuldades individuais dos alunos, podendo proporcionar uma aprendizagem, através de uma análise do nível de conhecimento prévio de cada aluno. Para os autores o SIENA:

[...] é capaz de comunicar informações sobre o conhecimento dos alunos em determinado tema, tem o objetivo de auxiliar no processo de recuperação de conteúdos matemáticos, utilizando a combinação de mapas conceituais e testes adaptativos (GROENWALD; MORENO, 2006, p. 26).

O SIENA foi desenvolvido pelo grupo de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna (ULL), Tenerife, Espanha juntamente com o Grupo de Estudos Curriculares de Educação da Matemática (GECEM), da ULBRA, Canoas, Brasil. Conforme Groenwald e Moreno (2007, p.5), o SIENA foi desenvolvido através de uma variação dos tradicionais mapas conceituais⁴ de Novak e Gowin, sendo desenvolvido um grafo, que permite a planificação do ensino e da aprendizagem de um tema específico.

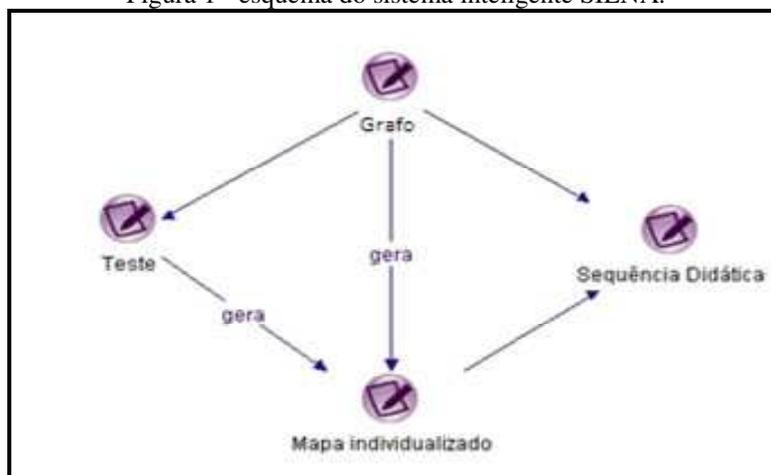
Ainda, segundo os autores, o grafo deve ser desenvolvido por relações do tipo “o conceito A deve ser ensinado antes do conceito B”, começando pelos conceitos prévios, seguindo para os conceitos fundamentais, até atingir os conceitos objetivos. Esse sistema permite gerar um mapa individualizado das dificuldades dos alunos, o qual está ligado a um hipertexto (materiais de estudos), que servirá para recuperar as dificuldades

³ A utilização de recursos tecnológicos e a articulação destes em uma sequência didática é o que denominamos como Sequência Didática Eletrônica.

⁴ Mapas conceituais são apenas diagramas que indicam relações entre conceitos. Mais especificamente, podem ser interpretados como diagramas hierárquicos que procuram refletir a organização conceitual de um corpo de conhecimento ou de parte dele. Ou seja, sua existência deriva da estrutura conceitual de um conhecimento (MOREIRA, 2006, p.9).

que cada aluno apresenta no conteúdo desenvolvido, auxiliando no processo de recuperação dos estudantes. A figura 1 apresenta o sistema SIENA.

Figura 1 - esquema do sistema inteligente SIENA.



Fonte: Groenwald e Moreno (2007).

O grafo está ligado a um teste adaptativo que gera o mapa individualizado das dificuldades do estudante. Um teste adaptativo informatizado é administrado pelo computador, que procura ajustar as questões do teste ao nível de habilidade do aluno. Segundo Costa (2009 apud LEMOS; SEIBERT; GROENWALD, 2011, p. 167) um teste adaptativo informatizado procura encontrar um teste ótimo para cada estudante, para isso, a proficiência do indivíduo é estimada interativamente durante a administração do teste e, assim, só são selecionados as perguntas que mensurem eficientemente a proficiência do examinado.

Quando um conceito não é superado, o sistema não prossegue avaliando por esse ramo de conceitos do grafo, pois se entende que esse conceito é necessário para a compreensão do seguinte, abrindo para o estudante a possibilidade de realizar a sua recuperação. É importante dizer que o sistema poderá prosseguir por outras ramificações do grafo. O desempenho do aluno é calculado a partir da fórmula $\frac{D \times P}{D \times P + (1 - P) \times L}$, onde: D é a dificuldade da pergunta; L é o nível de adivinhação da pergunta; P é a nota da pergunta anterior.

O sistema mostrará para cada conceito, através do seu banco de dados, quais foram as perguntas realizadas, quais foram respondidas corretamente e qual a estimativa

realizada por ele sobre o grau de conhecimento de cada conceito. A figura 2 apresenta um exemplo do banco de dados do SIENA.

Figura 2 - exemplo do banco de dados de um teste adaptativo de um conceito.



Acabado: true
Nota: 0.671

#	Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Puntos antes	Puntos después
0	1	true	270	Na mão de José estão dois milésimos do total de chaves da fábrica onde ele trabalha. Qual a fração que representa a quantidade de chaves que José está assegurando?	0.100	0.280
1	1	true	230	Rita e Bernardo desenharam dois retângulos com as mesmas medidas. Depois dividiram em partes iguais, a região interna de cada retângulo e começaram a pintar, Rita pintou de vermelho e Bernardo de azul. Responda corretamente, que fração do retângulo representa a parte pintada por Rita? E a parte pintada por Bernardo, que fração do retângulo representa?	0.280	0.576
2	4	false	251	A figura representa um segmento de reta. Assinale a fração que corresponde ao trecho pintado em azul?	0.576	0.576
3	0	false	274	Sabe-se que 6 terrenos de mesmo tamanho serão divididos igualmente entre 5 herdeiros. Cada herdeiro ficaria com que parte do terreno?	0.576	0.576
4	0	true	277	$\langle \text{mrow} \rangle \langle \text{mtext} \rangle$ Você tem 3 barras de chocolate para dividir igualmente entre 5 colegas. Quanto de chocolate cada colega receberá? $\langle \text{intext} \rangle \langle \text{mrow} \rangle \langle \text{math} \rangle$	0.576	0.671
5	3	false	255	Veja como Claudia está medindo o comprimento da caneta. Qual o comprimento da caneta em palmos?	0.671	0.671
6	3	false	267	Qual a fração correspondente aos serrotes neste grupo de ferramentas?	0.671	0.671

Fonte: <http://siena.ulbra.br>.

O SIENA possui duas opções de uso. Na primeira, o aluno estuda os conteúdos dos conceitos do grafo e realiza o teste para informar quais são seus conhecimentos sobre determinados conteúdos. A segunda opção (utilizada nesse trabalho) oportuniza ao aluno realizar o teste e estudar os conceitos nos quais apresentou dificuldades, sendo possível uma recuperação individualizada.

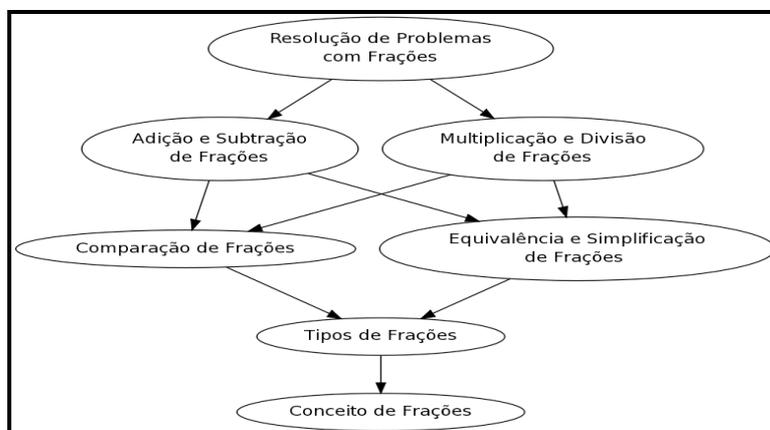
Este artigo foca-se na apresentação dos resultados da pergunta: quais as dificuldades que um grupo de estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental apresenta com o tema frações? Ressalta-se que estes estudantes analisados no experimento já tinham estudado frações em séries anteriores.

1 Ambiente de investigação

Para implementação (desenvolvimento, aplicação e avaliação) do ambiente de investigação no SIENA foi construído um grafo com o conteúdo de frações, um banco de questões para os testes adaptativos e uma sequência didática eletrônica⁵ para cada conceito do grafo.

O grafo a ser trabalhado com o tema frações, foi composto por sete conceitos, na seguinte sequenciação: Conceito de Frações; Tipos de Frações; Equivalência e Simplificação de Frações; Comparação de Frações; Adição e Subtração de Frações; Multiplicação e Divisão de Frações e Resolução de Problemas com Frações (figura 3).

Figura 3 - grafo com o conteúdo de frações na plataforma SIENA.



Fonte: <http://siena.ulbra.br>

Os testes adaptativos tem por finalidade administrar questões de um banco de questões, que correspondam ao nível de capacidade do examinando. Como cada questão apresentada a um indivíduo é adequada à sua habilidade, nenhuma questão do teste é irrelevante (SANDS e WATERS, 1997 apud LEMOS; SEIBERT; GROENWALD, 2011, p. 168). Ao contrário dos testes de papel e caneta, cada estudante recebe um teste com questões diferentes e tamanhos variados, produzindo uma medição mais precisa da proficiência e com uma redução, do tamanho do teste, em torno de 50% (WAINER, 2000 apud LEMOS; SEIBERT; GROENWALD, 2011, p. 168).

Para compor o banco de questões do teste adaptativo, é necessário cadastrar perguntas para cada conceito do grafo, com o objetivo de avaliar o grau de conhecimento individual do aluno. Essas perguntas são de múltipla escolha, numeradas de 1 a 5, sendo necessário definir para cada questão: o grau de sua relação com o

⁵ A sequência didática eletrônica é constituída por materiais de estudo com apresentações em *PowerPoint*, atividades *online* e atividades desenvolvidas no aplicativo *JClic* para estudos de recuperação.

conceito; o grau de sua dificuldade (fácil, média ou difícil); a resposta verdadeira; a possibilidade de responder a pergunta considerando exclusivamente sorte ou azar; a estimativa do conhecimento prévio do aluno sobre esse conceito e tempo para o aluno responder a pergunta (em segundos). O teste adaptativo funciona lançando perguntas aleatórias ao aluno, com um nível de dificuldade de acordo com as respostas do estudante ao teste.

O sistema dispõe de um mecanismo de parada, quando já não pode obter uma maior estimativa sobre o grau de conhecimento de um conceito, ou quando não existam mais perguntas. Por essa razão cada conceito do grafo deve ter um número suficiente de perguntas, de diferentes níveis de dificuldade. A progressão do aluno se dá sempre que alcançar uma nota superior ao estipulado, pelo professor, no teste.

Nesta pesquisa, o banco de questões de cada conceito foi desenvolvido com questões criadas pelo autor ou adaptadas dos trabalhos de Llinares e Sánchez (1988), Giménez e Bairral (2005) e de livros didáticos de Ribeiro (2009), Spinelli e Souza (2007), Dante (2009), Barroso (2006), Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (2007), Giovanni e Giovanni Jr. (2002), Guelli (1999) e Centurión, Jakubovic e Lellis (2004).

Para a composição dos bancos de questões dos testes adaptativos, para cada conceito do grafo, foram desenvolvidas, em média, 30 questões, com três níveis de dificuldades. Nunes et al. (2012) definem da seguinte forma os níveis de dificuldades:

[...] são consideradas fáceis as questões de aplicação direta de um conceito, uma propriedade ou um algoritmo. As questões de dificuldade média exigem leitura mais detalhada, interpretação e análise de dados, aplicando, na sua resolução, um ou mais conceitos. As questões difíceis necessitam de leitura, interpretação e análises mais detalhadas e elaboradas, exigindo elaboração de hipóteses, plano de ação e execução desse plano, onde o estudante não conhece de imediato a resposta, necessita organizar o conhecimento já adquirido e adequá-lo na resolução da atividade (NUNES et al., 2012).

Na figura 4, apresentam-se exemplos de questões com os três níveis de dificuldades do Conceito de Frações.

Figura 4 - exemplos de questões dos três níveis de dificuldade.

Nível fácil	Nível médio	Nível difícil
 <p>Qual a fração correspondente aos serrotes neste grupo de ferramentas?</p> <p>0) $\frac{5}{8}$</p> <p>1) $\frac{1}{8}$</p> <p>2) $\frac{1}{3}$</p> <p>3) $\frac{3}{5}$</p> <p>4) $\frac{2}{4}$</p> <p>Fonte: Adaptado de Dante (2009).</p>	 <p>Numa partida de basquete, a equipe de Oscar marcou 120 pontos. Oscar foi o cestinha dessa partida, marcando $\frac{2}{5}$ do total de pontos. Quantos pontos ele marcou nessa partida?</p> <p>0) 40 pontos</p> <p>1) 30 pontos</p> <p>2) 12 pontos</p> <p>3) 100 pontos</p> <p>4) 120 pontos</p> <p>Fonte: Adaptado de Barroso (2006).</p>	 <p>Que fração representa as partes brancas da figura acima?</p> <p>0) $\frac{14}{10}$</p> <p>1) $\frac{14}{32}$</p> <p>2) $\frac{15}{17}$</p> <p>3) $\frac{15}{32}$</p> <p>4) $\frac{32}{15}$</p> <p>Fonte: Adaptado de Ribeiro (2009).</p>

Fonte: Autores.

Nestes exemplos, observa-se que a questão de nível fácil é uma interpretação direta da imagem relacionando o conceito de parte-todo na representação discreta. A questão considerada de nível médio é uma questão de resolução de um problema, onde o aluno utiliza a fração como operador para solucionar o número de pontos realizados. A questão de nível difícil exige do aluno compreensão avançada da ideia de frações como parte-todo, já que a representação não se apresenta na forma convencional de representações contínua.

Na figura 5, visualiza-se como uma questão é apresentada ao aluno, quando este está estudando na plataforma SIENA.

Figura 5 - exemplos de questões na plataforma SIENA.



Fonte: <http://siena.ulbra.br>

2 As dificuldades no processo de ensino e aprendizagem de frações

O ensino e a aprendizagem das frações é um processo complexo para os alunos e as dificuldades podem surgir quando estes transferem as propriedades do conjunto dos Números Naturais para as frações, não compreendendo as características particulares de cada conjunto numérico. Para Nunes e Bryant:

Com as frações, as aparências enganam. Às vezes, as crianças parecem ter uma compreensão completa delas e ainda não a têm. Elas usam os termos corretos, falam sobre frações coerentemente, resolvem alguns problemas, mas diversos aspectos cruciais das frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem superar dificuldades relativas às frações sem que ninguém perceba (NUNES; BRYANT, 1997, p. 191).

Embora algumas expressões relacionadas às frações, como “metade”, serem utilizadas espontaneamente pelos alunos de forma rotineira, isso não significa que em expressões como, por exemplo, meio-dia, a criança esteja pensando, necessariamente, na metade de um dia com relação a um dia completo. O mesmo acontece quando se diz: “Me dá à metade do seu pastel”. Seguramente a ênfase do significado não está colocada no fato de que as metades sejam exatamente iguais (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p. 18).

Ao raciocinar sobre frações como se fossem Números Naturais, os alunos acabam tendo que enfrentar vários obstáculos, conforme os PCN (BRASIL, 1998, p.101):

- um deles está ligado ao fato de que cada Número Racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias; por exemplo, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$ e

$\frac{4}{12}$ são diferentes representações de um mesmo número;

- outro diz respeito à comparação entre frações, pois acostumados com a relação $3 > 2$, terão que construir uma escrita que lhes parece contraditória, ou seja,

$$\frac{1}{3} < \frac{1}{2};$$

- se, ao multiplicar um Número Natural por outro natural (sendo esse diferente de 0 ou 1), a expectativa era a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por $\frac{1}{2}$, ficarão surpresos ao ver que o resultado é menor do que 10;

- se a sequência dos Números Naturais permite falar em sucessor e antecessor, com frações isso não faz sentido, uma vez que entre duas frações quaisquer é sempre possível encontrar uma outra.

A simples “transferência” das propriedades ou características de um tipo de número para outro pode tornar-se um “problema” no processo de aprendizagem das frações (CAMPOS; SILVA; PIETROPAOLO, 2009). Uma forma de incentivar o aprendizado em relação a esse conteúdo é que essas devem aparecer em contextos variados, que proporcionem aos estudantes a realizar com elas as mesmas atividades que desenvolvem com os Números Naturais, como somar, dividir e ordenar.

Para Llinares e Sánchez (1988), a constatação do baixo rendimento conceitual e a pouca destreza com frações leva a questionar o nível apropriado para o seu aprendizado. A esse respeito, Freundenthal (1973 apud LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p. 26) diz que “as frações complicadas e as operações com elas são invenções dos professores que só podem entendê-las em um nível superior”.

Segundo Llinares e Sánchez (1988), os mesmos símbolos dos Números Naturais também são utilizados para as frações, diferenciando-se apenas no traço na horizontal. A experiência que os alunos têm com os Números Naturais às levam à tendência de ver as frações como um conjunto de dois Números Naturais separados por um traço. Como consequência, acabam utilizando seus conhecimentos de cálculo, regras e algoritmos com os Números Naturais para as frações. Isso constitui o que alguns autores

denominam de “efeito de distração dos Números Naturais” (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988).

3 O experimento

O experimento foi realizado no laboratório de informática da Escola Municipal de Ensino Fundamental (EMEF) Irmão Pedro, no município de Canoas, Rio Grande do Sul. A EMEF Irmão Pedro é a mais antiga escola municipal de Canoas. Esta escola é uma das escolas participantes do projeto Observatório da Educação, desenvolvido pelo PPGECIM⁶, da ULBRA⁷, campus Canoas (RS).

Os alunos participantes do experimento foram de duas turmas do 7º ano do turno da manhã, selecionados pela professora titular das turmas, tendo como critério o desempenho considerado insuficiente com o conteúdo de frações. A escolha das turmas do 7º ano se deve a dois aspectos importantes. O primeiro que o conteúdo de frações já tinha sido desenvolvido em sala de aula, e o segundo aspecto é que no 7º ano este conteúdo volta ao currículo de Matemática sendo ampliados esses conceitos ao conjunto dos Números Racionais.

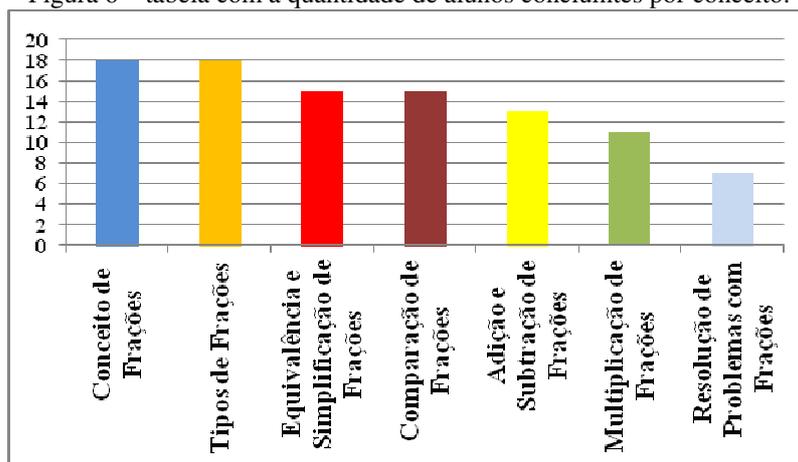
Com base nesse segundo critério, o experimento serviu como estudo de recuperação do conteúdo de frações, para aqueles alunos que ainda apresentavam dificuldade com esse tema. Crê-se que independente de série escolar é importante prover meios de realizar a inclusão dos alunos com dificuldades no processo escolar, para que os conteúdos não compreendidos por esses alunos não se acumulem tornando um obstáculo ainda maior para o ensino e aprendizagem. Após esse trabalho desenvolvido a professora titular retomou o conteúdo dos Números Racionais com as turmas.

Os encontros foram realizados no contraturno de aula, os alunos foram convidados a participar da atividade, sendo que a participação não foi obrigatória, assim como a permanência até ao final da atividade. Foram realizados oito encontros com o grupo, de duas horas de duração, sob a orientação do pesquisador. Dos dezenove alunos que iniciaram o experimento, sete concluíram toda a sequência didática, na figura 6 consta a quantidade de alunos que concluíram cada conceito trabalhado.

⁶ Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

⁷ Universidade Luterana do Brasil.

Figura 6 – tabela com a quantidade de alunos concluintes por conceito.



Fonte: autor

Os alunos receberam um *login* e uma senha individual previamente cadastrada para acessar a plataforma SIENA, com isso, é possível também acompanhar o desempenho individual através do banco de dados do SIENA. O aluno ao acessar pela primeira vez cada um dos conceitos do grafo, realiza o teste adaptativo, visando avaliar a necessidade ou não de recuperar esse conceito. Estipulou-se para essa pesquisa a pontuação de 0.6 (em um intervalo de 0.0 a 1.0) como mínima a ser alcançada nos testes adaptativos, pressupondo assim a não necessidade de realizar estudos de recuperação naquele conceito. Ao alcançar a pontuação de 0.6, ou mais, o aluno está habilitado ao próximo conceito, quando não alcança a nota média, o aluno realiza estudos de recuperação, ou seja, acessa ao material de estudo específico para cada conceito.

4 Análise do desempenho dos alunos nos testes adaptativos

Na pesquisa desenvolvida foi analisado de forma individual o desempenho dos 19 alunos participantes do experimento, mesmos os que não concluíram totalmente a sequência didática. A análise individual dos alunos objetivou verificar as dificuldades e as particularidades de cada um, analisando as dificuldades apresentadas, assim como a evolução na compreensão dos conceitos trabalhados. A análise utilizou o banco de dados do SIENA, as anotações dos alunos, as gravações de áudio e vídeo, e também as observações do pesquisador.

Com o propósito de ilustrar as principais dificuldades apresentadas por esse grupo de alunos, a seguir apresentam-se recortes da análise individual dos testes adaptativos, ilustrados com exemplos de questões dos testes adaptativos e registros dos alunos dos sete conceitos trabalhados com o conteúdo de frações.

4.1 Conceito de Frações

O Conceito de frações objetiva introduzir os primeiros conceitos do tema frações, seus significados, representações na forma contínua e discreta, e leitura dos números fracionários.

Uma das dificuldades apresentadas pelos alunos foi em relação a representações parte-todo na forma discreta. Para exemplificar, ao tipo de questões que os alunos apresentaram dificuldades, ilustramos com duas questões respondidas pelo Aluno 102 (figura 7).

Figura 7 - exemplos de questões envolvendo representações parte-todo de forma discreta.

Qual a fração correspondente aos serrotes neste grupo de ferramentas?



0) $\frac{5}{8}$
 1) $\frac{1}{8}$
 2) $\frac{1}{3}$
 3) $\frac{3}{5}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 102
 4) $\frac{3}{8}$ → alternativa correta

Em um grupo com 7 meninos e 3 meninas as meninas correspondem a que parte do grupo?



0) $\frac{3}{7}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 102
 1) $\frac{7}{3}$
 2) $\frac{3}{10}$ → alternativa correta
 3) $\frac{7}{10}$
 4) $\frac{1}{3}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

Essas duas questões foram sorteadas nos dois testes adaptativos, e o aluno as respondeu equivocadamente. Na questão do grupo de ferramentas o aluno assinalou nos dois testes a alternativa “3” e, na questão do grupo de meninos e meninas, assinalou em ambos os testes a alternativa “0”. Observa-se que é possível que o aluno não tenha a compreensão do significado da relação parte-todo na forma discreta, pois nas duas situações não considerou a quantidade total de elementos. Outra possibilidade é de ter estabelecido uma relação entre os elementos, interpretando como uma razão. Nos testes iniciais dezessete alunos apresentaram dificuldades nesse tipo de questões envolvendo representações de forma discreta.

Outra dificuldade apresentada pelos alunos foi em questões envolvendo o significado de frações como quociente⁸. Na figura 8 ilustra-se uma questão respondida pelo Aluno 106.

Figura 8 - exemplo de questão envolvendo o significado de frações como quociente.

Sabe-se que 6 terrenos de mesmo tamanho serão divididos igualmente entre 5 herdeiros. Como você faria essa divisão? Cada herdeiro ficaria com que parte do terreno?

0) $\frac{5}{6}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 106 no primeiro teste

1) $\frac{1}{6}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 106 no terceiro teste

2) $\frac{6}{5}$ → alternativa correta

3) $\frac{1}{5}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 106 no segundo teste

4) $\frac{5}{2}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

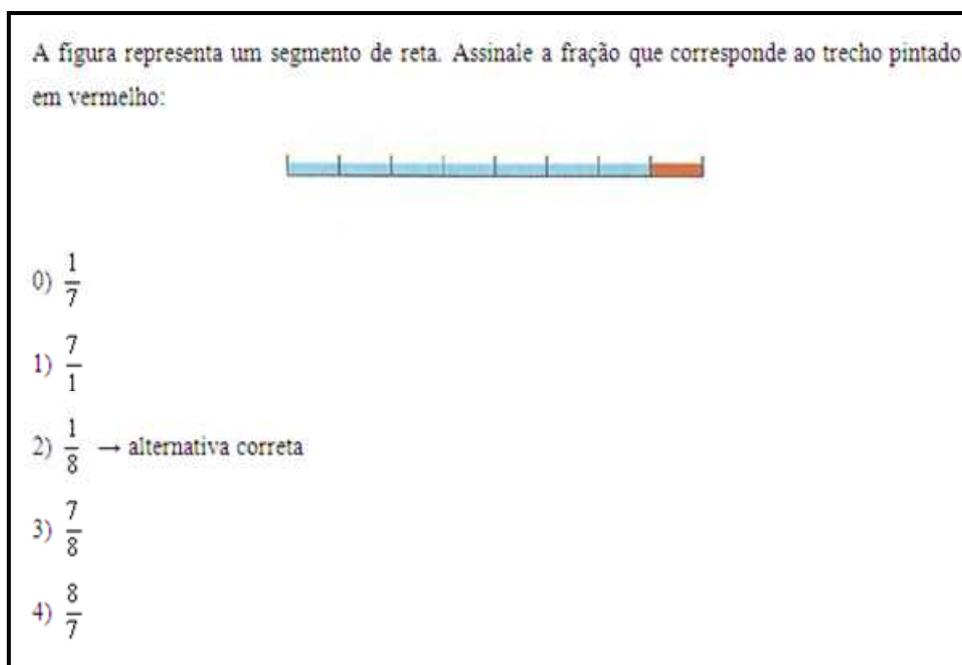
Uma característica em comum nas respostas assinaladas pelo aluno (e pelos demais que apresentaram dificuldades nesse tipo de conceito), nos três testes adaptativos que realizou, é que em todas, o numerador é menor que o denominador, o que parece estar ligado à ideia de Kerslake (1986, apud GIMÉNEZ; BAIRRAL, 2005) de que, para os alunos, a fração tem que ser uma representação menor que a unidade. Em nenhum dos testes adaptativos o aluno assinalou as alternativas 2 e 4, que eram

⁸ Expressão utilizada por Llinares e Sánchez (1988).

frações impróprias. Especificamente com essa questão, dos quatorze alunos que responderam somente quatro acertaram inicialmente essa questão.

Quando as questões tratavam do significado parte-todo de forma contínua, como usualmente são trabalhadas nos livros didáticos, e que, segundo Nunes e Bryant (1997), é também normalmente como o professor dá ênfase em sala de aula, nenhum aluno apresentou dificuldades significativas. Na figura 9, uma questão envolvendo esse tipo de ideia, no exemplo respondida pelo Aluno 110.

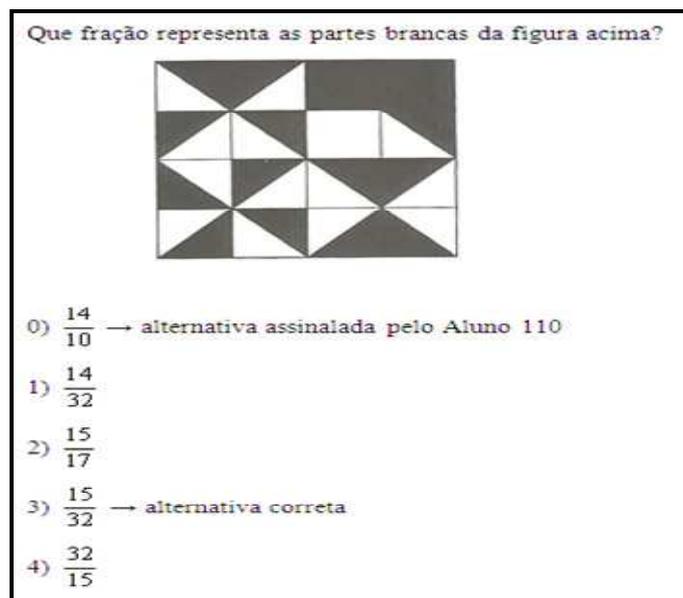
Figura 9 - exemplo de questão de fração significado parte-todo de forma contínua que os alunos não apresentaram dificuldades.



Fonte: banco de dados SIENA.

Ressalta-se que quando esse tipo de questão é apresentado de forma diferente da usual, os alunos enfrentam dificuldades de interpretação. Exemplificamos com uma questão respondida pelo Aluno 110 (figura 10), que não apresentou dificuldades em questões como do exemplo anterior, mas quando a questão envolveu representações contínuas não usuais apresentou dificuldades de compreensão.

Figura 10 - exemplo de questão de nível difícil de parte-todo de forma contínua em que os alunos os apresentaram dificuldades.



Fonte: banco de dados SIENA

No exemplo, a resposta do aluno foi $\frac{14}{10}$, o que se pode interpretar que foi feita uma dupla contagem dos elementos, ou seja, utilizou a ideia de razão, contando a quantidade de partes brancas e relacionou com a quantidade de partes pretas da figura, e ainda desconsiderou o fato de a figura estar dividida em triângulos, fazendo a contagem das partes pintadas. Esse mesma questão foi respondida por 6 alunos, sendo que 5 apresentaram a mesma dificuldade.

4.2 Conceito Tipos de Frações

Neste conceito além de apresentar os tipos de frações com a sua nomenclatura (própria, imprópria, mista ou aparente), também foi ampliada e reforçada a ideia de reconhecer a fração como número. O entendimento da fração como número é imprescindível para que o aluno inicie a compreensão de equivalência e posteriormente realize os algoritmos das operações corretamente.

O trabalho das frações próprias, impróprias, mistas e aparentes na forma escrita e em representações gráficas é importante para evitar a construção de conceitos equivocados, segundo Giménez e Bairral (2005), comumente são apresentadas concepções errôneas sobre as frações aos alunos com:

a) a fração é uma parte menor que a unidade;

- b) são dois números separados por um traço;
 c) a fração é um operador que sempre indica uma subdivisão e, portanto um resultado menor.

A figura 11 ilustra um exemplo de questão que mesclava representação de frações impróprias e mista.

Figura 11 - exemplo de questão envolvendo frações impróprias e mistas.

A professora de Cássia propôs à classe o seguinte problema:
 - Como repartir igualmente $\frac{4}{3}$ folhas de papel colorido para 3 alunos?

Um grupo fez assim:

A	A	B	C
A	B	B	C
A	B	C	C

Outro grupo fez assim:

A	B	C	A
			B
			C

Indique o resultado nas formas fracionária e mista:

0) $\frac{3}{4}$ e $1\frac{1}{3}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 106

1) $\frac{4}{3}$ e $1\frac{1}{3}$ → Alternativa correta

2) $\frac{4}{3}$ e $1\frac{1}{4}$

3) $\frac{4}{3}$ e $1\frac{4}{3}$

4) $\frac{1}{3}$ e $1\frac{4}{3}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

Neste exemplo o aluno interpreta parte da questão de forma correta, mas assinalou a alternativa que continha a fração $\frac{3}{4}$, o que pode ser em decorrência da dificuldade de reconhecer a fração como maior que a unidade. Este fato converge com as ideias de Kerslake (1986, apud GIMÉNEZ; BAIRRAL, 2005), sobre a dificuldade de se entender as frações como maiores que a unidade, como já citado anteriormente quando os alunos tiveram dificuldades em questões envolvendo divisão de frações, onde no quociente o numerador era maior que o denominador. Os autores exemplificam dizendo que,

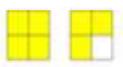
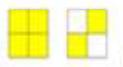
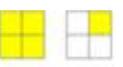
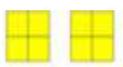
Quando se associa a fração a uma parte de uma figura, ficamos induzidos a “pensar” que as frações são partes, pois sabemos que a parte é menor que o todo. Se dissermos que $\frac{7}{5}$ é uma fração, parece que estamos em uma contradição, pois se “as frações servem para indicar coisas menores que a unidade” torna-se difícil aceitar que essa fração é *um número*, ficando mais

fácil admitir que são dois (KERSLAKE, 1986 apud GIMÉNEZ; BAIRRAL, 2005, p. 7).

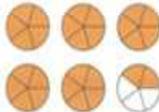
Outro exemplo de erros cometidos pelos alunos em relação aos tipos de frações é como o da figura 12 que apresenta duas questões realizadas pelo Aluno 121, que na resolução da questão não considerou as unidades completas.

Figura 12 - erro cometido pelo Aluno 121 em questões sobre tipos de frações.

Qual dos desenhos representa a fração $1\frac{3}{4}$?

a)  b)  c)  d)  e) 

0) a → Alternativa correta
 1) b
 2) c
 3) d
 4) e → Alternativa assinalada pelo Aluno 121.



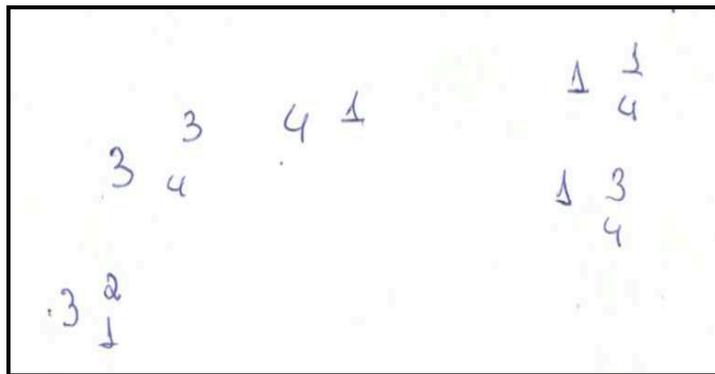
Que número na forma mista representa as partes pintadas das figuras?

0) $4\frac{1}{2}$
 1) $2\frac{5}{5}$
 2) $1\frac{1}{9}$
 3) $\frac{2}{5}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 121.
 4) $5\frac{2}{5}$ → Alternativa correta

Fonte: banco de dados do SIENA.

Com relação especificamente ao Aluno 121, um detalhe que desperta a atenção é a escrita dos números mistos. Como se pode observar na figura 13, o aluno não utiliza a barra na escrita das frações.

Figura 13 - anotações do Aluno 121 com a escrita de números mistos.



Fonte: anotações do Aluno 121.

4.3 Conceito Equivalência e Simplificação de Frações

O desenvolvimento deste conceito apoiou-se nos PCN (BRASIL, 1998), que afirma ser importante que o aluno consiga reconhecer que uma fração pode ser representada por diferentes (e infinitas) escritas. A noção de equivalência se apoia na ideia de realizar diferentes divisões que resultam na mesma relação parte e todo (VASCONCELOS, 2007). Corroborando com essa ideia, Llinares e Sánchez (1988) escrevem que,

A importância da ideia de equivalência de frações se deve ao papel chave que joga em diversos aspectos: na relação de ordem (ordenar duas frações, inserir frações entre duas frações dadas), no desenvolvimento dos algoritmos de adição e subtração de frações com denominadores diferentes. Em um nível mais elevado, a conceitualização do Número Racional como classes de equivalência de frações (entendendo como classes de equivalência o conjunto de todas as frações que descrevem as mesmas relações entre a parte considerada e o todo) (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p. 117) Tradução nossa⁹.

A equivalência de frações foi um dos conceitos que os alunos apresentaram grandes dificuldades iniciais, talvez, resultado da falta de compreensão de alguns significados das frações. Um tipo de questão que os alunos apresentaram dificuldades em relação à equivalência de frações é ilustrado na figura 14.

⁹ La importancia de idea de equivalencia de fracciones se debe al papel clave que juega en diversos aspectos: en la relación de orden (ordenar dos fracciones, insertar varias fracciones entre dos fracciones dadas), en el desarrollo de los algoritmos de la suma y resta de fracciones de denominador diferentes. En un nivel más elevado, la conceptualización del número racional como clases de equivalencia de fracciones (entendido como clase de equivalencia el conjunto de todas las fracciones que describen la misma relación entre la parte considerada y el todo).

Figura 14 - exemplo de questão sobre o conteúdo de equivalência de frações.

Uma orquestra é formada por quatro famílias de instrumentos: as cordas, as madeiras, os metais e a percussão. Na ilustração temos uma orquestra formada por 70 instrumentistas, assinale a alternativa que representa o número de instrumentistas que tocam viola em relação ao total de instrumentistas:

0) $\frac{1}{10}$ → Alternativa correta

1) $\frac{2}{10}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 114 no primeiro teste.

2) $\frac{7}{10}$

3) $\frac{1}{7}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 114 no segundo e terceiro teste.

4) $\frac{10}{7}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

Com simplificações de frações os alunos apresentaram dificuldades, no exemplo da figura 15, o Aluno 110 realizou quatro testes até ser aprovado neste conceito, e a questão ilustrada na figura, por coincidência, foi sorteada em todos os testes, e o aluno não marcou a resposta correta em nenhum deles.

Figura 15 - exemplo de questão de simplificação de frações em que o Aluno 110 apresentou dificuldades.

Assinale a alternativa com a forma irredutível da fração $\frac{8}{72}$:

0) $\frac{1}{2}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 110 no segundo, terceiro e quarto teste.

1) $\frac{1}{4}$

2) $\frac{1}{9}$ → Alternativa correta

3) $\frac{2}{18}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 110 no primeiro teste.

4) $\frac{1}{5}$

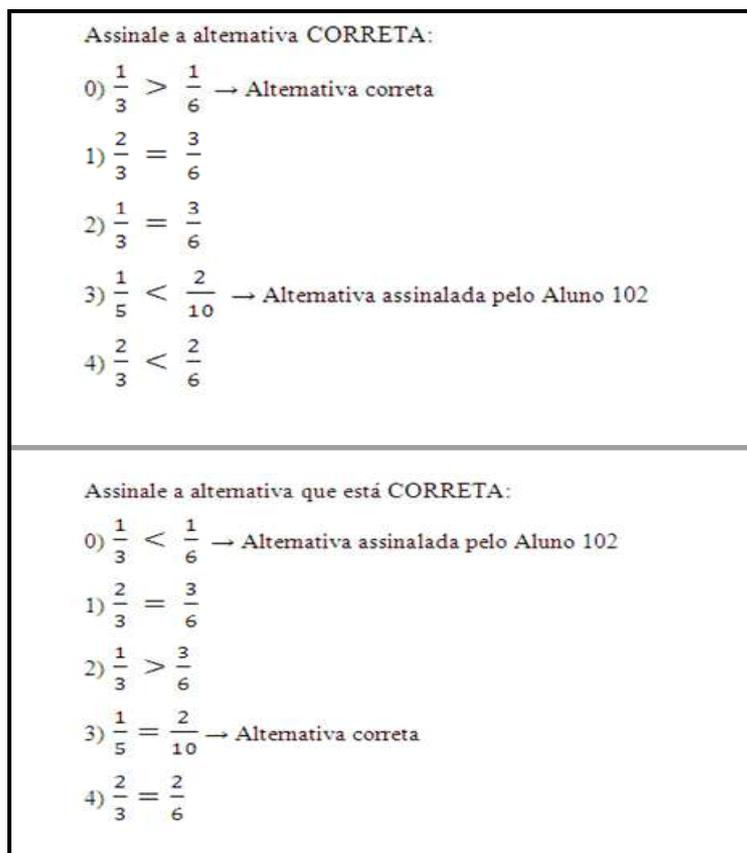
Fonte: banco de dados do SIENA.

4.4 Conceito Comparação de Frações

Para realizar comparações de frações, o aluno necessita utilizar os seus conhecimentos sobre o significado das frações e a ideia de frações equivalentes, pois uma das aplicações da ideia de frações equivalentes se manifesta, quando se quer comparar duas frações e determinar se uma é menor, igual ou maior que outra (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988). A comparação de frações trabalha também a ideia de ordem.

Na figura 16, são apresentados dois exemplos de questões do primeiro teste adaptativo do Aluno 102, onde se percebeu a dificuldade de compreender a fração como um número, essa dificuldade foi apresentada, também, por outros alunos. Analisando as respostas dadas pelo Aluno 102, tem-se a impressão que ele utilizou a ideia de Números Naturais, tratando numeradores e denominadores de forma independente. Dos quinze alunos que responderam questões iguais ou semelhantes a essa, somente cinco não apresentaram dificuldades, sendo que as respostas assinaladas na sua quase totalidade, foram idênticos às do Aluno 102.

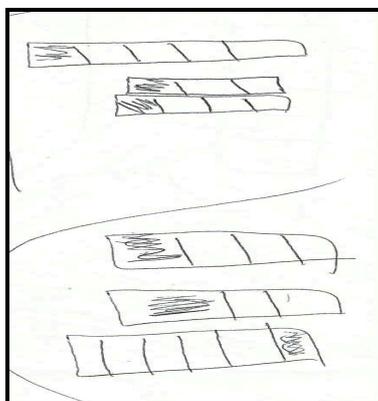
Figura 16 - exemplos de questões de comparação de frações em que o Aluno 102 apresentou dificuldades.



Fonte: banco de dados do SIENA.

Nas anotações do Aluno 106, percebe-se a dificuldade de se desenhar a figura com partes congruentes, quando se representa frações de forma contínua, como na figura 17. Isso talvez seja um obstáculo aos alunos que utilizam esse tipo de recurso de representação para fazer comparações de frações, sendo possível ser a causa dos erros envolvendo esse conceito.

Figura 17 - representação de frações na forma contínua feitas pelo Aluno 106.



Fonte: registros do Aluno 106.

Analisando as anotações dos alunos e comparando com as questões respondidas, na figura 18, apresentam-se as anotações utilizadas pelo Aluno 110 para resolver uma questão envolvendo comparação de frações. Pode-se verificar que o aluno utilizou como recurso de comparação o desenho de “círculos divididos em partes iguais”. Analisando os desenhos dos “círculos”, é possível supor que o fato de não estarem desenhados adequadamente pode ter induzido o aluno ao erro na resolução da questão.

Figura 18 - questão envolvendo o conceito de comparação de frações e anotações escrita pelo Aluno 110.

Considere as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ de uma mesma figura. Podemos afirmar então que:

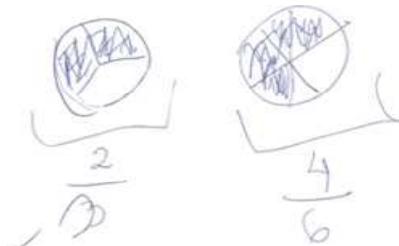
0) $\frac{2}{3} < \frac{4}{6}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 110

1) $\frac{2}{3} > \frac{4}{6}$

2) Representam a mesma região da figura. → Alternativa correta

3) Não representam a mesma região da figura.

4) Não é possível comparar.



Fonte: banco de dados do SIENA e anotações do Aluno 110.

Na figura 19, pode-se observar outra questão semelhante ao exemplo anterior, onde o Aluno 110 utilizou-se do mesmo recurso de desenho e novamente respondeu erroneamente.

Figura 19 - questão envolvendo o conceito de comparação de frações e anotações escrita pelo Aluno 110

Considere as frações $\frac{6}{9}$ e $\frac{8}{12}$ de uma mesma figura. Podemos afirmar então que:

- 0) $\frac{6}{9} < \frac{8}{12}$
- 1) $\frac{6}{9} > \frac{8}{12}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 110
- 2) Representam a mesma região da figura. → Alternativa correta
- 3) Não representam a mesma região da figura.
- 4) Não é possível comparar.

Fonte: banco de dados do SIENA e anotações do Aluno 110.

4.5 Conceito Adição e Subtração de Frações

Para Llinares e Sánchez (1988), pode-se conectar os algoritmos relativos às operações com as frações aos processos de resolução de problemas, e a um manejo dos símbolos. Assim começa-se o caminho de introdução à Álgebra, sendo o conjunto dos Números Racionais o primeiro caso de conjunto numérico manejado pelos alunos em que as quatro operações não tem restrições.

A introdução às operações de adição e subtração se inicia com situações problemas envolvendo frações com denominadores iguais, para posteriormente trabalhar com frações com denominadores diferentes.

Apesar da dificuldade de interpretação em algumas questões, como nas que envolviam resolução de problemas, em outras, foi possível identificar que os alunos cometeram um dos erros comuns na adição e subtração de frações, que consiste na soma independentemente dos numeradores e dos denominadores. A origem do erro pode estar na semelhança de notação que existe entre as frações e os Números Naturais, ou, se os alunos já foram apresentados ao algoritmo da multiplicação, podem estar mesclando ambos os algoritmos (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p.161). As respostas das questões ilustradas nas figuras 20 e 21, os Alunos 110 e 114 respectivamente, apresentam esse tipo de erro.

Figura 20 - exemplo de erro cometido pelo Aluno 110.

Resolva e assinale a resposta correta. Qual o resultado de $\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$?

0) $\frac{7}{6}$

1) $\frac{2}{6}$

2) $\frac{7}{12}$ → Alternativa correta

3) $\frac{2}{2}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 110

4) $\frac{4}{10}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

Figura 21 - exemplo de questão de nível fácil com adição de frações em que o Aluno 114 apresentou dificuldades.

Resolva e assinale a resposta correta. Qual o resultado de $\frac{3}{5} + \frac{3}{5}$?

0) $\frac{5}{3}$

1) $\frac{3}{5}$

2) $\frac{6}{10}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 114.

3) $\frac{6}{5}$ → Alternativa correta

4) $\frac{5}{6}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

Um fato que chama a atenção é que alguns alunos utilizavam o Mínimo Múltiplo Comum (MMC) até para resolver operações simples como nas anotações do Aluno 113 na figura 22.

dificuldade do aluno em encontrar o MMC. Ao que parece, ele fez 2×3 e 2×3 e depois somou os resultados, obtendo 12 como resposta.

4.6 Conceito Multiplicação e Divisão de Frações

Segundo Llinares e Sánchez (1988), as operações com frações nem sempre parecem tão naturais aos alunos, e muitas vezes são evitadas e substituídas por outros procedimentos em busca da solução. Ainda para os autores, o primeiro contato com a operação de multiplicar vinculada às frações aparece ao representar a soma de frações iguais (número natural por fração). Os usos de metodologias que integram problemas utilizando representações geométricas auxiliam o aluno a entender o conceito e o algoritmo da multiplicação de frações.

Nos testes adaptativos com as operações de multiplicação e divisão, além das dificuldades com as questões de resolução de problemas, merece destaque também a grande quantidade de erros em questões envolvendo os algoritmos das operações. Muitas vezes, os alunos inverteram as operações de multiplicação e divisão, como é apresentado na figura 24, em questões respondidas pelo Aluno 113.

Figura 24 - exemplo de questões envolvendo a reta numérica em que o Aluno 113 apresentou dificuldades.

Qual o resultado da operação $5 + \frac{1}{2}$?

0) 10 → Alternativa correta

1) $\frac{5}{2}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 113

2) $\frac{1}{7}$

3) $\frac{6}{2}$

4) $\frac{4}{2}$

Qual o resultado da operação $\frac{3}{7} \div \frac{1}{3}$?

0) $\frac{3}{21}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 113

1) $\frac{4}{10}$

2) $\frac{2}{4}$

3) $\frac{14}{21}$

4) $\frac{9}{7}$ → Alternativa correta

Qual o resultado da operação $\frac{2}{5} \times \frac{3}{2}$?

0) $\frac{4}{15}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 113

1) $\frac{5}{10}$

2) $\frac{5}{7}$

3) $\frac{3}{5}$ → Alternativa correta

4) $\frac{5}{3}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

A multiplicação é a operação em que os alunos apresentaram um bom desempenho; é possível que isto esteja ligado a possibilidade de resolução semelhante aos Números Naturais, e os alunos resolvem o algoritmo como uma regra, numerador multiplica numerador e denominador multiplica denominador. Porém a divisão foi a

operação em que os alunos mais se confundiram, em muitas atividades operaram a divisão como se fosse uma multiplicação. Assim como na multiplicação, o entendimento da resolução do algoritmo da divisão está ligado à regra da inversão de frações ou multiplicação em “x”. De todas as operações, o algoritmo da divisão é o mais difícil para os alunos, segundo Llinares e Sánchez (1988).

4.7 Conceito Resolução de Problemas com Frações

As dificuldades nesse conceito foram em relação a interpretação do problema, observando as anotações e as dúvidas dos alunos, foi possível perceber que muitos resolviam as operações corretamente, mas não interpretavam a resposta de forma adequada. Na figura 25 apresenta-se um exemplo de questão envolvendo resolução de problemas.

Figura 25 - exemplo de uma questão o Aluno 107.

Helena recebeu uma encomenda de 60 toalhas. Ela fez $\frac{1}{3}$ do total das toalhas na primeira semana, $\frac{1}{4}$ na segunda semana e na terceira semana completou a encomenda. Quantas toalhas Helena fez na terceira semana?

0) 10
 1) 20 → Alternativa assinalada pelo Aluno 107
 2) 25 → Alternativa correta
 3) 30
 4) 35

Fonte: banco de dados do SIENA.

A razão, que muitos alunos apresentam em questões envolvendo a resolução de problemas, segundo Dante (2010), é porque a resolução tem sido, ao longo dos anos, um dos tópicos mais difíceis de serem trabalhados em sala de aula. É muito comum que os alunos saibam efetuar todos os algoritmos (adição, subtração, multiplicação e divisão), conheçam muitas fórmulas, mas não consigam resolver um problema que envolva um ou mais desses algoritmos ou fórmulas. Essa dificuldade apresentada na resolução de problemas, com operações de adição e subtração se repetiu também nas operações de multiplicação e divisão (figura 26).

Figura 26 - exemplo de questões de resolução de problema em que o Aluno113 apresentou dificuldade.

A milionária Dona Rica Ricona doou a uma Organização Não Governamental (ONG) de combate à fome no Brasil, três quartos da sua fortuna, avaliada em 12 milhões de reais. Quantos milhões de reais foram doados a ONG?

0) 3 milhões de reais → Alternativa assinalada pelo Aluno 113

1) 4 milhões de reais

2) 5 milhões de reais

3) 7 milhões de reais

4) 9 milhões de reais → Alternativa correta

Fonte: banco de dados do SIENA.

Considerações finais

Analisando os alunos individualmente foi possível verificar através dos testes adaptativos suas dificuldades, erros e, também, suas evoluções na compreensão de cada conceito trabalhado no conteúdo de frações¹⁰.

Em relação ao desempenho dos alunos, foi possível identificar que no Conceito de Frações, Equivalência e Simplificação de Frações e Comparação de Frações foram aqueles em que os alunos apresentaram maiores dificuldades, tendo um baixo índice de aprovação nos testes. Sendo que em Conceitos de Frações muitos alunos apresentaram dificuldades com os significados das frações como quociente, razão e parte-todo, principalmente na sua representação de forma discreta. Por consequência a falta de entendimento dos alunos com as ideias básicas de frações acabam apresentando dificuldades na compreensão do conceito de equivalência.

A principal dificuldade no conteúdo sobre comparação de frações estava no fato de os alunos tratarem numerador e denominador de forma independente, como se fossem dois números. Os alunos apresentaram um bom desempenho nos conceitos envolvendo as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com frações.

¹⁰ Os dados completos da pesquisa estão disponíveis na dissertação de Monteiro (2013).

Segundo Llinares e Sánchez (1988), há erros que aparecem de forma aleatória, por descuido, distração, etc., e outros erros se devem ao fato de que, simplesmente, o aluno não sabe a resposta correta e propõe um resultado ao acaso. Há outros tipos de erros que se devem a não compreensão total do conceito ou à aplicação de procedimentos errôneos, os quais podem ser devido à elaboração de métodos pessoais alternativos aos ensinados pelo professor ou pela modificação/esquecimento de algum passo de um algoritmo ensinado.

Foi possível reconhecer muitos dos erros e dificuldades anteriormente assinalados por Llinares e Sánchez (1988) nos testes e nas anotações feitas pelos alunos. Então cremos que apoiar o desenvolvimento da sequência didática nas pesquisas desses autores auxiliou identificar as principais dificuldades na aprendizagem de frações. Especificamente com esse grupo de alunos, a partir dos estudos de recuperação apresentaram uma melhora na compreensão deste conteúdo superando muito das dificuldades iniciais apresentadas.

Todo o ambiente de investigação no SIENA (grafo, testes adaptativos e sequências didáticas para cada conceito do grafo) encontra-se disponível para consulta no endereço: <http://siena.ulbra.br>.

Referências

- BARROSO, J. M. *Projeto Araribá Matemática*. 1ª. ed. São Paulo: Moderna, v. 1, 2006.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais*, Brasília, 1997.
- BRASIL. Ministério da Educação. *Parâmetros Curriculares Nacionais*, Brasília, 1998.
- CAMPOS, T. M. de M.; SILVA, A. F. G.; PIETROPAOLO, R. C. Considerações a respeito do ensino e aprendizagem de representações fracionárias de números racionais. In: GUIMARÃES, G.; B.; ROSA, R. E. S. (Org.). *REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DE ESCOLARIZAÇÃO*. RECIFE: SBEM, 2009. Cap. 9, p. 131-139.
- CENTURIÓN, M.; JAKUBOVIC, J.; LELLIS, M. *Matemática na medida certa*. 9ª. ed. São Paulo: Scipione, 2004.
- COSTA, D. R. *Métodos estatísticos em teste adaptativos informatizados*. 107 f. Dissertação (mestrado de Estatística) Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2009.
- DANTE, L. R. *Aprendendo Sempre Matemática*. 1ª. ed. São Paulo: Ática, v. 1, 2009.

DANTE, L. R. *Formulação e resolução de problemas de Matemática teoria e prática*. 1ª. ed. São Paulo: Ática, 2010.

DOLZ, J.; SCHNEUWLY, B. *Gêneros orais e escritos na escola*. Campinas: Mercado das Letras, 2004.

FILATRO, A. *Design Instrucional na prática*. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

GIMÉNEZ, J.; BAIRRAL, M. A. *Frações no currículo do Ensino Fundamental conceitualização, jogos e atividades lúdicas*. Seropédica: GEPEM/EDUR, 2005.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI JR., J. R. *A conquista da Matemática*. São Paulo: FTD, 2007.

GIOVANNI, J. R.; GIOVANNI JR., J. R. *Matemática Pensar e Descobrir*. 1ª. ed. São Paulo: FTD, 2002.

GROENWALD, C. L. O.; MORENO, L. R. Formação de Professores de Matemática: uma proposta de ensino com novas tecnologias. *Acta Scientiae*, v. 8, n. 2, p. 19-28, julho/dezembro 2006.

GROENWALD, C. L. O.; MORENO, L. R.. *Informação e Recuperação de conteúdos: uma experiência em Matemática*. IV Congresso Internacional de Ensino de Matemática. Canoas: [s.n.]. 2007.

GUELLI, O. *Matemática uma aventura do pensamento 5ª série*. 8ª. ed. São Paulo: Ática, v. 1, 1999.

LEMONS, A. V.; SEIBERT, T. E.; GROENWALD, C. L. O. Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem com o tema multiplicação nos Números Naturais. *Revista de Iniciação Científica da ULBRA*, Canoas, p. 165-176, 2011.

LLINARES, S. C.; SÁNCHEZ, M. V. G. *Frações la relacion parte-todo*. Madrid: Síntesis, 1988.

MONTEIRO, A. B. Estudos de recuperação do conteúdo de frações com o uso de tecnologias da informação e comunicação. 218f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática), Universidade Luterana do Brasil. Canoas. 2013.

MOREIRA, M. A. *Mapas Conceituais e Diagramas de V*. Instituto de Física. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, 2006.

NOVAK, J.; GOWIN, D. B.. *Apriendendo a aprender*. Barcelona: Martinez Roca, 1988.

NUNES, K. S.; GROENWALD, C. L. O.; SEIBERT, T. E.; HOMA, A. I. R. *Inovando o currículo de Matemática através da incorporação das Tecnologias da Informação e Comunicação – ambiente de investigação com o tema Números Decimais*. XVIII Salão de Iniciação Científica e Tecnológica. Canoas: ULBRA. 2012.

NUNES, T.; BRYANT, P. *Crianças fazendo Matemática*. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

RIBEIRO, J. S. *Projeto Radix: matemática 6º ano*. 2. ed. São Paulo: Scipione, 2009.

SANDS, W. A.; WATERS, B. K. *Computerized adaptive testing: from inquiry to operation*. Washington: American Psychological Association, 1997.

SEIBERT, L. G.; GROENWALD, C. L. O. *Ambiente de investigação uma proposta em um contexto B-Learning*. XI Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Lajeado: Univates. 2012. p. 177-184.

SPINELLI, W.; SOUZA, M. H. S. *Matemática Série Brasil*. São Paulo: Ática, v. 4, 2007.

VASCONCELOS, I. C. P. *Números Fracionários: a construção dos diferentes significados por alunos da 4ª a 8ª séries de uma escola do Ensino Fundamental*. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, p. 104. 2007.

WAINER, H. *Computerized adaptive testing: aprimer*. New Jersey: Lawrence Erlbaum, 2000.

ALEXANDRE BRANCO MONTEIRO. Bolsista de Doutorado da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio Grande do Sul (FAPERGS) / Coordenação de Aperfeiçoamento ao Pessoal de Nível Superior (CAPES) no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA). Mestre em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM/ULBRA). Graduado em Licenciatura em Matemática (ULBRA). Áreas de atuação nos seguintes temas: Educação Matemática, Tecnologias da Informação e Comunicação, Ensino e Aprendizagem em Matemática.

CLAUDIA LISETE OLIVEIRA GROENWALD. Possui graduação em Matemática pela Universidade do Vale do Rio dos Sinos (UNISINOS), especialização em Matemática pela UNISINOS, doutora em Ciências da Educação pela Universidade Pontifícia de Salamanca, Espanha, título reconhecido pela Universidade de São Paulo (USP). Pós-doutorado pela Universidade de La Laguna, Espanha. Atualmente é professora titular da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA). Atua no curso de Matemática Licenciatura e como coordenadora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da ULBRA. Tem experiência na área de Educação Matemática, com ênfase na formação de professores, atuando principalmente nos seguintes temas: Educação Matemática, Currículo de Matemática, Tecnologias da Informação e Comunicação, Formação Continuada, Ensino e Aprendizagem em Matemática.

DIFICULDADES NA APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES...

Recebido: 17 de março de 2014

Revisado: 04 de junho de 2014

Aceito: 04 de agosto de 2014