ALEXANDRIA

ALEXANDRIA

Revista de Educação em Ciência e Tecnologia

# Processos de Raciocínio Mobilizados por Estudantes de CDI para Compreensão da Integral de Riemann

## *Reasoning Processes Mobilized by DIC Students to Understand the Riemann Integral*

**André Luis Trevisan[a]; Eliane Maria de Oliveira Araman[b]; Ana Júlia da Silva[c]; Tainá Taiza de Araujo[d]; Arnold Vinícius Prado Souza[e]; Alex Sandro de Castilho[f]**

**a** Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Brasil - andreluistrevisan@gmail.com
**b** Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Brasil - eliane.araman@gmail.com
**c** Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Cornélio Procópio, Brasil - anasilva.2018@alunos.utfpr.edu.br
**d** Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Londrina, Brasil - tainataizaaraujo@gmail.com
**e** Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Ponta Grossa, Brasil - arnold.prado@hotmail.com
**f** Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Guarapuava, Brasil, alexs@utfpr.edu.br

**Palavras-chave:**
Ensino de cálculo diferencial e integral. Integrais definidas. Integrais de Riemann. Processos de raciocínio matemático.

**Resumo:** Neste trabalho, pretendemos identificar os processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de Engenharia de uma Universidade Pública do Paraná ao resolverem uma tarefa matemática e compreender o modo como tais processos contribuem para a elaboração de algumas das camadas de conhecimentos associadas às Integrais de Riemann. Para tal, consideramos dados coletados no trabalho com uma tarefa exploratória envolvendo Somas de Riemann. Este trabalho se desenvolve em uma perspectiva qualitativa, de cunho interpretativo. Acerca dos processos de raciocínio matemático mobilizados, os estudantes buscaram por conjecturas, que em alguns momentos foram refutadas, tendo assim a necessidade de buscar novas conjecturas e justificativas. Posteriormente, os estudantes formularam uma generalização para a conjectura já justificada. Tais processos ativaram elementos de duas camadas essenciais para compreender a estrutura da Integral de Riemman, a constar, a Camada do Produto e Camada da Soma.

**Keywords:**
Teaching differential and integral calculus.
Definite integrals.
Riemann integrals.
Processes of mathematical reasoning.

**Abstract:** In this paper, we intend to identify the mathematical reasoning processes mobilized by Engineering students of a Public University of Paraná when solving a mathematical task and understand how such processes contribute to the elaboration of some of the layers of knowledge associated with Riemann Integrals. To this end, we consider data collected from working with an exploratory task involving Riemann Sums. This work is developed in a qualitative, interpretive perspective. About the mathematical reasoning processes mobilized, the students searched for conjectures, which in some moments were refuted, thus having the need to search for new conjectures and justifications. Subsequently, students formulated a generalization for the conjecture already justified. Such processes activated elements of two layers essential to understand the structure of the Riemman Integral, namely, the Product Layer and the Sum Layer.

## Introdução

As dificuldades apresentadas por estudantes na compreensão de conceitos centrais da disciplina de Cálculo Diferencial Integral (CDI) e a relação com o modo como se ensinam esses conceitos são temas presentes em pesquisas de Educação Matemática há algumas décadas.

Resultados de pesquisa têm apontado que a constituição de ambientes de ensino e de aprendizagem, pautados em episódios de resolução de tarefas exploratórias (TREVISAN; MENDES, 2018; TREVISAN; ALVES; NEGRINI, 2021), assume importância singular no contexto da disciplina de CDI, com foco no desenvolvimento de diferentes processos do raciocínio matemático (JEANNOTTE; KIERAN, 2017; TREVISAN; ARAMAN, 2021). No geral, pesquisadores afirmam que o processo de raciocinar matematicamente inclui a formulação e testagem de conjecturas e a realização de justificações. Ao formular uma conjectura, um estudante observa informações obtidas na tarefa que aliadas aos seus conhecimentos anteriores supõe uma ideia, fórmula ou estratégia de resolução, a qual não foi ainda provada ser verdadeira, mas que tem potencial para ser verdadeira, envolvendo suposições a partir de relações matemáticas (LANNIN et al., 2011).

Em particular, destacamos nosso interesse em estudos que têm estreita relação com o conceito de integral definida. Em especial, no caso do CDI, estudos recentes discutem que os alunos muitas vezes têm dificuldades em usar o conceito de integração tanto nos cursos de Matemática quanto em cursos de ciências subsequentes. “Ao estudar essas dificuldades dos alunos e suas razões, há um reconhecimento que as ideias contidas na estrutura de soma de Riemann são importantes para uma robusta compreensão da integração definida” (JONES et al., 2017, p. 1076, tradução nossa).

Faz-se necessário trabalhar com tarefas que estimulem o raciocínio matemático, que mostrem como os conceitos se relacionam uns com os outros, como podem ser usados na resolução dos problemas, na compreensão dos procedimentos e a razão por que funcionam. Neste trabalho, fruto de uma intervenção realizada em uma turma de estudantes de Engenharia que cursam CDI, a partir do trabalho com episódios de resolução de tarefas (TREVISAN; MENDES, 2018; TREVISAN et al., 2021), pretendemos investigar o papel dessas tarefas na elaboração de conceitos dessa disciplina, em especial no que diz respeito às camadas de conhecimentos associadas às Integrais de Riemann (SEALEY, 2006, 2014) que são ativadas por um grupo de estudantes em sua resolução. Essas camadas serão discutidas posteriormente neste artigo e envolvem quatro categorias: produto, soma, limite e função.

Nosso objetivo é identificar os processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de Engenharia de uma Universidade Pública do Paraná ao resolverem uma tarefa matemática e compreender o modo como tais processos contribuem para a elaboração de algumas das camadas de conhecimentos associadas às Integrais de Riemann. Para tal, apresentamos na próxima seção a fundamentação teórica que trata da aprendizagem do conceito de integral definida e do raciocínio matemático e seus processos.

## Fundamentação Teórica

### Processos do raciocínio matemático

O raciocínio matemático é um processo central na aprendizagem da matemática e na disciplina de CDI, e o modo de promovê-lo aos alunos é uma temática importante a ser investigada, sendo que as ações desempenhadas pelo professor têm um papel muito importante neste contexto (MATA-PEREIRA; PONTE, 2017). Mata-Pereira e Ponte (2017, p.55) afirmam que uma das ações mais importantes do professor para o desenvolvimento do raciocínio matemático do aluno está na "seleção das tarefas e a comunicação na sala de aula, sublinhando a natureza do questionamento, a negociação de significados e os processos de redizer". Já Ellis et al. (2018, p. 2) consideram que, para desenvolver o raciocínio dos alunos, "as discussões em sala de aula devem concentrar-se tanto em ideias matemáticas importantes quanto no desenvolvimento de significados matemáticos por meio de processos comunicativos".

Embora a literatura apresente definições diferentes sobre o raciocínio matemático, elas geralmente não se apresentam de forma excludente ou contraditória. Para Ponte et al. (2020), por exemplo, raciocinar matematicamente "é realizar inferências de forma fundamentada, ou seja, partir de informação dada para obter nova informação através de um processo justificado" (p. 7). Em consonância, Jeannotte e Kieran (2017) afirmam que raciocinar matematicamente é "inferir enunciados matemáticos de outros enunciados matemáticos" (p.7).

O raciocínio matemático pode ser estudado a partir de dois aspectos: sua estrutura e seus processos, sendo este último o foco do presente estudo. Jeannotte e Kieran (2017) propõem uma classificação do raciocínio matemático em nove processos distintos, sendo eles relacionados à busca por semelhanças e diferenças e à validação.

Conjecturar é definido por Jeannotte e Kieran (2017) como sendo "um processo de raciocínio matemático que, pela busca de semelhanças e diferenças, infere uma narrativa sobre alguma regularidade com valor epistêmico provável, que têm potencial para teorização matemática" (p.10). Ou seja, afirmar uma inferência que se pretende que seja verdadeira, mas que ainda não é. De modo análogo, implica em "identificar uma possível solução para um problema; formular uma estratégia para resolver um problema" (PONTE et al., 2020, p. 10).

Um processo diretamente relacionado com a formulação de conjecturas é a identificação de padrão, pois, por meio desta, pode-se chegar em conjecturas. Jeannotte e Kieran (2017) definem a identificação de padrão como "um processo de raciocínio matemático que, pela busca de semelhanças e diferenças, infere uma narrativa sobre uma relação recursiva entre objetos ou relações matemáticas" (p.10). Esse processo se diferencia de generalizar e conjecturar, pois ele permite inferir propriedades e procedimentos de um conjunto sem a necessidade de expandi-los para um conjunto maior. Além desses, há também o processo de comparação, em que se busca por semelhanças ou diferenças entre objetos matemáticos com o objetivo de produzir uma declaração.

Por sua vez, uma generalização implica, "inferir narrativas sobre um conjunto de objetos matemáticos ou uma relação entre objetos do conjunto a partir de um subconjunto desse conjunto" (JEANNOTE; KIERAN, 2017, p. 9). Sendo assim, no processo de generalizar, reconhece-se um padrão ou uma propriedade comum a um conjunto de objetos, e se é capaz de expandir o domínio de validade de uma propriedade a um conjunto maior de objetos (PONTE; MATA-PEREIRA, 2017).

Por fim, no processo de justificação, tem-se a busca por dados, garantias e respaldos, que permitam modificar o valor epistêmico de uma narrativa (JEANNOTTE; KIERAN, 2017). Pode assumir formas como: coerência lógica, exemplos genéricos, uso de contraexemplos, por exaustão ou por absurdo, de modo a validar uma propriedade ou procedimento (PONTE et al., 2020).

## Aprendizagem do conceito de integral definida

Muitos alunos que saem do curso de CDI não tiveram o entendimento das Somas de Riemann e das Integrais de Riemann, e, possivelmente, as veem apenas como procedimentos de cálculos para se encontrar um valor aproximado de uma integral definida, que são posteriormente substituídas por antiderivação e pelo Teorema Fundamental do Cálculo

(SEALY, 2014). Não que as estratégias por antiderivação e o Teorema Fundamental do Cálculo sejam desconsiderados, mas a compreensão do conceito da Integral de Riemann é necessária para resolver problemas que estão inseridos na Matemática e em outras Ciências (HADDAD, 2013; GREEFRATH *et al.*, 2021).

Segundo Greefrath *et al.* (2021), estudantes universitários desenvolvem habilidades avançadas em relação ao conhecimento procedimental ao trabalhar com integrais em um nível simbólico. Entretanto, existem dificuldades em relação ao conhecimento conceitual, em especial: conhecer diferentes aspectos da integral, interpretar diferentes representações e fazer conexões entre essas representações, especialmente para a representação simbólica. Portanto, para alcançar uma compreensão suficiente do conceito de integral, é necessário ter uma visão mais ampla de diferentes aspectos, em relação a diferentes aplicações, e conectá-los a diferentes representações. Dessa forma, o desenvolvimento de modelos mentais básicos é essencial e indispensável para essa compreensão conceitual mais ampla do conceito de integral.

Nessa perspectiva, Greefrath *et al.* (2021, p. 2), afirmam que um “modelo mental básico de um conceito matemático é uma interpretação relacionada ao conteúdo que dá significado a este conceito”. E complementam que “modelos mentais básicos são pré-requisitos para lidar com um conceito matemático de uma forma inteligente, eles ‘capturam a essência do conteúdo matemático’” (GREEFRATH *et al.*, 2021, p. 2). Os modelos mentais são pressupostos que influenciam a forma de ver o mundo e de agir. O conceito é semelhante ao das premissas básicas inconscientes que definem os padrões de comportamento numa cultura organizacional, conforme aponta Senge (2012).

No caso do conceito de Integral de Riemann, Greefrath *et al.* (2021) propõem quatro modelos mentais básicos, sendo eles:

- o modelo mental básico de área (AR), que considera a integral definida como a medida da área delimitada pelo gráfico da função $f$ em um determinado intervalo $[a, b]$ e o eixo $x$ no plano cartesiano;
- o modelo mental básico de (re) construção (RE), que considera a integral definida de uma função $f$ representando a taxa de variação de uma quantidade como a variação total dessa quantidade em um determinado intervalo;
- o modelo mental básico da média (AV), em que a integral é entendida em conexão com os valores médios, ou seja, se a função $f$ é contínua no intervalo $[a, b]$, então existe um $\varepsilon \epsilon [a, b]$ tal que, $f(\varepsilon) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$. A integral definida pode então ser interpretada como uma generalização da média aritmética;

- e o modelo mental básico de acumulação (AC), que considera a integral definida de uma função como o limite de uma soma com um grande número de pequenos termos. A ideia não se concentra no valor do limite em si, mas na ideia de acumulação antes do valor limite ser calculado. Nesse contexto, a integral é vista como uma soma de produtos que coleta ou acumula um grande número de produtos parciais em um determinado intervalo. Essa perspectiva de somatório tende a enfatizar o processo a ser desenvolvido e não o resultado da integração.

Conforme Sealey (2014), ao tratar da Integral de Riemann, contamos com uma estrutura, que consiste não apenas em elementos, mas também nas operações sobre esses elementos e nas relações entre eles. Juntos, esses elementos e operações formam uma estrutura inteira. A autora propõe que se trabalhe com quatro camadas ao tratar da Integral de Riemann. A primeira camada da estrutura da Integral de Riemann é a Camada de Produto, composta pela multiplicação de duas quantidades: $f(x_i)$ e $\Delta x$, tal que $f(x_i)$ pode ser tratado como uma taxa e $\Delta x$ como uma diferença.

A segunda camada é a Camada da Soma, que inclui a soma de $i = 1$ até $i = n$, nos fornecendo a soma de Riemann $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \bigtriangleup x$, a qual fornece uma aproximação do valor exato. Já a terceira camada é a Camada do Limite, que inclui o limite de $n$, aproximando-se do infinito das duas camadas anteriores e nos dando a Integral de Riemann.

Por fim, a quarta camada é a Camada da Função, que permite considerar a integral definida como uma função onde a entrada é o limite superior, ou seja, o ponto final direito do intervalo sobre o qual a função é integrada, e a saída é o valor numérico da integral definida.

A análise que será apresentada na continuidade deste artigo busca relacionar os processos de raciocínio matemáticos mobilizados pelos estudantes à elaboração dessas camadas.

## Contexto da pesquisa e procedimentos metodológicos

Este trabalho foi desenhado como uma pesquisa qualitativa, de cunho interpretativo (BOGDAN; BIKLEN, 1994), e considera dados provenientes de uma intervenção realizada em uma turma de estudantes ingressantes em um curso de Engenharia, que cursavam a disciplina de CDI 1, ministrada pelo primeiro autor deste artigo. O artigo que ora apresentamos se insere numa pesquisa mais ampla, que objetiva investigar o processo de organização de tarefas de aprendizagem para salas de aula regulares (contextos reais de ensino), que contribuam para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes (TREVISAN; ARAMAN, 2021) e a elaboração de conceitos de CDI.

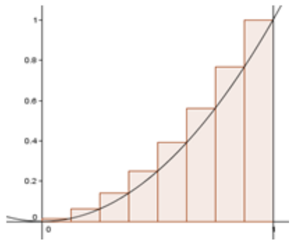
Durante a intervenção, os estudantes foram organizados, primeiramente, em grupos menores (3 a 4 integrantes) para a discussão e realização das tarefas e, em seguida, ocorreu uma plenária com toda a turma para a discussão de suas resoluções. No Quadro 1, apresenta-se a tarefa utilizada. Trata-se de uma tarefa fechada "na qual é claramente dito o que é dado e o que é pedido" (PONTE, 2005, p.7). É caracterizada como um problema, o qual demanda um tempo médio de resolução e tem um contexto puramente matemático, que é importante para o desenvolvimento da linguagem e formalização matemática por parte dos alunos, sendo favorável para desenvolvimento do raciocínio algébrico.

A tarefa proposta foca-se prioritariamente no modelo mental básico de área (AR) (GREEFRATH *et al.*, 2021), tendo em vista que objetiva contribuir para interpretação da integral definida de uma função como o valor orientado da medida da área delimitada pelo gráfico dessa função e o eixo x do plano cartesiano em um intervalo dado.

**Quadro 1** - Tarefa: Área de um segmento parabólico

1. Considere a região delimitada pela curva $f(x) = x^2$, pelo eixo e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.

a) Suponha que a região seja preenchida por retângulos, como na figura ao lado, todos com a mesma base. Construa uma sequência em que cada termo representa a medida da área de um desses retângulos. Trabalhe com frações.



b) Represente em notação de somatório a soma desses termos e efetue seu cálculo.

c) Nesse contexto, construa uma figura que ilustre $\sum_{i=0}^{7} \frac{1}{8} f(x_i)$.

**Fonte:** Adaptado de Trevisan e Goes (2016)

As camadas da Integral de Riemann (SEALEY, 2014) envolvidas na tarefa são mostradas na Quadro 2, que explicita como cada uma delas poderia ser explorada, a fim de que os alunos pudessem desenvolver uma compreensão completa da estrutura de uma integral.

**Quadro 2** - Camadas da Integral de Riemann na Tarefa

| Camada | Representação simbólica | Tarefa: Área do segmento parabólico |
|---|---|---|
| Camada 1: Produto | $[\frac{1}{c}.f(x_i)].[\triangle x]$ | Representa a medida da área em um intervalo |
| Camada 2: Soma | $\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \triangle x$ | A medida da área aproximada acumulada em todos os intervalos |
| Camada 3: Limite | $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \triangle x$ | A medida da área exata acumulada em todos os intervalos |

| | | |
|---|---|---|
| Camada 4: Função | $f(b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{b} f(x_i) \triangle x$ | Medida de área acumulada conforme $b$ varia |

**Fonte:** Arquivo pessoal

Foram coletados os protocolos contendo registros escritos das resoluções dos estudantes e o áudio das discussões realizadas por eles em pequenos grupos durante a resolução. As gravações em áudio foram transcritas na íntegra, em articulação com os protocolos produzidos, propiciando assim, a organização e a análise dos dados.

Na intenção de reconhecer uma maior variedade de processos de raciocínio, tomamos por critério para escolha dos grupos aqueles em que o áudio fosse suficientemente claro, e nos quais houve um maior envolvimento dos estudantes na "apresentação, justificação, argumentação e negociação de significados" (RODRIGUES et al., 2018, p. 399). Neste artigo trazemos os resultados a partir da análise dos dados provenientes de um grupo, composto pelos estudantes 01, 02 e 03. Os trechos que apresentamos foram selecionados de forma a atender o objetivo do artigo, ou seja, identificar os processos de raciocínio matemático mobilizados pelos estudantes ao resolver a tarefa, e compreender o modo como tais processos contribuem para a elaboração de algumas das camadas de conhecimento associadas às Integrais de Riemann. A análise apresentada na próxima seção foi realizada de forma colaborativa entre os autores deste artigo, integrantes do Grupo de Pesquisa (nome omitido), considerando aspectos metodológicos sobre a pesquisa envolvendo o raciocínio matemático em uma perspectiva escolar detalhados em Carneiro et al. (2022).

## Apresentação e Análise de Dados

Nos trechos a seguir, enquanto o grupo resolve o item (a) da tarefa, evidenciamos elementos das primeiras camadas da Integral de Riemman e os processos de raciocínio envolvidos:

> Estudante 02: Acho que [a altura] é zero dois, zero quatro né? É isso mesmo.
> Estudante 01: O zero vírgula seis ele tá na mesma altura aqui?
> Estudante 02: Então, foi o que eu falei, o zero quatro tá, o zero quatro tá certinho mas esse daqui eu acho que não tá não.

Em um primeiro momento, o grupo busca uma forma de calcular a medida da área dos retângulos. Ao olhar a representação gráfica dada na tarefa, eles inicialmente conjecturam que os valores representados no eixo y correspondem à altura dos reângulos. Porém, logo começam a perceber que nem todos os retângulos estão tão próximos da marcação gráfica. Assim, a conjectura é descartada. Continuando a discussão, ainda buscando uma forma de encontrar a altura dos retângulos, o grupo elabora uma nova conjectura, de que a altura dos retângulos poderia ser calculada a partir da expressão algébrica da função:

> Estudante 02: Aqui ó, ele dá a fórmula [$f(x) = x^2$].
> Estudante 01: O $x$ a gente pode colocar tipo um oitavo, dois oitavos, três oitavos, quatro oitavos…
> Estudante 02: Se você fizer a conta do [cinco] oitavo[s] aqui ó, a altura disso aqui vai dar zero vírgula trinta e quatro… [na verdade] trinta e nove, é bem aproximado, se você usar, isso daqui, aqui como cinco oitavos e esse daqui…

O estudante 02 justifica que a expressão $f(x) = x^2$, dada no enunciado da tarefa, poderia ser utilizada, e os estudantes passaram então a calcular as alturas pela substituição de $x$ nos pontos dados. Como forma de validar os valores encontrados, a partir de uma justificação empírica, eles encontraram uma fração ao substituir o $x$ na expressão. Posteriormente, a transformaram em decimal e reconhecem a validade do valor encontrado justificando estar próximo ao valor indicado no eixo $y$ na representação que estava junto ao enunciado da tarefa.

Tendo generalizado uma forma de obter as alturas dos retângulos, o foco da discussão passa a ser a determinação das bases, como mostra o trecho abaixo:

> Estudante 01: A base seria cinco oitavos e a altura zero quatro, você vai ter que construir a sequência do retângulo.
> Estudante 02: Essa daqui é a área do primeiro retângulo, que é altura é… não, tá errado, aqui é um oitavo, porque a base é um oitavo só.
> Estudante 01: A base do retângulo né? É porque no caso dos retângulos ele ia pegar, aqui ó a base dele aqui ó seria esse valor, esse aqui.
> Estudante 02: Aham, que é um oitavo.

O grupo inicialmente conjetura que a medida da base é igual ao valor da função do ponto de abscissa $x$, mas logo ela é descartada, pois reconhecem que a medida da base é a distância entre dois pontos consecutivos da partição. A partir das informações constantes no enunciado da tarefa, generalizam que, em qualquer um dos retângulos, ela sempre será igual a um oitavo. A discussão prossegue:

> Estudante 02: A altura do primeiro é zero, aí esse daqui seria dois oitavos. É elevado ao quadrado. Dá um dezesseis avos.
> Estudante 01: Deixa eu anotar aqui.
> Estudante 02: Altura do primeiro é zero, segundo é um dezesseis avos, do terceiro é quanto?
> Estudante 01: Da nove [sobre] sessenta e quatro.
> Estudante 02: Talvez tenha um retangulozinho aqui, mas é que a gente não tá vendo.
> Estudante 01: Pode ser.
> Estudante 03: Eu também acho que tem um retangulozinho aqui.
> Estudante 02: Aqui tem um retângulo pequeno? Ou é zero mesmo?
> Estudante 01: Tem, aqui não é zero.
> Estudante 02: Aqui é um oitavo, não, calma. É um sobre oito ao quadrado. Aqui é um [sobre] sessenta e quatro.
> Estudante 01: Isso aí, agora tá certo. Agora quatro oitavos que é esse daqui. Tem que dar maior que zero [vírgula] dois.
> Estudante 02: Quatro vezes quatro é dezesseis. Fica então dezesseis sessenta e quatro que dá para simplificar, dá para simplificar por quatro dezesseis eu acho. Não, dá quatro dezesseis, é só simplificar, [fica] um quarto.

Inicialmente, o estudante 2 formula uma conjectura que a medida da altura do primeiro retângulo era zero e, assim, sua área era nula. O estudante parece apresentar uma justificação empírica, a partir da observação da representação gráfica, que mostra um primeiro retângulo com altura medida muito próxima de zero. Na continuidade da discussão, porém, esse mesmo estudante percebe que sua conjectura estava errada e a reformula, sendo que a medida da altura do primeiro retângulo é, na verdade, $\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$. Novamente, representam alguns resultados em notação decimal como justificativa empírica de sua validade, pelo fato do valor obtido estar próximo ao valor indicado no eixo $y$ na representação que estava junto ao enunciado da tarefa.

Além disso, o grupo opta, quando possível, por simplificar algumas frações encontradas, possivelmente por ser uma prática comum em suas aulas de Matemática. Tal decisão, porém, torna mais difícil a percepção de um padrão existente na sequência de medidas de alturas, como discutiremos mais adiante.

Após efetuarem o cálculo das medidas das áreas de todos os retângulos, o estudante 2 percebe a existência de um padrão na sequência obtida, o que o leva a um processo de generalização, como mostra o trecho a seguir:

> Estudante 02: Então eu acho que é esse daqui. Esse daqui é a altura de cada termo, e a largura é sempre um oitavo, então eu acho que a somatória vai ser… vai ser… $n$ oitavo ao quadrado vezes um oitavo, vai ser cada termo.

Nesse trecho, temos que o estudante 2 generaliza que $\left(\frac{n}{8}\right)^2 \frac{1}{8}$ seria uma forma algébrica para representar as medidas das áreas, sendo $\left(\frac{n}{8}\right)^2$ a medida da altura, e $\frac{1}{8}$ a medida da base.

Finalizada a primeira parte da tarefa, o grupo trabalha agora com o item (b), que solicita a representação em notação de somatório dos termos obtidos anteriormente (medidas das áreas dos retângulos), e em seguida o cálculo da soma resultante dessa adição. O grupo opta, porém, por realizar essa adição termo a termo, ignorando a parte do enunciado que envolvia a representação em notação de somatório. Finalizados esses cálculos, discutem o último item. Nele, foi solicitado que construíssem, para a função dada, uma figura que ilustrasse a expressão $\sum_{i=0}^{7} \frac{1}{8} f(x_i)$.

A intenção do professor, ao formular, esse item, era que o grupo reconhecesse uma similaridade entre essa expressão e aquela que, supostamente, os estudantes teriam formulado no item anterior [$\sum_{i=1}^{8} \frac{1}{8} f(x_i)$]. Assim, poderiam associar o cálculo realizado anteriormente à aproximação da medida da área abaixo da curva usando as extremidades direitas dos subintervalos, enquanto a notação dada nesse item envolve as extremidades esquerdas. Assim, esperava que o grupo elaborasse conjecturas envolvendo os conceitos de soma superior e/ou soma inferior, reconhecendo suas diferenças.

Para o grupo em análise, não foi esse o caso. Eles passam a discutir o que essa notação representaria, e qual seria seu valor, sem se preocupar em construir uma figura.

> Estudante 01: A somatória começa no zero. De zero até sete.
> Estudante 02: É, vai um pouquinho antes.
> Estudante 01: Vai ter que fazer a mesma coisa que a gente fez. Mas uma parte é diferente, porque i é igual a zero e vai até sete.
> Estudante 02: O i2, i3, i4, até o i7, é a mesma coisa. O i1 vai ser zero e o i8 não tem. Do um ao sete a gente já tem.
> Estudante 01: Será que é isso?
> Estudante 02: Se substituir aqui vai ser a mesma coisa de substituir na nossa, mano. O número é igual. Ele vai começar no zero, então tem que fazer desde o zero.

Ao buscar compreender a notação, o grupo elabora a conjectura que de aquela soma é quase a mesma que a anterior, e justificativa de que os termos i2 até i7 serão os mesmos, que i1 vai ser zero, e que o i8 não vai existir. Matematicamente, essa conjectura está correta, uma vez que a partição representada nesta somatória envolve uma translação da partição com a qual haviam trabalhado no item anterior.

Assim, o primeiro termo é de fato igual a zero, visto que é o valor da função na extremidade esquerda do primeiro subintervalo. O segundo termo coincide com o primeiro termo da partição anterior, o terceiro coincide com o segundo da anterior, e assim sucessivamente. Há, assim, um processo de comparação mobilizado pelo estudante 2, uma vez que é capaz de estabelecer semelhanças que levam a produzir uma declaração.

Outra conjectura elaborada pelo grupo é que o valor da soma seria o mesmo da anterior. Tal conjectura, porém, é incorreta, visto que essa nova soma não incluiria o valor da área do último retângulo. Além disso, não foram elaboradas conjecturas acerca de alguma representação gráfica associada ao somatório, conforme solicitava o item da tarefa. Assim, inferimos nem todos os elementos da Camada da Soma da estrutura da Integral de Riemann foram ativados.

Sintetizando esta análise destacamos que foram fundamentais as discussões entre os estudantes que possibilitaram a mobilização de diferentes processos de raciocínio organizados no Quadro 3.

**Quadro 3** – Processos de raciocínio envolvidos na discussão do grupo.

| | |
|---|---|
| **FORMULAR CONJECTURAS** | • Os valores representados no eixo y correspondem à medida da altura dos triângulos;<br>• A medida da altura dos retângulos pode ser calculada a partir da expressão algébrica da função;<br>• A medida da base do retângulo é igual ao valor da função do ponto de abscissa x;<br>• A medida da base é a distância entre dois pontos consecutivos da partição |

| | |
|---|---|
| | • A medida da altura do primeiro retângulo é zero;<br>• A medida da área do primeiro retângulo é nula.<br>• A medida da altura do primeiro retângulo é $\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$. |
| **JUSTIFICAR** | • A expressão $f(x) = x^2$ pode ser usada para cálculo da medida da altura dos retângulos<br>• Os valores em notação decimal podem ser comparados com valores indicados no eixo y na representação que estava junto ao enunciado da tarefa.<br>• A representação gráfica, mostra um primeiro retângulo com medida de altura muito próxima de zero.<br>• Os termos i2 até i7 serão os mesmos nas somas dos itens (a) e (c), mas i1 vai ser zero, e não vai existir i8. |
| **COMPARAR** | • A soma no item (c) é quase a mesma que do item (a).<br>• O valor das somas dos itens (a) e (c) são os mesmos. |
| **GENERALIZAR** | • Em qualquer um dos retângulos, a medida da base sempre será igual a um oitavo;<br>• $\left(\frac{n}{8}\right)^2 \frac{1}{8}$ é a expressão geral para representar as medidas das áreas. |

**Fonte:** autores

Tais processos, por sua vez, foram fundamentais para compreensão da Camada do Produto, e de alguns elementos da Camada da Soma da estrutura da Integral de Riemann (SEALY, 2014), atreladas ao modelo mental básico de área (GREEFRATH *et al.,* 2021). Dentre os elementos da Camada do Produto, destacamos: o reconhecimento da existência de uma medida constante da base de cada retângulo; do valor variável da medida da altura de cada retângulo, correspondendo ao valor da função dada no ponto final de cada subintervalo da partição; da formulação da expressão $\left(\frac{n}{8}\right)^2 \frac{1}{8}$ , que generaliza a medida da área de cada retângulo como o produto da medida da sua base pela medida da sua altura. Sobre a Camada da Soma, há uma compreensão da notação de somatório, em especial da participação envolvida; também, da ideia de medida de área subjacente à essa adição de base multiplicativa.

## Considerações finais

Neste trabalho, objetivamos identificar os processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de CDI em um episódio de resolução de tarefas (TREVISAN; MENDES, 2018; TREVISAN et al., 2021) e compreender o modo como tais processos contribuem para a elaboração de algumas das camadas de conhecimentos associadas às

Integrais de Riemann. Como resultados, inferimos que a tarefa matemática estimulou um dos modelos mentais básicos importantes para de fato se conceituar a Integral de Riemann (GREEFRATH et al., 2021), a constar o modelo de área, e também ativou duas camadas essenciais para compreender sua estrutura (SEALY, 2014).

A Camada do Produto foi acessada por meio da compreensão de como calcular a medida da área de cada retângulo, com o reconhecimento de uma base comum a todos e de que a medida de sua altura pode ser associada ao valor da função em cada ponto. Isso se deu por meio de diferentes processos (JEANNOTTE; KIERAN, 2017): quando os estudantes elaboraram conjecturas, refutando algumas e aceitando outras; ao buscarem justificativas para tais conjecturas, seja de forma mais sistemática, a partir de conceitos envolvidos na tarefa, ou de forma empírica, usando a representação que estava junto ao enunciado da tarefa; ainda, estabelecer semelhanças entre o processo de soma realizado no item (a) e a notação de somatório do item (c); por fim, foram capazes de generalizar e expressar algebricamente a medida da  área dos retângulos.

Já a Camada da Soma foi explorada por meio da notação de somatório. Apesar de reconhecer essa ideia nos dados apresentados, ela não foi profundamente compreendida pelos estudantes em questão, pois seria necessário nesta camada o reconhecimento de um padrão envolvido nessa soma, e não apenas um processo aritmético da adição de números aleatórios. Talvez o fato dos estudantes terem realizado a simplificação das frações que representavam as medidas das alturas desses retângulos pode ter inviabilizado esse reconhecimento.

De modo geral, a tarefa em questão mostrou-se com potencial para a introdução ao conceito de Integral de Riemann, tendo em vista sua forma mais intuitiva de trabalhar algumas das camadas associadas a este conceito, e mostrando-se importante para familiarizar os alunos com elementos nela envolvidos. Embora, durante sua formulação, o professor houvesse antecipado algum potencial para explorar as quatro camadas, no grupo em questão isso não ocorreu, visto que elementos a elas associados não foram ativados de forma espontânea.

Foi a partir de discussão coletiva com toda a turma que elementos associados às camadas 3 e 4 da Integral de Riemann (Camada do Limite e da Função) mostram-se presentes, por exemplo ao explorar os significados dos valores calculados nos itens (a) e (b) como aproximações para a medida da área da região, um deles sendo uma estimativa superior e outra inferior. Também, a compreensão de que o aumento do número de retângulos torna essas aproximações cada vez mais próximas do valor exato da medida da área.

**Referências**

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. *Investigação qualitativa em educação.* Tradução Maria

João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto: Porto Editora, 1994.

CARNEIRO, L. F. G.; ARAMAN, E. M. O.; TREVISAN, A. L. Procedimientos metodológicos en la investigación del razonamiento matemático de estudiantes cuando resuelven tareas exploratorias. *PARADIGMA* (MARACAY), p. 132-157, 2022.

ELLIS, A., ÖZGÜR, Z., REITEN, L. Teacher moves for supporting student reasoning. *Mathematics Education Research Journal*, v. 30, n. 2, p. 1-26, 2018.

GREEFRATH, G. et al. Basic mental models of integrals: theoretical conception, development of test instrument, and first results. *ZDM*, v.53, p. 649-661, 2021.

HADDAD, S. Que retiennent les nouveaux bacheliers de la notion d'intégrale enseignée aulycée? *Petitx*, v. 92, p. 7–32, 2013.

JEANNOTTE, D; KIERAN, C. A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, v. 96, p. 1-16, 2017.

JONES, S. R; LIM, Y. R; CHANDLER, K. R. Teaching Integration: How Certain Instructional Moves May Undermine the Potential Conceptual Value of the Riemann Sum and the Riemann Integral. *International Journal of Science and Mathematics Education*, v.15, p.1075–1095, 2017.

LANNIN, J., ELLIS, A. B., ELLIOT, R. Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8. Reston, VA: *National Council of Teachers of Mathematics*. 2011.

MATA-PEREIRA, J; PONTE, J. P. Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, v. 96, p. 169–186, 2017.

PONTE, J. P. Gestão curricular em Matemática. Em: GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular*. Lisboa: APM, 2005. p. 11-34.

PONTE, J. P; QUARESMA, M; MATA-PEREIRA, J. Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática*, v. 156, p. 7-11, 2020.

RODRIGUES, C.; MENEZES, L.; PONTE, J. P. Práticas de Discussão em Sala de Aula de Matemática: os casos de dois professores. *Bolema*, v. 12, n. 61, p. 398-418, 2018.

SEALEY, V. Definite integrals, riemann sums, and area under a curve: what is necessary and sufficient?. *Psychology of Mathematics Education*, Mérida, Editora Universidad Pedagógica Nacional, p.46 - 53, v. 2, nov. 2006.

SEALEY, V. A Framework for Characterizing Student Understanding of Riemann Sums and Definite Integrals. *Journal of Mathematical Behavior,* n. 33, p. 230-245, 2014.

SENGE, P. *A quinta disciplina*. 28.ed. rev. e ampl. Rio de Janeiro: Best Seller, 2012.

TREVISAN, A. L.; GOES, H. H. D. O método da exaustão eo cálculo de áreas: proposta e uma tarefa com auxílio do GeoGebra. *Educação Matemática em Revista*, v. 21, n. 52, p. 79-85, 2016.

TREVISAN, A. L.; MENDES, M. T. Ambientes de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, v. 11, p. 209-227, 2018.

TREVISAN, A. L.; ARAMAN, E. M. O. Processos de Raciocínio Matemático Mobilizados por Estudantes de Cálculo em Tarefas Envolvendo Representações Gráficas. *Bolema*, v. 35, n. 69, p. 158-178, abr. 2021.

TREVISAN, A. L.; ALVES, R. M. A.; NEGRINI, M. V. Ambiente de ensino e de aprendizagem de Cálculo pautado em episódios de resolução de tarefas: resultados e perspectivas futuras. In: MENDES, M. T.; JUSTULIN, A. M. (Org.). *Produtos educacionais e resultados de pesquisas em Educação Matemática*. 1 ed. São Paulo: Livraria da Física, v. 1, 2021, p. 155-174.

**SOBRE OS AUTORES**

**ANDRÉ LUIS TREVISAN.** Doutor em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Londrina.

**ELIANE MARIA DE OLIVEIRA.** Doutora em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Docente da Universidade Tecnológica Federal do Paraná, câmpus Cornélio Procópio.

**ANA JÚLIA DA SILVA.** Licenciada em Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná Campus Cornélio Procópio.

**TAINÁ TAIZA DE ARAÚJO.** Mestre em Ensino de Matemática pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Professora da Educação Básica (SEED/PR).

**ARNOLD VINÍCIUS PRADO SOUZA.** Doutorando em Ensino de Ciências e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

**ALEX SANDRO DE CASTILHO.** Doutorando em Ensino de Ciências e Tecnologia pela Universidade Tecnológica Federal do Paraná.

**NOTAS DE AUTORIA**

André Luis Trevisan
https://orcid.org/0000-0001-8732-1912
Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Londrina, Avenida dos Pioneiros, 3131, Londrina, PR, Brasil, CEP 86036-370 – ppgect-pg@utfpr.edu.br
andreluistrevisan@gmail.com

Eliane Maria de Oliveira Araman
https://orcid.org/0000-0002-1808-2599
Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio, Av. Alberto Carazzai, 1640, Centro, Cornélio Procópio, PR, Brasil, CEP 86300-000 – ppgmat-ld@utfpr.edu.br
eliane.araman@gmail.com

Ana Júlia Da Silva
https://orcid.org/0000-0003-1190-0998

Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Cornélio Procópio, Avenida Alberto Carazzai, 1640, Cornélio Procópio, PR, Brasil, CEP 86300-000 – ppgmat-ld@utfpr.edu.br
anasilva.2018@alunos.utfpr.edu.br

Tainá Taiza De Araujo
https://orcid.org/0000-0002-1798-1074
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Londrina, Avenida dos Pioneiros, 3131, Londrina, PR, Brasil, CEP 86036-370 – ppgmat-ld@utfpr.edu.br
eliane.araman@gmail.com

Arnold Vinícius Prado Souza
https://orcid.org/0000-0001-5754-500X
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Ponta Grossa, Rua Doutor Washington Subtil Chueire, 330, Ponta Grossa, PR, Brasil, CEP 84017-220 – ppgect-pg@utfpr.edu.br
arnold.prado@hotmail.com

Alex Sandro de Castilho
https://orcid.org/0000-0003-3866-9706
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Guarapuava, Avenida Professora Laura Pacheco de Bastos, 800, Guarapuava, PR, Brasil, CEP 85053-525 – ppgect-pg@utfpr.edu.br
alexs@utfpr.edu.br

**Agradecimentos**
Não se aplica.

**Como citar esse artigo de acordo com as normas da ABNT**
TREVISAN, A. L.; ARAMAN, E. M. O.; SILVA, A. J.; ARAUJO, T. T.; SOUZA, A. V. P.; CASTILHO, A. S. Processos de raciocínio mobilizados por estudantes de CDI para compreensão da integral de Riemann. Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v. 17, p. 1-17, 2024.

**Contribuição de autoria**
André Luis Trevisan: Concepção, coleta de dados e análise de dados, elaboração do manuscrito, redação, discussão de resultados.
Eliane Maria de Oliveira Araman: Concepção, coleta de dados e análise de dados, elaboração do manuscrito, redação, discussão de resultados.
Ana Júlia Da Silva: Coleta de dados e análise de dados, elaboração do manuscrito, redação, discussão de resultados.
Tainá Taiza De Araujo: Coleta de dados e análise de dados, elaboração do manuscrito, redação, discussão de resultados.
Arnold Vinícius Prado Souza: Coleta de dados e análise de dados, elaboração do manuscrito, redação, discussão de resultados.
Alex Sandro de Castilho: Coleta de dados e análise de dados, elaboração do manuscrito, redação, discussão de resultados.

**Financiamento**
Não se aplica.

**Consentimento de uso de imagem**
Não se aplica.

**Aprovação de comitê de ética em pesquisa**
Aprovado pelo Comitê de Ética em Pesquisa da UTFPR,

Título da Pesquisa: Investigações em aulas de disciplinas matemáticas no Ensino Superior em condições reais de ensino.
CAAE: 08957619.3.0000.5547
Número do Parecer: 3.318.427
Data da aprovação: 10 de Maio de 2019

**Conflito de interesses**
Não se aplica.



**Publisher**
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus/suas autores/as, não representando, necessariamente, a opinião dos/as editores/as ou da universidade.

**Histórico**

Recebido: 16 de março de 2023.

Revisado: 14 de fevereiro de 2024.

Aprovado: 07 de março de 2024.

Publicado: 31 de julho de 2024.