ALEXANDRIA

ALEXANDRIA
Revista de Educação em Ciência e Tecnologia

Função Afim na Educação Básica: Estratégias e Ideias Base Mobilizadas por Estudantes Mediante a Resolução de Tarefas Matemáticas

Linear Function in Secondary School: Strategies and fundamental ideas Mobilized by Students by Solving Mathematical Tasks

Veridiana Rezende[a,b]; Clélia Maria Ignatius Nogueira[b,a]; Tamires Vieira Calado[b]

a Colegiado de Matemática, Universidade Estadual do Paraná, Campo Mourão, Brasil - rezendeveridiana@gmail.com
b Universidade Estadual do Oeste do Paraná, Cascavel, Brasil - voclelia@gmail.com, tamirescalado@hotmail.com

Palavras-chave:
Ensino de matemática. Educação básica. Função afim. Ideias base. Campo conceitual.

Resumo: Considerando que a aprendizagem de um conceito ocorre durante o processo escolar, em decorrência das diversas situações matemáticas vivenciadas pelos sujeitos e, que, em se tratando do conceito de função afim, a constituição pelo aluno de suas ideias base (variável, correspondência, dependência, regularidade e generalização) deve ser proporcionada a partir dos Anos Iniciais, e desenvolvidas no decorrer da escolarização, relatamos neste texto uma investigação com o objetivo de identificar se e como essas ideias base são mobilizadas por estudantes brasileiros dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio. Neste contexto, analisamos as estratégias de resolução de três tarefas sobre função afim, sendo uma tarefa do Campo Conceitual Multiplicativo, resolvida pelos seis sujeitos do Ensino Fundamental, e duas tarefas envolvendo problemas mistos, uma aplicada aos doze participantes da investigação e a outra somente aos seis alunos do Ensino Médio. Os resultados apontam principalmente dificuldades em relação à generalização.

Keywords:
Mathematics teaching. Basic education. Afim function. Base ideas. Conceptual field.

Abstract: Considering that the learning of a concept occurs during the school process, due to the different mathematical situations experienced by the subjects, and that, when it comes to the concept of related function, the student's constitution of his basic ideas (variable, correspondence, dependency, regularity and generalization) must be provided from the Initial Years, and developed during schooling, we report in this text an investigation with the objective of identifying if and how these basic ideas are mobilized by Brazilian students of the final years of Elementary Education and from highschool. In this context, we analyzed the strategies for solving three tasks related to each other, being a task of the Multiplicative Conceptual Field, solved by the six subjects of Elementary School, and two tasks involving mixed problems, one applied to the twelve participants of the investigation and the other only to the six high school students. The results point mainly difficulties with generalization.

Introdução

O conceito de função nasceu de problemas práticos, basicamente da necessidade de explicar os fenômenos naturais, mas evoluiu e atingiu o grau de generalidade atual a partir de necessidades internas da própria Matemática, como o conceito de continuidade, por exemplo.

Explicar um fenômeno é dar o porquê da alteração de suas qualidades, mediante a observação. “A observação mostra que há certos fenômenos que apresentam *regularidades*; isto é, comportamento idêntico, desde que as condições iniciais sejam as mesmas” (CARAÇA, 1984, p.119). A partir das constatações das regularidades é possível fazer previsões e até mesmo confirmar, pela via da experimentação, os resultados das observações realizadas, estabelecendo leis naturais.

O conceito de função é, segundo Eves (1995), essencial para a Matemática, por permear grande parte dessa ciência. Este conceito também é importante para diversos outros ramos do conhecimento, particularmente aqueles para os quais o quantitativo e a medida são fundamentais, como a Física e outras Ciências Naturais, por exemplo. Para Caraça (1984), o estado propriamente científico de cada ramo só começa quando nele se introduz a medida e o estudo da variação quantitativa como explicação da evolução qualitativa. E foi deste estudo da variação quantitativa para explicar a mudança de qualidade de um fenômeno que emergiu o conceito de função.

Este conceito levou mais de 20 séculos para ser formalizado, desde seus primeiros indícios nas tabelas que aparecem nos escritos matemáticos dos babilônios, por volta dos anos 2000 a. C, até o final do séc. XIX, com a definição moderna dada por Riemann – Dirichlet sobre o conceito de função: “Sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números. Diz-se que y é função de x e escreve-se $y = f(x)$, se entre as duas variáveis, existe uma correspondência unívoca, no sentido de x para y , $x \rightarrow y$ ”.

No início do século XX, com a Teoria dos Conjuntos de Cantor já plenamente desenvolvida, surge a definição de função como um subconjunto de pares ordenados (x, y) do produto cartesiano $A \times B$ em que A é o seu domínio e B seu contradomínio, de tal forma que para todo x em A exista um único y de B tal que y seja a imagem de x pela f .

Dito de outra forma: $F = \left\{(x, y) \in A \times B \frac{\square}{\square} \forall x \in A\ \exists!\ y \in B \frac{\square}{\square} y = f(x)\right\}$.

Esta última definição, essencialmente abstrata, não possibilita enxergar a principal característica que torna este conceito o mais importante da Matemática: a dinamicidade. É o conceito de função, como forma de estabelecer a correspondência entre duas grandezas, explícito na definição estabelecida por Riemann-Dirichlet que possibilita compreender a “transformação” de x em y pela associação, correspondência ou expressão algébrica que permite vislumbrar a mobilidade, o dinamismo da Matemática.

Notamos que na definição de Riemann - Dirichlet aparece a palavra “conjunto”; entretanto, a noção implícita ainda era de variáveis representativas de conjuntos numéricos já que ainda não existia a “teoria dos conjuntos”. Entre os anos de 1874 e 1897, ocorria a criação de uma “Teoria dos Conjuntos” que foi iniciada por Cantor (1845 – 1918). A partir dessa teoria, as funções eram definidas, como estabelecido anteriormente, em termos de pares ordenados de elementos de conjuntos, o que não necessariamente implica no caso desses elementos serem números.

A criação de uma “Teoria dos Conjuntos”, a evolução do formal e a aplicação do conceito função em maior número de situações e em vários campos do conhecimento humano, serviram para filtrar do conceito as vinculações com as situações particulares, práticas e específicas, inerentes a ele, quando da evolução natural e inicial do seu estudo.

A definição de função adquiriu, então, uma forma eminentemente matemática e o conceito de função possui, hoje, uma amplitude tal que independe da natureza do campo em que ele é aplicado.

Apenas considerando o longo período necessário para que o conceito de função fosse construído e chegasse à forma em que é apresentado aos estudantes já seria possível admitir que sua aprendizagem apresentaria dificuldades. Afinal, mesmo que a ontogênese de um conceito não recapitule fielmente sua sociogênese, ainda assim as dificuldades enfrentadas pela humanidade para alcançar a formalização final apontam que o conceito de função demanda muito tempo para ser construído pelos alunos. Além disso, por envolver diversos outros conceitos, propriedades, símbolos, representações, diferentes situações, este conceito é complexo e alunos de diferentes níveis de ensino e até mesmo por professores apresentam dificuldades em sua compreensão.

Dentre os conceitos necessários para a construção do conceito de Função, segundo Nogueira (2014), são de fundamental importância àqueles que podem ser considerados suas ideias base, a saber, os conceitos de variável, de dependência, de regularidade e de generalização. Associada de maneira implícita à ideia de dependência está a de correspondência, de maneira que alguns autores a consideram também como ideia base.

Nogueira (2014) afirma que o ensino de funções ficou restrito pelo menos até à metade do século XIX ao Ensino Superior e, desde a década de 1960, com o movimento da Matemática Moderna, passou-se a recomendar o ensino desse conceito a partir do que denominamos atualmente como o terceiro ciclo do Ensino Fundamental. Posteriores reformas o conduzem para o primeiro ano do Ensino Médio. No Ensino Superior, diversas áreas e disciplinas adotam estudos implícitos ou explícitos, aprofundados ou não, sobre funções.

Entretanto, a partir da década de 1990 e, de maneira mais efetiva, após o estabelecimento dos Parâmetros Curriculares Nacionais (1999), houve a conscientização de que as ideias base de função podem ser abordadas desde a Educação Infantil, com ideias de dependência qualitativa (o filhote depende da mãe), nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, em problemas de estruturas multiplicativas em que são iniciadas as relações de dependência quantitativa, à exemplo das tabelas babilônicas. No 7º ano estudam-se as equações e inequações, ou seja, as variáveis, o que na História acontece no século XI. No 8º ano aparecem as expressões algébricas e suas operações, acompanhando a consolidação da linguagem algébrica na História da Matemática, que ocorre no século XVI. No 9º ano tem início o ensino formal de funções, particularmente da função afim, ou seja, a representação analítica de função, cujos primeiros registros datam do século XVII. A ampliação dos tipos de funções e a formalização do conceito de função que na História da Matemática acontecem no séc. XIX (Riemann/Dirichlet) e início do século XX (Cantor) acontecem no fechamento da Educação Básica, no ensino Médio.

Nesse sentido, no que diz respeito ao conceito de função, algumas pesquisas (BRAGA, 2006; PAVAN, 2010; NOGUEIRA, 2014) e os mais recentes documentos como a Base Nacional Comum Curricular – BNCC (BRASIL, 2017; 2018), mencionam como essencial que o estudo de noções base do conceito de função seja iniciado durante o desenvolvimento do pensamento algébrico a partir dos Anos Iniciais.

Ainda, de acordo com a BNCC (BRASIL, 2017), é imprescindível que algumas dimensões do trabalho com a Álgebra estejam presentes no processo de ensino desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental, tais como, as ideias de regularidade, descrição de padrões e propriedades da igualdade. Já nos Anos Finais desse nível de ensino, os alunos devem compreender os significados de uma variável numérica em uma expressão, estabelecer uma generalização de uma propriedade, investigar a regularidade de uma sequência numérica, indicar um valor desconhecido em uma sentença algébrica e estabelecer a variação entre duas grandezas.

Desenvolvidas as habilidades mencionadas no Ensino Fundamental, no 9º ano desse nível de ensino o aluno deve ter acesso às funções, suas representações numéricas, algébricas e gráficas, "[...] compreendendo as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numéricas, algébricas e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis" (BRASIL, 2017, p. 269). Já no Ensino Médio a identificação de regularidades e padrões exige, além de raciocínio, a representação e a comunicação para expressar as generalizações, bem como a construção de uma argumentação consistente para justificar o raciocínio utilizado, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização (BRASIL, 2018, p. 519).

Com o objetivo de compreender como os conhecimentos sobre funções, em particular sobre a Função Afim são constituídos durante o processo de escolarização, o GEPeDiMa[1] – Grupo de Estudos em Didática da Matemática vem desenvolvendo uma investigação que busca mapear o Campo Conceitual das Funções, na perspectiva de Vergnaud (1990). Neste momento, todas as pesquisas em desenvolvimento estão restritas à função afim e, para isso, o GEPeDiMa busca, dentre outros aspectos, conhecer o desempenho dos alunos em diferentes situações relacionadas a Função Afim, os tipos de atividades mais bem compreendidas por eles, assim como aquelas em que eles têm mais dificuldades. Assim, uma das principais pesquisas do GEPeDiMa foi delineada com o objetivo geral de analisar os conhecimentos mobilizados por alunos brasileiros que finalizam o Ensino Fundamental I e II, Médio e Licenciatura em Matemática e em Pedagogia, e por alunos norte americanos de níveis de ensino correspondentes.

Apresentamos, neste texto, um recorte da investigação que teve como objetivo investigar se e como ideias base sobre função são mobilizadas por estudantes brasileiros de 9º ano do Ensino Fundamental e 3º ano de Ensino Médio, enfatizando, particularmente os resultados referentes à descrição geral de padrões ou seja, a ideia base de generalização.

Fundamentação teórica

Para este trabalho, partimos do princípio que para o estudo e a aprendizagem de um conceito são necessários diversos outros conceitos, situações, símbolos, representações, propriedades, teoremas, interligados, formando o que o pesquisador denomina por Campo Conceitual. Consideramos, ainda com base na teoria dos Campos Conceituais – TCC (VERGNAUD, 1990), a importância da reflexão do aluno para a aprendizagem matemática passível de ser depreendida dos conhecimentos implícitos mobilizados em ação, ou seja, durante a resolução de tarefas.

No que diz respeito ao Campo Conceitual das funções citamos algumas ideias matemáticas que o compreendem, tais como: números (reais, irracionais, racionais, inteiros), conjuntos, continuidade, infinito, potência, raízes da função, polinômios, equações, variável, dependência, correspondência, generalização, domínio, imagem, contradomínio, pontos de máximo e mínimo, plano cartesiano, relação, taxa de variação, proporcionalidade, eixos coordenados, diferentes tipos de funções, entre muitos outros.

Além dos conceitos também fazem parte do campo conceitual diferentes situações matemáticas, que dizem respeito a *diferentes estruturas*, diferentes representações (gráfica,

[1] Página do GEPeDiMa: http://prpgem.unespar.edu.br/gepedima

numérica, algébrica, geométrica, linguagem natural), bem como diferentes símbolos necessários para expressar os conceitos e ideias matemáticas relacionados às funções.

No decorrer de suas pesquisas, Vergnaud estruturou de modo bem definido dois Campos Conceituais – o das Estruturas Aditivas e o das Estruturas Multiplicativas. O referido pesquisador estabeleceu classes de situações para estes campos conceituais, de modo que elas estão relacionadas às operações de adição/subtração e multiplicação/divisão, respectivamente.

Nos estudos de problemas que podem ser resolvidos com operações de adição ou subtração, ou ainda, uma combinação destas operações, Vergnaud (2009) verificou que “As relações aditivas são relações ternárias que podem ser encadeadas de diversas maneiras e resultar em uma grande variedade de estruturas aditivas” (2009, p. 200).

Já o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas é aquele composto por um conjunto de situações que requerem uma ou várias multiplicações ou divisões e um conjunto de conceitos, teoremas e representações que permitem dominar essas situações. Segundo Gitirana *et al*. (2014), há diferentes conceitos que permitem analisar esses tipos de situações das estruturas multiplicativas, como por exemplo: proporção simples, proporção múltipla, fração, razão, razão escalar direta e inversa, funções linear, bilinear, e não linear, número racional, taxa, produto cartesiano, área, volume, combinação, entre outros.

Além dos problemas dos Campos Aditivo e Multiplicativo, Vergnaud (2009) também considera aquelas situações que denomina de *problemas mistos, e se referem às* situações que envolvem pelo menos uma adição ou subtração e ao menos uma multiplicação ou divisão.

Vergnaud (2009, p. 189) justifica a importância dos problemas mistos, pois “[...] colocam em jogo relações de tipo multiplicativo (correspondência entre quantidade de natureza diferente) e relações de tipo aditivo (lucro = preço de venda – preço de compra). Sua própria simplicidade vai nos permitir ir um pouco mais longe na algebrização dos diferentes caminhos possíveis”.

No que concerne aos problemas de função afim, foco deste trabalho, Miranda (2019) apresenta em sua dissertação de mestrado uma classificação e caracterização dos problemas de função afim. A pesquisadora parte do pressuposto que os problemas de função afim são problemas do tipo misto ou problemas pertencentes ao Campo Conceitual Multiplicativo, no caso do coeficiente linear da função ser igual a zero, ou seja, se a função for linear do tipo: $f(x) = ax$.

Assim como Miranda (2019), consideramos que as situações relacionadas ao conceito de função afim ou pertencem somente ao Campo Conceitual Multiplicativo, assumindo a sua forma linear: $f(x) = ax$, ou são problemas do tipo misto, relacionados à expressão $f(x) = ax + b$, que envolvem imbricações entre os campos conceituais aditivos e multiplicativos. Neste artigo, propomos três tarefas para os alunos resolverem, sendo que a primeira tarefa pertence ao Campo Multiplicativo, e as duas últimas são do tipo problemas misto.

Ainda, no que diz respeito às situações presentes no Campo Conceitual das funções, é preciso considerar as ideias base desse conceito (CARAÇA, 2005; NOGUEIRA, 2014), essenciais para a sua compreensão, a saber as ideias de variável, correspondência, dependência, regularidade e generalização, conforme descritas a seguir.

A ideia de *variável* se refere a um elemento qualquer de um conjunto, que geralmente é representado por uma letra. A noção de variável é uma das mais difíceis para os alunos, pois se trata de um número qualquer de determinado conjunto, mas não é especificamente nenhum dos números desse conjunto (CARAÇA, 2004; TINOCO, 2004).

A variável pode desempenhar papéis distintos dependendo da situação. Queiroz (2008) fez um estudo sobre os diversos usos das variáveis e estabeleceu que, dependendo das situações, as variáveis podem assumir o papel de incógnita (termo desconhecido), de parâmetros (números genéricos) ou, ainda, como variáveis em relacionamento funcional, sendo que para cada um destes níveis, a simbolização, a manipulação e a interpretação da variável são distintas.

Para a compreensão das variáveis em um relacionamento funcional, cenário deste trabalho, é necessário, segundo Queiroz (2008, p. 38), "[...] reconhecer situações em que ocorram a variação simultânea das mesmas, bem como o aspecto relacional entre ambas. Estas circunstâncias podem envolver informações representadas em tabelas, gráficos, expressões analíticas ou problemas verbais", daí a importância da oferta de tarefas que contemplem diferentes situações, formas de representação, etc.

A *correspondência* é um dos aspectos essenciais da Matemática e uma das primeiras formas de pensamento matemático a se manifestar, como, por exemplo, na comparação da quantidade de objetos de duas coleções, substrato da contagem de objetos, que é feita por uma criança, pelo apontamento do dedo (ou olhar) a cada um dos objetos a serem contados, ao mesmo tempo em que recita a sequência de palavras-número, um, dois, três e assim sucessivamente, até esgotar os objetos da coleção. Em outras palavras, "[...] podemos dizer que a contagem se realiza fazendo corresponder sucessivamente, a cada objeto da coleção, um número da sucessão natural" (CARAÇA, 1984, p. 6).

A *dependência* expressa a relação entre grandezas variáveis que irá caracterizar uma função. Numa relação funcional uma das grandezas (variável dependente) é univocamente determinada pela variação da outra (variável independente) (TINOCO, 2004). Por meio desta noção matemática, é possível observar a dependência entre grandezas que ocorre em fenômenos da Física, da Biologia, da Química e de outras áreas, de modo que, no estudo das funções, o aluno poderá também identificar variáveis dependentes e independentes (NOGUEIRA, 2014).

A relação de dependência entre grandezas variáveis é o que dá à função o caráter dinâmico, tornando este conceito, segundo Caraça (1984), o mais importante de toda a Matemática por imprimir a esta ciência, um caráter dinâmico. De fato, sem a noção de dependência entre grandezas variáveis, seria impossível representar, mesmo que apenas graficamente, o movimento de algum objeto.

E continua o autor: "[...] o conceito de função permite estabelecer uma correspondência entre as leis matemáticas e as leis geométricas, entre as expressões analíticas (lei de formação da função) e os lugares geométricos (conjuntos de todos os pontos que gozam de uma mesma propriedade)". Para estabelecer essa correspondência não há mais que, a cada expressão analítica, fazer corresponder aquele lugar que define a mesma função que ela (CARAÇA, 1984, p. 139).

A relação de *dependência* das variáveis é o que faz a função ser aplicada, movimentada e retratada com certas regularidades. O aluno pode descobrir a partir de uma variável (por exemplo x) o valor correspondente desta variável aplicada na função (valor de f(x)) e perceber que quando essa variável se altera (x'), o valor correspondente na aplicação da função pode se alterar também (f(x')). Isso mostra que existem uma *dependência* entre essas variáveis (no caso, f(x) depende do valor de x).

Muitos fenômenos naturais apresentam regularidades que, se detectadas, permitem fazer previsões sobre etapas que não podem ser observadas. Segundo Pais (2006), "[...] tanto a matemática quanto as outras ciências trabalham com modelos criados para explicar problemas, simular experiências ou prever eventos e em cada uma dessas situações está implícita a noção de regularidade" (p. 108).

A *regularidade* se refere ao "[...] comportamento idêntico, desde que as condições iniciais sejam mantidas" (CARAÇA, 1984). É a regularidade que permite a repetição e a previsão dos fenômenos a serem estudados. Nesse sentido, "[...] o reconhecimento de regularidades em situações reais, padrões geométricos, sequências numéricas é necessário para a construção do conceito de função" (CAMPITELI; CAMPITELI, 2006, p. 36). O conceito de *regularidade* é o mais simples e fácil de ser entendido pelos alunos, por isso, para Nogueira (2014), a "descoberta" da regularidade pode ser iniciada desde muito cedo, na "[...] Educação Infantil, trabalhando com desenhos, as crianças podem ser estimuladas a descobrir o "padrão de repetição" de uma sequência" (p. 8).

A regularidade está relacionada ao princípio da economia do pensamento (PAIS, 2006) porque abrange um grande número de situações possíveis de serem resolvidas pela aplicação de um modelo. "No caso da Matemática, a regularidade aparece na construção de modelos, fórmulas e algoritmos, entre outras estruturas, a partir da ideia de poder repetir um conjunto de ações” (PAIS, 2006, p. 110).

No que concerne à *generalização*, a partir do momento que se estabelece uma regularidade é possível descrever o padrão observado e assim, estabelecer a generalização, o que envolve abstração (CAMPITELI; CAMPITELI, 2006). É preciso que o aluno tenha domínio neste quesito, que consiga avaliar corretamente as variáveis, a dependência (ou não) presente em determinado problema e, por fim, a identificar a regularidade existente e a generalização, que se trata de um elemento decisivo para a construção do conceito de função (TINOCO, 2004).

Muitas vezes, os alunos generalizam situações que apresentam regularidades, identificando apenas se certa lei se aplica a casos particulares. É preciso que desenvolvam a capacidade de apresentar argumentos, na linguagem corrente, que justifiquem a validade da lei para qualquer caso, registrando-os.

O registro de leis gerais em linguagem algébrica ou gráfica é passo decisivo para a construção do conceito de função, embora não seja fácil, talvez porque além de ser compreendida, a generalização exige, na maioria dos casos, também a representação utilizando a linguagem algébrica. Muitas vezes os alunos conseguem perceber a partir da regularidade que há uma *lei geral* ou uma *lei de formação* que descreve um comportamento ou um fenômeno, mas mais do que perceber, é preciso argumentar e justificar que essa *lei* faz sentido para além de casos particulares experimentados até então e, além disso, estabelecer uma “fórmula” para esta lei de formação. Este movimento só é possível a partir de uma abstração sobre os casos particulares experimentados.

Considerando os elementos que compõem o Campo Conceitual das funções elencados acima, e tomando como princípio que as diferentes situações presentes no Campo Conceitual das funções estão relacionadas às cinco ideias base mencionadas, notamos a complexidade deste campo conceitual, fato que justifica erros e dificuldades de estudantes e professores, apontados em algumas pesquisas (RAMOS; CURI, 2014; PIRES *et al*., 2015; NUNES; SANTANA, 2017). Sendo assim, para este trabalho delimitamos nosso olhar para as ideias base de função mobilizadas (ou não) por estudantes que finalizavam o 9º ano do Ensino Fundamental e 3º ano do Ensino Médio, ou seja, estudantes que já estudaram formalmente o conceito de função no processo escolar.

Para identificar as ideias base nas resoluções dos alunos, focalizamos as estratégias de resolução das tarefas desenvolvidas pelos sujeitos da pesquisa. Como estratégia consideramos o modo de resolução adotado pelo aluno, ou seja, o caminho escolhido para resolver a sua tarefa e apresentar uma resposta, correta ou não. Em alguns casos a estratégia é explicitada pelos alunos, sua resolução é claramente registrada na forma de linguagem natural, gráfica, algébrica, numérica etc. Porém, dependendo da tarefa, pode ocorrer de os alunos apresentarem apenas a resposta, deixando a resolução em branco. Neste caso, cabe ao pesquisador e professor refletir, a partir dos indícios deixados pelo aluno em sua resposta final, procurando identificar a estratégia ou as possíveis estratégias adotadas por ele.

Geralmente não é difícil para um professor interpretar os conhecimentos explícitos mobilizados pelos alunos, o que não acontece, entretanto, com os conhecimentos implícitos, que nem sempre são possíveis de serem identificados, e demandam atenção e investigação por parte dos professores e pesquisadores, pois muitas vezes o aluno é questionado sobre a sua resolução, mas ele não sabe explicitar com palavras (REZENDE, 2013).

Vergnaud atribui muita atenção a estes conhecimentos que nem sempre são explicitados pelos alunos. Para o pesquisador não é apenas a resolução de um problema pelos sujeitos que interessa, mas sim o modo como eles resolvem e, principalmente, os conhecimentos implícitos mobilizados por eles ao resolver um problema. Esta é a principal justificativa para a adoção, como ponto de partida para as análises desta investigação, a identificação das estratégias de resolução explícitas ou implícitas manifestadas pelos sujeitos, e a partir de suas estratégias procuramos identificar as ideias base de função passíveis de serem mobilizadas pelos sujeitos da pesquisa.

Desenvolvimento da pesquisa, apresentação e análise dos dados

Conforme enunciado na introdução deste artigo, apresentamos aqui, fragmentos de uma pesquisa mais ampla que envolve outros pesquisadores, diferentes sujeitos e níveis de ensino, do Brasil e dos Estados Unidos. Apresentamos as análises realizadas em relação a um bloco de tarefas relacionadas ao conceito de função afim selecionado dentre outros elaborados pelas pesquisadoras e que foram aplicadas para 12 (doze) estudantes da Educação Básica de uma escola pública do interior do Paraná, sendo 06 (seis) do Ensino Fundamental e 06 (seis) do Ensino Médio. Ressaltamos que a produção dos dados ocorreu no mês de dezembro de 2017, ou seja, naquele momento os estudantes cursavam o último mês de aulas de seus respectivos anos escolares, sendo alunos concluintes do 9º ano do Ensino Fundamental e do 3º ano do Ensino Médio.

As tarefas foram resolvidas no próprio Colégio dos alunos, em contra turno ao horário de suas aulas. Todos os alunos de uma turma de 9º ano do Ensino Fundamental e de uma turma do 3º ano do Ensino Médio foram convidados pela professora de Matemática para participarem da pesquisa. Doze (12) alunos aceitaram o convite e foram considerados como sujeitos da pesquisa, sendo seis (06) alunos do 9º ano do Ensino Fundamental e seis (06) alunos do 3º ano do Ensino Médio. Os alunos resolveram as três tarefas proposta individualmente, que foram aplicadas por uma das pesquisadoras autoras deste trabalho com o auxílio da professora de Matemática da turma.

Devido aos níveis de dificuldade das tarefas, decorrentes das ideias base e conceitos matemáticos envolvidos, propomos a tarefa 1, adaptada de Pavan (2010), com objetivo de identificar ideias base mobilizadas por estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, apenas para os alunos do 9º ano. A tarefa 2 foi proposta aos alunos do 9º ano e do 3º ano. Já a a tarefa 3 foi proposta apenas aos alunos do 3º ano. As tarefas apresentam uma hierarquia de dificuldades, de maneira que, a primeira delas poderia ser resolvida por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, e de fato foi aplicada em outra pesquisa realizada com alunos deste ano de escolaridade (PAVAN, 2010). A segunda tarefa apresenta nível de dificuldade compatível com escolaridade de 9º ano e a terceira referente ao Ensino Médio. Desta forma, a cada grupo de alunos foram propostas duas tarefas, uma com grau de dificuldade referente à fase de escolarização imediatamente anterior e a outra, compatível com o ano de escolaridade em curso. Fizemos tal opção porque pretendemos, oportunamente, cotejar os dados das tarefas que foram ofertadas a sujeitos de diferentes níveis de ensino e países.

Para a análises dos dados consideramos todos os registros escritos dos alunos. A partir das resoluções e estratégias utilizadas pelos alunos, elaboramos quadros contendo as diferentes estratégias utilizadas por eles em cada item e as ideias base do conceito de função mobilizadas pelos sujeitos, durante o uso de suas estratégias. Para preservar a identidade, nomeamos os alunos do Ensino Fundamental com a sigla EF seguido de um número de 1 a 6, e para os alunos do Ensino Médio utilizamos a sigla EM seguido também de um número de 1 a 6.

Os quadros de análises, enumerados de 1 até 14, elaborados pelas pesquisadoras, apresentam o resumo das análises dos dados para as tarefas 1, 2 e 3, contém as estratégias de resolução mobilizadas pelos 12 estudantes sujeitos da pesquisa, juntamente com a quantidade de respostas totalmente corretas, respostas parcialmente corretas, respostas incorretas e ausência de respostas (em branco).

A seguir, apresentamos as três tarefas propostas aos alunos, seguidos dos quadros de análise e discussão dos dados.

Tarefa 1 (Adaptada de Pavan (2010)): A cada pulo da mamãe canguru, seu filhinho dá 3 pulos para acompanhá-la. Complete a tabela relacionando os pulos da mãe com o do seu filho, e responda as seguintes questões

Número de pulos da Mãe	***Número de pulos do Filho***
1	*3*
2	
	9
4	
5	
	18

a) Se a mamãe canguru der 26 pulos, quantos pulos seu filhinho dará para acompanhá-la?
b) O filhinho, para acompanhar sua mãe, deu 222 pulos. Quantos pulos a mãe deu?
c) Podemos calcular qualquer número de pulos do filho? Por quê?

Esta tarefa caracteriza-se como um problema do Campo Conceitual Multiplicativo, que, de acordo com Gitirana *et al* (2009), pode ser proposto para alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, assim como foi proposto na pesquisa de Pavan (2010) para alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. Esta tarefa possibilita a mobilização de todas as ideias base de função tratadas neste artigo.

Em relação às respostas dos sujeitos da pesquisa, todos os alunos completaram corretamente o quadro proposto, mobilizando corretamente as ideias base de *variável, correspondência, dependência* e *regularidade*. A figura 1 apresenta o registro escrito do aluno EF1, como sendo a resposta representativa dos demais alunos, colaboradores desta pesquisa.

	Mãe	Filho
Número de pulos	1	3
	2	6
	3	9
	4	12
	5	15
	6	18

Figura 1: Registro do aluno EF1
Fonte: Dados da pesquisa

Item a) *Se a mamãe canguru der 26 pulos, quantos pulos seu filhinho dará para acompanhá-la?*

Quadro 1: Estratégias utilizadas e ideias base mobilizadas pelos alunos no item 'a'

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (01)**	**Ideias base**
Multiplica a quantidade de pulos da mãe por 3 e encontra como resultado 78 pulos.	EF3	Correspondência Dependência Regularidade
Estratégias das resoluções parcialmente corretas	**Quantidade (01)**	**Ideias base**
Multiplica a quantidade de pulos da mãe por 3, porém apresenta erro no cálculo e obtém como resultado 118 pulos.	EF2	Correspondência Dependência Regularidade
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (02)**	**Ideias base**
Afirma que deve-se dividir a quantidade de pulos da mãe por 9, mas não apresenta cálculos.	EF4	Não identificada
Divide a quantidade de pulos da mãe por 2, apresentando 13 como resultado.	EF1	Não identificada
Não apresenta estratégias e o resultado é incorreto	**Quantidade (02)**	**Ideias base**
Resposta: 67	EF5	Não identificada
Resposta: 86	EF6	Não identificada

Fonte: elaborado pelas autoras

Item b) *O filhinho, para acompanhar sua mãe, deu 222 pulos. Quantos pulos sua mãe deu?*

Quadro 2: Estratégias utilizadas e ideias base mobilizadas pelos alunos no item 'b'

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (02)**	**Ideias base**
Divide 222 por 3 obtendo como resultado 74 pulos.	EF2 e EF3	Correspondência Dependência Regularidade
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (01)**	**Ideias base**
Divide 222 por 2, apresentando como resposta 111.	EF4	Não identificada
Não apresenta estratégias e o resultado é incorreto	**Quantidade (03)**	**Ideias base**
Resposta: *90*	EF1	Não identificada
Resposta: *164*	EF5	Não identificada
Resposta: *289*	EF6	Não identificada

Fonte: elaborado pelas autoras

Item c) *Podemos calcular qualquer número de pulos do filho? Por quê?*

Quadro 3: Estratégias utilizadas e ideias base mobilizadas pelos alunos no item 'c'

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (02)**	**Ideias base**
Afirma que não se pode calcular qualquer número de pulos para o filho e justifica pelo fato de que o filho pula 3 a mais que a mãe.	EF3	Regularidade Correspondência Dependência
Afirma que não se pode calcular qualquer número de pulos para o filho e justifica pelo fato de que os pulos ocorrem de 3 em 3.	EF6	Regularidade Correspondência Dependência
Estratégias das resoluções parcialmente corretas	**Quantidade (01)**	**Ideias base**
Afirma que não se pode calcular qualquer número de pulos para o filho, porém não explica corretamente e afirma apenas que o filho vai dar mais pulos que a mãe.	EF1	Correspondência Dependência
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (02)**	**Ideias base**
Afirma que é possível calcular qualquer número de pulos para o filho e justifica que um pulo da mãe é três pulos do filho.	EF2	Não identificada
Afirma que é possível calcular qualquer número de pulos para o filho e justifica que a quantidade de pulos pode ser calculada apenas com operações básicas.	EF5	Não identificada
Em branco	**Quantidade (01)**	**Ideias base**
Não apresenta resolução	EF4	Não identificada

Fonte: elaborado pelas autoras

As análises das respostas apresentadas nos quadros 1, 2 e 3 mostram as estratégias de resolução dos estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental ao resolverem uma tarefa relacionada ao conceito de função afim, cujo grau de dificuldade é compatível ao 5º ano de escolaridade. Observamos que dentre os três itens apresentados aos 6 alunos, ou seja, dentre as 18 resoluções analisadas, apenas 05 foram consideras totalmente corretas, 02 foram consideradas parcialmente corretas, 05 respostas incorretas, 05 não apresentaram estratégias, apenas um resultado incorreto e 01 ausência de resposta (em branco).

Embora a tarefa 1 se refira a um problema do Campo Conceitual Multiplicativo (VERGNAUD, 2009), possível de ser resolvido por estudantes dos Anos Iniciais, conforme mostra a pesquisa de Pavan (2010), dentre os 06 sujeitos da pesquisa que finalizavam o 9º ano do Ensino Fundamental, apenas 01 aluno (EF3) respondeu corretamente os itens a), b) e c) da tarefa 1; 02 alunos (EF2 e EF3) responderam corretamente ao item b); 02 alunos (EF2 e EF6) responderam corretamente ao item c); e os demais alunos apresentaram estratégias e respostas incorretas ou apenas apresentaram as respostas incorretas, sem estratégias de resolução.

Dentre as estratégias incorretas utilizadas pelos sujeitos no item a), notamos que EF4 e EF1 dividem a quantidade de pulos da mãe por 9 e por 2 respectivamente, ou seja, não consideraram a *regularidade* da situação proposta pelo enunciado da tarefa. Além disso, outros 02 alunos (EF5 e EF6) não indicaram suas estratégias de resolução, apenas apresentaram respostas incorretas (67 e 86), de modo que as pesquisadoras não puderam identificar as estratégias adotadas nesses casos.

Dentre as estratégias incorretas mobilizadas pelos sujeitos no item b), ao apresentar como resposta o número 111, a estratégia utilizada pelo estudante EF4 foi dividir o número de pulos (222 pulos) pelo número 2, o que não faz sentido, uma vez que de acordo com o enunciado a cada pulo da mãe o filhinho dá três pulos. Para as demais respostas incorretas apresentadas (90, 164 e 289) não foi possível identificar as estratégias adotadas pelos estudantes. Diante das respostas incorretas, conforme o quadro 2, notamos a ausência de interpretação do enunciado da atividade por parte dos alunos, afinal 4 dentre os 6 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, além de realizarem cálculos incorretos, não se atentaram para o fato de que a resposta apresentada não faz sentido perante o enunciado proposto.

No item c da tarefa, momento em que os alunos estão sendo encaminhados para a *generalização* respondendo a seguinte questão: *podemos calcular qualquer número de pulos do filho? Por quê?*, 03 alunos (EF1, EF3 e EF6) responderam corretamente a questão afirmando que não se pode calcular qualquer quantidade de pulos para o filho, as justificativas são variadas embora apresentem como semelhanças a identificação da regularidade na situação. Além disso, 02 alunos (EF2 e EF5) afirmaram ser possível calcular qualquer quantidade de pulos do filho e 01 aluno (EF4) não apresentou resolução para esse item, ou seja, não conseguiram mobilizar a ideia base de generalização.

A tarefa a seguir foi aplicada aos doze alunos da Educação Básica colaboradores desta pesquisa.

Tarefa 2 (Adaptada de Roratto (2009)): O restaurante Rango, cobra $R\$\ 3{,}80$ *pelo consumo de 100g de comida. Três pessoas foram ao restaurante Rango e cada uma consumiu uma lata de refrigerante que custa* $R\$\ 3{,}50$ *, e as seguintes quantidades de alimentos:*

Fabricia consumiu $200g$ *. Fernando consumiu* $400g$ *. Lucas consumiu* $500g$ *.*

a) Qual o valor pago por cada pessoa? Explique como você determinou cada um desses valores?

b) Na determinação dos valores a serem pagos para cada pessoa, identifique o que varia e o que é fixo.

c) Indique uma expressão matemática que relaciona o peso (p) ao valor a ser pago (V), incluindo o refrigerante.

d) Carla almoçou no restaurante Rango e pagou $R\$24{,}40$ *pela refeição com um refrigerante. Quantos gramas de comida Carla consumiu?*

Este tipo de problema é classificado por Vergnaud (2009) como sendo um problema do tipo misto por envolver as operações de adição e multiplicação. Por esse motivo, ou seja, por envolver imbricações entre os Campos Conceituais aditivo e multiplicativo, é considerado por Vergnaud (2009) como sendo um problema de nível mais elevado que o proposto na tarefa 1. Ainda assim, a estrutura do problema, associada a um problema de função afim, os conceitos e as ideias matemáticas envolvidas, que são as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, bem como as ideias base de função tais como *correspondência, dependência, variável* e *generalização* são correspondentes aos estudos realizados no Ensino Fundamental, conforme constatado por Roratto (2009) e apontado na BNCC (BRASIL, 2017). A seguir, apresentamos os quadros e respectivas análises referente a cada item da tarefa 2.

Item a) *Qual o valor pago por cada pessoa? Explique como você determinou cada um desses valores?*

Quadro 4: Estratégias utilizadas e ideias base mobilizadas pelos alunos no item 'a'

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (08)**	**Ideias base**
Divide por 100 a quantidade de gramas de comida consumida, multiplica o resultado por 3,80 e soma o valor do refrigerante.	EF3, EM1, EM3 e EM 4 (EM4 apresentou um erro de cálculo)	Variável Correspondência Dependência
Divide por 100 a quantidade de gramas de comida consumida, obtendo os números 2, 4 e 5. Na sequência, somou o valor R$ 3,80 duas vezes, quatro vezes e cinco vezes. E por último somou o valor do refrigerante.	EF1 e EF2 (erraram nos cálculos com números decimais)	Variável Correspondência Dependência
Divide por 100 a quantidade de gramas de comida consumida por Fabricia obtendo o número 2, multiplica esse valor por 3,80 obtendo 7,60 e em seguida, soma o valor do refrigerante. Para encontrar o valor pago por Fernando, multiplica por 2 o valor 7,60 já calculado para Fabricia, obtendo 15,20 e em seguida soma o valor do refrigerante. Para calcular o valor de Lucas, utiliza o 15,80 já calculado para Fernando e soma 3,80, em seguida soma o valor do refrigerante.	EM 2, EM 5	Variável Correspondência Dependência
Estratégias da resolução parcialmente correta	**Quantidade (02)**	**Ideias base**
Divide por 100 a quantidade de gramas de comida consumida e multiplica (ou soma) o resultado por 3,80, mas desconsidera o valor do refrigerante.	EF4, EF5 (EF5 errou nos cálculos)	Variável Correspondência Dependência
Não apresenta estratégias e o resultado é incorreto	**Quantidade (02)**	**Ideias base**
R$ 21,50	EF6	Não identificada
Fabrícia 20,60 R$, Fernando 44,50 R$, Lucas 79,50 R$	EM6	Não identificada

Fonte: elaborado pelas autoras

Item b) *Na determinação dos valores a serem pagos para cada pessoa, identifique o que varia e o que é fixo.*

Quadro 5: Estratégias utilizadas e ideias base mobilizadas pelos alunos no item 'b'

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (06)**	**Ideias base**
Identifica como fixo o valor do refrigerante, e como variável a quantidade de comida consumida.	EF2, EF3 EM 2, EM 3, EM 6, EM 1	Variável
Estratégias das resoluções parcialmente corretas	**Quantidade (02)**	**Ideias base**
Identifica como fixo o valor do refrigerante, mas não especifica o que varia.	EF1	Não identificada
Identifica como variável a quantidade de alimentos, mas não especifica o que é fixo.	EM 4	Variável
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (02)**	**Ideias base**
Identifica como fixo o preço da comida, e como variável o refrigerante.	EF 6	Não identificada
Soma os valores obtidos no item a	EF4	Não identificada
Em branco	**Quantidade (02)**	**Ideias base**
Não apresenta resolução	EF5 e EM5	Não identificada

Fonte: elaborado pelas autoras

Item c) *Indique uma expressão matemática que relaciona o peso (p) ao valor a ser pago (V), incluindo o refrigerante.*

Quadro 6: Estratégias utilizadas e ideias base mobilizadas pelos alunos no item ‘c’

Estratégias das resoluções parcialmente corretas	Quantidade (03)	Ideias base
V = 3,8p (desconsidera o preço do refrigerante)	EF2	Variável Generalização
V = p + 3,5	EM 2	Variável Generalização
V = (g/100).t.r; v = valor total pago, g = gramas consumidas, t = tarifa fixa cobrada a cada 100 gramas, r valor do refrigerante.	EM 3	Variável Generalização
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (02)**	**Ideias base**
4v + 3,5 = p	EM 5	Não identificada
A = B + C (não é possível compreender)	EM 1	Não identificada
Em branco	**Quantidade (07)**	**Ideias base**
Não apresenta resolução	EF1, EF3, EF4, EF5, EF6, EM6 e EM4	Não identificada

Fonte: elaborado pelas autoras

Item d) *Carla almoçou no restaurante Rango e pagou* R$24,40 *pela refeição com um refrigerante. Quantos gramas de comida Carla consumiu?*

Quadro 7: Estratégias utilizadas e ideias base mobilizadas pelos alunos no item ‘d’

Estratégias das resoluções corretas	Quantidade (02)	Ideias base
Reduz do valor consumido por Carla, o valor do refrigerante, obtendo R$ 20,90. Na sequência, multiplica 3,80 por 5 e por 6, concluindo que para 500g o valor a ser pago é de 22,80, e para 600 g o valor a ser pago é de 19,00. Então, considerando que (3,80)/2 = 1,90, conclui que o consumo de Carla foi de 550g.	EM 2 e EM 3	Dependência Correspondência
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (02)**	**Ideias base**
Reduz do valor consumido por Carla (R$24,40) o valor do refrigerante (R$ 3,50), obtendo R$ 20,90. Na sequência, realiza a multiplicação 3,80 por 6, obtendo resultado de 22,50 (erro de cálculo), e conclui que o consumo de Carla foi de 600g.	EF 3	Dependência Correspondência
Resolução por tentativas	EM 4	Não identificada
Não apresenta estratégia e a resposta é incorreta	**Quantidade (07)**	**Ideias base**
490	EF1	Não identificada
700g	EF 4	Não identificada
Carla 800 gramas de comida	EF 5	Não identificada
Carla consumiu 600 gramas	EF6	Não identificada
42,80 – não especificou estratégia	EM 5	Não identificada
Carla consumiu 1,90 g de comida	EM 4	Não identificada
500 g	EM 1	Não identificada
Em branco	**Quantidade (01)**	**Ideias base**
Não apresenta resolução	EF2	Não identificada

Fonte: elaborado pelas autoras

As análises das respostas apresentadas nos quadros 4, 5, 6 e 7 mostram as dificuldades dos estudantes ao resolverem uma tarefa relacionada ao conceito de função afim. Observamos que dentre os quatro itens apresentados aos 12 alunos, ou seja, dentre as 48 resoluções analisadas, apenas 16 foram consideradas totalmente corretas, 07 foram consideradas parcialmente corretas, 15 respostas incorretas, além de 10 ausência de resposta (em branco). Dentre as 16 respostas corretas, 14 estão associadas aos itens a) e b), e 02 correspondem ao item d). Ou seja, nenhum estudante adotou estratégias corretas associadas à ideia base de generalização ao responder a questão c) *Indique uma expressão matemática que relaciona o peso (p) ao valor a ser pago (V), incluindo o refrigerante.*

Apenas dois (02) estudantes apresentaram estratégias corretas ao responder a questão d) *Carla almoçou no restaurante Rango e pagou* R$24,40 *pela refeição com um refrigerante. Quantos gramas de comida Carla consumiu?* No caso do item d), associamos também a dificuldade dos alunos com a generalização, pois inferimos que se os alunos tivessem acertado a generalização no item c), a quantidade de acertos para o item d) seria maior. Afinal, os alunos que apresentaram resposta correta para o item d) adotaram a estratégias de aproximações por tentativa e erro.

Outro fato que chama atenção relacionado à generalização, item c), é que foram apresentadas 7 respostas em branco, 02 respostas incorretas e 03 estratégias parcialmente corretas. As respostas parcialmente corretas apresentadas pelos alunos foram: i) V = 3,8p, na qual o aluno EF2 desconsidera o preço do refrigerante; ii) V = p + 3,5, o aluno EM2 desconsidera o preço do quilo da comida; iii) V = (g/100).t.r; sendo que para esta resposta o estudante EM3 explica que v é o valor total pago, g é a quantidade de gramas consumidas, t a tarifa fixa cobrada a cada 100 gramas, r valor do refrigerante. No entanto, EM3 multiplica o valor do refrigerante ao invés de somá-lo.

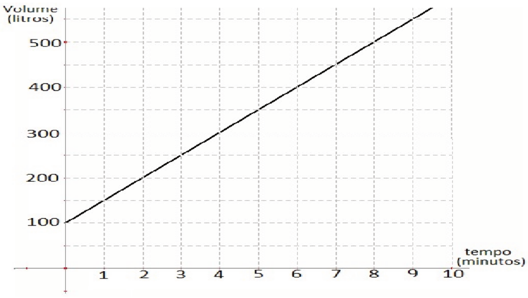
Embora a BNCC (BRASIL, 2017) preconiza que ao final do Ensino Fundamental a habilidade relacionada à generalização deva estar estabelecida pelos alunos, as análises da tarefa 2 mostram que, ao finalizarem o 9º ano do Ensino Fundamental e o 3º ano do Ensino Médio, os sujeitos desta pesquisa não compreendem esta ideia base que é fundamental para a compreensão do conceito de função (TINOCO, 2004; NOGUEIRA, 2014; CARAÇA, 1984).

Do ponto de vista de Vergnaud (2009), para que um sujeito compreenda um conceito é essencial que ele vivencie ao longo do processo escolar diferentes situações relacionadas a este conceito. Segundo Campiteli e Campiteli (2006), a partir do momento em que se estabelece uma regularidade é possível descrever um padrão e alcançar a generalização, que envolve a abstração. Nesse sentido, diante das dificuldades manifestadas pelos sujeitos desta pesquisa, apontamos para a necessidade de um trabalho pedagógico por parte dos professores, que propicie aos alunos diferentes situações relacionadas às ideias base de função, em especial relacionada à generalização.

Apresentamos a seguir a tarefa 3 que foi aplicada a 6 (seis) alunos do Ensino Médio.

Tarefa 3 (Adaptada de Roratto (2009): Uma caixa de água tem capacidade de 1000 litros e possui certa quantidade de água em seu interior. Em determinado instante, uma torneira é aberta para encher a caixa d'água, conforme informações disponíveis no gráfico abaixo. Com estas informações, responda as seguintes perguntas:

a) Quantos litros de água haverá na caixa após 7 minutos?
b) Supondo que a torneira fique aberta durante 25 minutos, o que acontecerá?
c) Qual a taxa de vazão de água da torneira?
d) Quanto tempo levará até o completo enchimento da caixa?
e) Que relação(ões) o gráfico expressa? Elas são relações de dependência?
f) Indique a lei matemática que expressa o volume e água na caixa em função do tempo?
g) Quais grandezas representam o domínio e a imagem, respectivamente, nesta relação? Para quais valores essas grandezas estão definidas na situação?



Assim como na tarefa 2, o problema proposto na tarefa 3 é do tipo misto (VERGNAUD, 2009), relacionado às imbricações entre os Campos Conceituais aditivo e multiplicativo, e associado a um problema envolvendo o conceito de função afim (MIRANDA, 2019). No entanto, consideramos que a tarefa 3 apresenta um grau de dificuldade maior que o da tarefa 2, por envolver, além das cinco ideias base de função, a saber *variável, dependência, correspondência, regularidade* e *generalização*, outras ideias e conceitos matemáticos tais como a representação e a interpretação gráfica, domínio e imagem de uma função, as respectivas grandezas envolvidas: volume e tempo etc. Informamos que todas as ideias e conceitos envolvidos na tarefa 3 dizem respeito aos estudos que devem ser propostos aos estudantes do Ensino Médio brasileiro, conforme a Base Nacional Curricular Comum – BNCC (BRASIL, 2018).

Segundo Vergnaud (2009), há outros fatores associados às dificuldades de cada situação, e dizem respeito à: i) facilidade ou dificuldade maior do cálculo necessário (relacionada aos cálculos com números muito grandes, números inteiros, números decimais, entre outros); ii) apresentação dos elementos envolvidos na atividade (relacionado ao fato de apresentarem ou não valores que devem ou podem ser desconsiderados na situação, a ordem em que as informações aparecem, ordem temporal ou não); iii) tipo do conteúdo e também o tipo de relação.

Na sequência, apresentamos os quadros e respectivas análises relacionados à tarefa 3.

Item a) *Quantos litros de água haverá na caixa após 7 minutos?*

Quadro 8: Estratégias utilizadas e ideias base mobilizadas pelos alunos no item 'a'

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (04)**	**Ideias base**
Observa a representação gráfica e apresenta como resposta 450 litros.	EM2, EM3, EM4 e EM6	Variável Correspondência Dependência Regularidade
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (01)**	**Ideias base**
Considera o último valor representado no gráfico como sendo a resposta para a tarefa: 550.	EM5	Não identificada
Não apresenta estratégia e a resposta é incorreta	**Quantidade (01)**	**Ideias base**
Apresenta como resposta 350.	EM1	Não identificada

Fonte: elaborado pelas autoras

Item b) *Supondo que a torneira fique aberta durante 25 minutos, o que acontecerá?*

Quadro 9: Estratégias utilizadas e ideias base mobilizadas pelos alunos no item 'b'

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (05)**	**Ideias base**
Observa os dados do gráfico e afirma que a água transbordará da caixa.	EM1, EM3, EM4 e EM6	Variável Correspondência Dependência Regularidade
Não responde a pergunta utilizando da língua natural, mas observa a representação gráfica e considera que aos 10 minutos haverá 600 litros de água na caixa, avalia a vazão da água como sendo de 50 litros por minuto, multiplica 50 por 15 (minutos restantes a serem observados segundo o enunciado) obtendo como resultado 750 litros. Ao fim, soma os 600 litros iniciais com 750 litros e obtém como resposta que aos 25 minutos haverá 1350 litros na caixa d'água.	EM2	Variável Correspondência Dependência Regularidade
Estratégias das resoluções parcialmente corretas	**Quantidade (01)**	**Ideias base**
Reconhece que haverá desperdício de água, e considera como estratégia observar o último valor representado no gráfico: 550.	EM5	Não identificada

Fonte: elaborado pelas autoras

Item c) *Qual a taxa de vazão de água da torneira?*

Quadro 10: Estratégias utilizadas e ideias base mobilizadas pelos alunos no item 'c'

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (03)**	**Ideias base**
Observa a representação gráfica e apresenta como resposta 50 litros por minuto.	EM2 e EM4	Variável Correspondência Dependência Regularidade
Observa a representação gráfica e apresenta como resposta 100 litros a cada 2 minutos.	EM1	Variável Correspondência Dependência Regularidade
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (02)**	**Ideias base**
Observa de modo equivocado a representação gráfica, e apresenta como resposta 100 litros por minuto.	EM3 e EM5	Não identificada
Não apresenta estratégia e a resposta é incorreta	**Quantidade (01)**	**Ideias base**
Apresenta como resposta que a taxa de vazão é de 25000 litros.	EM6	Não identificada

Fonte: elaborado pelas autoras

Item d) *Quanto tempo levará até o completo enchimento da caixa?*

Quadro 11: Estratégias utilizadas e ideias base mobilizadas pelos alunos no item ‘d’

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (02)**	**Ideias base**
Observa a representação gráfica e identifica que aos 10 minutos haverá 600 litros de água na caixa. Sabendo-se que faltam 400 litros para o enchimento da caixa d’água, divide 400 por 50, pois a vazão da água é de 50 litros por minuto e encontra como resultado 8 minutos. Ao fim, soma 8 minutos com os 10 minutos iniciais e apresenta como resposta 18 minutos.	EM2	Variável Correspondência Dependência Regularidade
Observa por meio da representação gráfica que aos 10 minutos haverá 600 litros de água na caixa, considera também a vazão da água de 50 litros por minuto, desta forma, seriam necessários mais 8 minutos para o enchimento completo da caixa. Conclui então, que aos 18 minutos conterá 1000 litros de água na caixa.	EM4	Variável Correspondência Dependência Regularidade
Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (03)**	**Ideias base**
Observa na representação gráfica que aos 10 minutos haverá 600 litros de água na caixa, considera equivocadamente que a taxa de vazão da água é de 100 litros a cada 1 minuto, conclui então que para que a caixa contenha 1000 litros de água são necessários mais 4 minutos, desta forma, apresenta como resposta final 14 minutos.	EM3	Não identificada
Observa na representação gráfica que aos 10 minutos haverá 600 litros de água na caixa, além disso, nota que a taxa de vazão da água é de 50 litros por minuto (contrariando sua resposta no item anterior). Com isso, tenta completar os eixos do plano cartesiano até que o volume de água seja de 1000 litros, no entanto preenche o eixo das abscissas de maneira equivocada e ao fim conclui que o enchimento da caixa ocorrerá aos 21 minutos.	EM5	Não identificada
Observa que o último valor explícito na representação gráfica para representar a variável tempo é 10 minutos, conclui então que o enchimento da caixa d’água ocorrerá aos 10 minutos.	EM6	Não identificada
Não apresenta estratégia e a resposta é incorreta	**Quantidade (01)**	**Ideias base**
Apresenta como resposta que o enchimento completo da caixa ocorrerá aos 20 minutos.	EM1	Não identificada

Fonte: elaborado pelas autoras

Item e) *Que relação(ões) o gráfico expressa? Elas são relações de dependência?*

Quadro 12: Estratégias utilizadas e ideias base mobilizadas pelos alunos no item ‘e’

Estratégias das resoluções corretas	**Quantidade (04)**	**Ideias base**
Observam a representação gráfica, e identificam a relação entre o volume de água na caixa d’água e o tempo.	EM2, EM3, EM4 e EM5	Variável Correspondência Dependência
Não apresenta estratégia e a resposta é incorreta	**Quantidade (02)**	**Ideias base**
Afirma não saber se existe relação de correspondência.	EM1 e EM6	Não identificada

Fonte: elaborado pelas autoras

Item f) *Indique a lei matemática que expressa o volume e água na caixa em função do tempo.*

Quadro 13: Estratégias utilizadas e ideias base mobilizadas pelos alunos no item 'f'

Estratégias das resoluções incorretas	**Quantidade (03)**	**Ideias base**
Assume o volume como sendo a multiplicação entre o tempo (t) e "s", mas não explicita o significado de "s": $V = t.s$	EM1 e EM3	Não identificada
Assume o volume como sendo a multiplicação entre o tempo e a taxa de vazão: $V = 100t$	EM2	Não identificada
Em branco	**Quantidade (03)**	**Ideias base**
Não apresenta estratégia de resolução nem resposta	EM4, EM5 e EM6	Não identificada

Fonte: elaborado pelas autoras

Item g) *Quais grandezas representam o domínio e a imagem, respectivamente, nesta relação? Para quais valores essas grandezas estão definidas na situação?*

Quadro 14: Estratégias utilizadas e ideias base mobilizadas pelos alunos no item 'g'

Não apresentam estratégias e a resposta é incorreta	**Quantidade (02)**	**Ideias base**
Afirma que são constantes que aumentam, e são respectivamente volume em litros.	EM1	Não identificada
Apresenta apenas as unidades de medida das variáveis tempo e volume, como sendo respectivamente representadas em minutos e litros.	EM2	Não identificada
Em branco	**Quantidade (04)**	**Ideias base**
Não apresenta estratégia nem resposta.	EM3, EM4, EM5 e EM6	Não identificada

Fonte: elaborado pelas autoras

Os quadros 8, 9, 10, 11, 12, 13 e 14 apresentam as estratégias de resolução e dificuldades dos 6 (seis) estudantes participantes desta pesquisa alunos do 3° ano do Ensino Médio ao resolverem uma tarefa relacionada ao conceito de função afim. Dentre os sete itens apresentados aos 6 alunos, ou seja, dentre as 42 resoluções analisadas, apenas 18 foram consideradas totalmente corretas, 01 foi considerada parcialmente correta, 18 incorretas e 07 ausência de resposta (em branco).

Em relação ao item a) *Quantos litros de água haverá na caixa após 7 minutos?*, a maioria dos alunos (04), observaram a representação gráfica da atividade e identificaram que aos 7 minutos o volume de água correspondente (450 litros) está implícito no eixo das ordenadas. Em relação ao item b) *Suponha que a torneira fique aberta durante 25 minutos, o que acontecerá?*, todos os alunos observaram a representação gráfica e responderam corretamente que a água transbordará da caixa, no entanto, apenas um dos sujeitos desenvolveu cálculos correspondentes à quantidade de água aos 25 minutos. No item c), em que os alunos deveriam responder quanto a taxa de vazão da água, apenas 03 (três) sujeitos interpretaram corretamente a representação gráfica e apresentaram respostas corretas (50 litros por minuto ou 100 litros a cada 2 minutos).

O item d) *Quanto tempo levará até o completo enchimento da caixa?* exigiu que os alunos interpretassem a representação gráfica e ainda desenvolvessem outras estratégias para responder corretamente a questão, neste item apenas 02 (dois) alunos desenvolveram estratégias corretas e para isso consideraram a taxa de vazão da água já utilizada no item anterior e concluíram que aos 18 minutos a caixa d'água estará cheia. Para o item e) em que os alunos deveriam identificar a relação de dependência entre as variáveis presentes no gráfico, a maioria deles, 04 (quatro) alunos, conseguiram identificar corretamente.

Já para o item f) *Indique a lei matemática que expressa o volume de água na caixa em função do tempo,* nenhum aluno desenvolveu corretamente, sendo que 03 (três) sujeitos não responderam a questão e 03 (três) desenvolveram estratégias incorretas apresentando as seguintes expressões: i) $V = t.s,$ onde t representa a variável tempo, mas a variável s utilizada na expressão não é especificada pelo aluno; ii) $V = 100t$, ou seja, multiplica a variável tempo pela vazão da água; desta forma, a ideia base de *generalização* que seria desenvolvida neste item da atividade, não foi mobilizada pelos alunos. Em relação ao item *f)* em que os alunos deveriam identificar as grandezas que representam o domínio e a imagem na relação, incluindo os valores para os quais essas grandezas estão definidas, nenhum aluno respondeu corretamente, embora no item e) tenham afirmado que o gráfico expressa a relação entre volume e tempo. Em todos os itens da atividade em que foram apresentadas estratégias corretas, as ideias base de *variável, correspondência, dependência* e *regularidade* foram mobilizadas, sendo que a análise da representação gráfica foi utilizada como estratégia de resolução em todos os itens da atividade.

Segundo Tinoco (2004), é preciso que os alunos consigam mobilizar corretamente as ideias de variável e dependência para que consigam lidar corretamente com a regularidade e posteriormente com a generalização. Nesse sentido, considerando que a maioria dos alunos mobilizaram de modo adequado as ideias base de variável, correspondência, dependência e regularidade, e que nenhum aluno mobilizou corretamente a generalização, com base em Vergnaud (2009; 1990), ressaltamos a necessidade de proporcionar aos estudantes de Ensino Fundamental e Médio tarefas matemáticas associadas à ideia de generalização ao longo do processo escolar, uma vez que se trata de um elemento decisivo para a construção do conceito de função (TINOCO, 2004).

Considerações finais

Baseadas em Vergnaud (1990), partimos do pressuposto que a aprendizagem de um conceito matemático ocorre ao longo do processo escolar, em decorrência das diferentes situações vivenciadas pelos sujeitos. Também defendemos, baseadas em algumas pesquisas tais como Nogueira (2014), Pavan (2010), Braga (2006), e documentos curriculares (BRASIL 2017; 2018), que as ideias base de função devem ser trabalhadas a partir dos Anos Iniciais, para que sejam desenvolvidas e consolidadas pelos alunos no decorrer da escolarização.

Ainda, de acordo com os documentos oficiais brasileiros (BRASIL 2017; 2018), a formalização do conceito de função deve ocorrer no 9º ano do Ensino Fundamental e ser aprofundada no 1º ano do Ensino Médio.

No entanto, os resultados desta pesquisa mostram que os 12 estudantes da Educação Básica, colaboradores desta pesquisa, que finalizavam o 9º ano do Ensino Fundamental e o 3º ano do Ensino Médio, apresentam diversas estratégias incorretas para resolução da tarefa proposta a todos eles sobre função afim, conforme mostram os quadros de 1 a 14, presentes neste artigo. Chamamos a atenção para o fato que a generalização não foi mobilizada corretamente por nenhum dos estudantes investigados, em nenhuma das tarefas propostas. Apenas 01 aluno do Ensino Fundamental e 02 do Ensino Médio utilizaram estratégia *parcialmente correta* relacionada à ideia base de generalização, conforme dados apresentados no quadro 4.

Considerando que a generalização é uma ideia essencial para a construção do conceito de função (TINOCO, 2004), os resultados desta pesquisa apontam para a necessidade de se propor uma maior diversidade de tarefas matemáticas em sala de aula, que possibilitem a constituição, desenvolvimento e consolidação das ideias base do conceito de função, com atenção especial à generalização. Ao nos referirmos à diversidade de tarefas, estamos propondo uma variedade na estrutura de seus enunciados, conforme Vergnaud (2009) propõe para os Campos Conceituais das Estruturas Aditiva e Multiplicativa, e conforme Miranda (2019) propõe para o conceito de função afim.

A ideia de generalização, fundamental para o conceito de função (NOGUEIRA, 2014; TINOCO, 2004), é característica da ciência Matemática, uma vez que o conhecimento matemático é descontextualizado, atemporal e impessoal. Se os estudantes não são capazes de descontextualizar o conhecimento que está sendo produzido, não apenas o conteúdo específico revela-se incompreendido, como a própria essência do conhecimento matemático.

Apesar da especificidade da pesquisa investigada: identificar se e como as ideias base do conceito de função afim são mobilizadas por estudantes concluintes do Ensino Fundamental II e do Ensino Médio brasileiro, nossos resultados apontam para um conhecimento produzido em sala de aula que não pode ser chamado de conhecimento matemático, pois a Matemática é essencialmente generalização e abstração.

Sendo assim, defendemos a importância de diferentes situações presentes no Campo Conceitual das funções, que proporcionem aos estudantes a mobilização de diferentes esquemas (VERGNAUD, 1990), a desestabilização de conhecimentos equivocados (VERGNAUD, 1990) e que propiciem aos alunos o reconhecimento de seus próprios erros (REZENDE, 2013), para que desse modo, do ponto de vista de Vergnaud (1990), ocorra a aprendizagem do conceito de função, conforme previsto pela BNCC (2017; 2018), para os estudantes da Educação Básica.

Referências

BRAGA, C. *Função*: a alma do Ensino da Matemática. 1.ed. São Paulo: Annablume, 2006.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular:* Ensino Fundamental. Brasília, 2017.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular:* Ensino Médio. Brasília, 2018.

CAMPITELI, H. C.; CAMPITELI, V. C. *Funções*. Ponta Grossa: Editora UEPG, 2006.

CARAÇA, B. J. *Conceitos Fundamentais da Matemática*. Lisboa, 1984.

EVES, H. *Introdução à história da matemática*. São Paulo: Ed. da UNICAMP, 2011.

GITIRANA, V.; CAMPOS, T. M. M.; MAGINA, S.; SPINILLO, A. *Repensando multiplicação e divisão:* contribuições da teoria dos campos conceituais. 1. ed. São Paulo: PROEM, 2014.

MIRANDA, C. A**.** *Situações-problema que envolvem o conceito de função afim*: uma análise à luz da teoria dos campos conceituais. Dissertação de Mestrado. PPGECEM. Unioeste, Cascavel, 2019.

NOGUEIRA, C. M. I. Construindo o Conceito de Funções. In: RAMOS, A.S.; REJANI, F.C. *Teoria e Prática de Funções.* Maringá: Unicesumar, 2014. p. 13-36

NUNES, C. B.; SANTANA, E. R. S. Concepções Errôneas de Alunos de Licenciatura em Matemática Sobre o Conceito de Função. *JIEEM***,** v.10, n.2, p. 65-71, 2017.

PAIS, L. C. *Ensinar e aprender Matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

PAVAN, L. R. *A Mobilização das Ideias Básicas do Conceito de Função por crianças da 4ª série do Ensino Fundamental em Situações-Problema de Estruturas Aditivas e/ou Multiplicativas.* Dissertação de Mestrado. PCM. UEM, Maringá, 2010.

PIRES, R. F.; MERLINE, V.; MAGINA, S. Função: Concepções Manifestadas por um Grupo de Professores. *Educação Matemática em Revista*, v.20, n.44, p. 21-29, 2015.

QUEIROZ, P. C. G. *Conhecimentos relativos à variável, mobilizados por professores da Educação Básica.* Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

RAMOS, M. L., CURI, E. Modelo de Análise Didática dos Erros: um guia para analisar e tratar erros referentes à função polinomial do 2° grau. *REVEMAT*, v.9, n. 1, p. 27-42, 2014.

RORATTO, C. *A história da matemática como estratégia para o alcance da aprendizagem significativa do conceito de função.* 199 f.. Dissertação de Mestrado. PCM. Universidade Estadual de Maringá – UEM, Maringá, 2009.

REZENDE, V. *Conhecimentos sobre números irracionais mobilizados por alunos brasileiros e franceses*: um estudo com alunos concluintes de três níveis de ensino**.** 210 f.. Tese de doutorado. Universidade Estadual de Maringá- UEM, Maringá, 2013.

TINOCO, L. A. A. *Construindo o conceito de Função.* Rio de Janeiro, Projeto Fundão.

VERGNAUD, G. *A criança, a matemática e a realidade:* problemas do ensino da matemática na escola elementar. Curitiba: Editora UFPR, 2009.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. *Recherche en Didactique des Mathématiques,* v. 10, n. 2.3, p. 133-170, 1990.

SOBRE AS AUTORAS

VERIDIANA REZENDE. Membro do corpo docente do PRPGEM – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná - Unespar (Mestrado) e do PPGECEM – Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste.

CLÉLIA MARIA IGNATIUS NOGUEIRA. Docente aposentada do Departamento de Matemática da Universidade Estadual de Maringá – UEM. Membro do Corpo Docente do PRPGEM – Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual do Paraná - Unespar (Mestrado). Membro do Corpo Docente do PPGECEM – Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática da Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste.

TAMIRES VIEIRA CALADO. Licenciada em Matemática pela Universidade Estadual do Paraná – Unespar Campus Campo Mourão/PR (2014). Pós-Graduada em Metodologia do Ensino da Matemática pela FAPI, Faculdade de Pinhais – Pinhais/PR (2016). Mestranda no Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática – PPGECEM pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná – Unioeste Campus Cascavel/PR (início em 2018).

Recebido: 22 de março de 2019.

Revisado: 08 de outubro de 2019.

Aceito: 31 de outubro de 2019.