ALEXANDRIA

ALEXANDRIA
Revista de Educação em Ciência e Tecnologia

Qualidade da Argumentação de Estudantes da Licenciatura em Matemática na Disciplina Álgebra Linear

Quality of Argumentation among Mathematics Teaching Degree Students in a Linear Algebra Course

Joilma Silva Carneiro[a]; Elder Sales Teixeira[b]; Andréia Maria Pereira de Oliveira[c]

a Departamento de Ciências Exatas, Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, Brasil - jscarneiro@uefs.br.
b Departamento de Física, Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, Brasil. - esteixeira@uefs.br
c Faculdade de Educação, Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil - ampo@ufba.br

Palavras-chave: Argumentação. Licenciandos(as) em matemática. Modelo teórico argumentativo. Álgebra linear.

Resumo: Este artigo utiliza o Modelo Argumentativo Toulminiano e Perelmaniano (MATP) na disciplina de Álgebra Linear da Licenciatura em Matemática, empregando-o como orientação da estratégia de ensino e instrumento analítico. O objetivo da pesquisa é analisar a qualidade dos argumentos construídos pelos estudantes nessa disciplina. Por meio de uma estratégia no formato de intervenção, observou-se que a maioria dos estudantes encontrou dificuldade em construir argumentos consistentes com justificativas necessárias para realizar a conexão entre as premissas e a conclusão, além de demonstrarem menos fundamentação e uso de recursos retóricos. Apesar das limitações na qualidade da argumentação dos estudantes ao longo do estudo, a intervenção foi considerada positiva para o desenvolvimento futuro de suas habilidades argumentativas no contexto da Álgebra Linear.

Keywords: Argumentation. Mathematics students. Argumentation theory model. Linear algebra.

Abstract: This article uses Toulmin's and Perelman's Argumentation Model (TPAM) in a Linear Algebra course within the Mathematics Teaching program as a guide to teaching strategies and as an analytical tool. The aim of this study is to analyze the quality of the argumentation devised by students in the aforementioned course. Through an intervention strategy, it was possible to observe that most students found it difficult to devise consistent argumentation containing the necessary justification in order to establish the link between the premises and the conclusion. Moreover, they displayed less grounds and use of rhetorical resources. Despite the limitations in students' argumentation throughout the study, the intervention was considered positive for the future development of their argumentation skills within the context of Linear Algebra.

Introdução

No âmbito educacional, a argumentação tem sido utilizada como instrumento de análise de argumentos de estudantes e de professores, além de fundamentar propostas de ensino (CARNEIRO et al., 2023; UYGUN-ERYURT, 2020). O desenvolvimento da habilidade argumentativa promove a possibilidade de discussão de temas e estimula a tomada de posições e o processo de justificação e fundamentação. Para Wawro (2015), a compreensão profunda e a justificativa são possíveis para estudantes quando se engajam na argumentação matemática.

Apesar de a argumentação desempenhar uma função importante nas aulas de Matemática, é comum que os universitários, sobretudo os de Licenciatura em Matemática, tenham dificuldades para formular e justificar seus argumentos no contexto de uma atividade matemática. Estudantes têm dificuldade em justificar os elementos da matemática, entre eles, os de Álgebra Linear, da Álgebra Abstrata e do Cálculo (MATOS, 2017; UYGUN-ERYURT, 2020; WAWRO, 2015). No entanto, estudos apontam metodologias diferenciadas que apresentam, entre as alternativas para superar essas dificuldades, propostas de ensino com foco em argumentação (ALMEIDA; MALHEIRO, 2018; CARNEIRO et al., 2023; RODRIGUES et al., 2021).

Ademais, há uma lacuna na literatura que investiga a argumentação tanto de estudantes quanto de professores em salas de aula de Matemática em contexto de Ensino Superior à luz da integração de lentes teóricas argumentativas (GABEL; DREYFUS 2017; METAXAS et al., 2016; RODRIGUES et al., 2021). Para Rodrigues et al. (2021), há uma carência de pesquisas sobre argumentação em contexto de Ensino Superior, sobretudo com licenciandos(as) em Matemática. Gabel e Dreyfus (2017) destacam a importância de analisar não apenas a estrutura da argumentação, mas também complementar com outras vertentes que proporcionem uma análise da qualidade da argumentação, relacionando-a com elementos retóricos.

Neste estudo, apresentamos uma análise da argumentação de estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade pública baiana em atividades com foco na Álgebra Linear. A investigação envolveu a aplicação de um modelo argumentativo fundamentado em dois referencias teóricos, o de Toulmin (2006), empregando o aspecto estrutural, e o de Perelman (1993), quanto ao aspecto retórico. Esse modelo norteou a abordagem de ensino durante a intervenção, bem como serviu de instrumento de análise. Por conseguinte, o modelo permite analisar a estrutura do argumento e os aspectos retóricos por meio da tipologia da justificativa do argumento.

Para a construção dos dados deste estudo, fizemos o uso da observação e de documentos, da produção de argumentos escritos, em duas etapas distintas da disciplina de

Álgebra Linear. Escolhemos a Álgebra Linear por sua importância estrutural na componente curricular estudada.

Com base nos argumentos apresentados, o objetivo deste artigo é analisar a qualidade dos argumentos construídos por estudantes de Licenciatura em Matemática na disciplina Álgebra Linear. Na próxima seção, apresentaremos o quadro teórico que fundamenta este estudo, discutindo com a literatura correlacionada. Na terceira seção, descreveremos os procedimentos metodológicos, seguidos da seção de análise dos dados e discussão dos resultados. Por fim, são apresentadas as conclusões e implicações.

Quadro teórico

Refletir sobre a argumentação na Educação, sobretudo na Matemática, nos remete ao modelo argumentativo desenvolvido por Toulmin (2006), que é a ferramenta de maior predominância nas pesquisas sobre argumentação na Educação Matemática (CARNEIRO; et al., 2023; SIMPSON, 2015). Com esse modelo (Figura 1), podemos realizar uma análise dos argumentos que identifica, além dos elementos que os compõem, as relações entre esses elementos, sua estrutura.

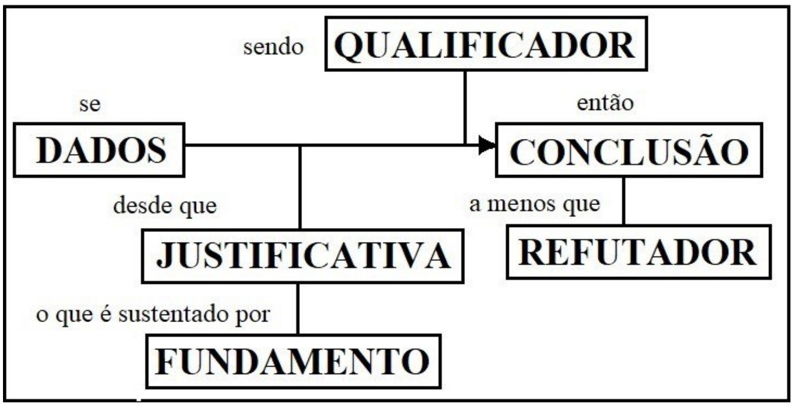

Figura 1 – *Layout* de Toulmin para a argumentação
Fonte: Adaptado de Toulmin (2006).

As partes que compõem o modelo argumentativo de Toulmin estão representadas na Figura 1. As partes principais são: os dados (evidências que sustentam uma afirmação), a conclusão (a declaração baseada nos dados) e a justificação (a afirmativa que estabelece as conexões entre dados e conclusão). Além dessas partes, há componentes complementares, tais como: o fundamento (o que apoia a justificação), o qualificador modal (que indica o nível de confiança na conclusão) e a refutação (uma afirmação que contesta a justificação, invalidando a conclusão).

O modelo argumentativo de Toulmin (2006) tem uso recorrente na Educação Matemática, como instrumento de análise da argumentação de estudantes e de professores, além de ser empregado em intervenções didáticas que promovem o ensino de argumentação (ALMEIDA; MALHEIRO, 2018; CARNEIRO et al., 2023). Entre as potencialidades desse modelo na Educação Matemática, sublinhamos: análise da estrutura de argumentos, diferenciação das componentes argumentativas de acordo com suas funções dentro de um argumento e avaliação do processo de justificar.

Apesar da predominância do modelo argumentativo de Toulmin (2006) na Educação Matemática, houve a necessidade de utilizar a perspectiva teórica de Perelman (1993), que acrescentou contribuições ao propor uma análise da argumentação por meio de recursos retóricos usados no campo da Educação Matemática (CARNEIRO et al., 2023; GABEL; DREYFUS, 2016). É um referencial com potencial para avaliar os argumentos de professores e estudantes (GABEL; DREYFUS, 2016, 2017; SILVA JÚNIOR, 2019), podendo também ser empregado para nortear abordagens de ensino a partir de seus elementos retóricos, sobretudo das técnicas argumentativas, que podem imprimir avanços para o entendimento da construção de provas matemáticas (CARNEIRO et al., 2023; GABEL; DREYFUS, 2017).

A finalidade da abordagem argumentativa de Perelman (1993) é o estudo das técnicas discursivas direcionadas a um auditório. Segundo essa teoria, busca-se a adesão de um auditório, tanto em aspecto intelectual quanto emotivo. Outro conhecimento relevante trazido pela teoria de Perelman são os tipos de argumentos e suas interações (CARNEIRO et al., 2023). Segundo Perelman, existem argumentos que se processam via ligação (Tabela 1), bem como os que o fazem por dissociação. Exemplos de argumentos por associação utilizados neste estudo incluem: definição, autoridade, exemplo, *exemplum in contrarium*, ilustração e analogia.

Tabela 1: Tipologia dos argumentos – processamento argumentativo via ligação

Argumentos quase lógicos	Incompatibilidade; identificação; reciprocidade; transitividade; analiticidade; tautologia; regra da justiça; relação do todo com as partes; relação de ordem; e relação de variabilidade.
Argumentos baseados na estrutura do real	Sucessão, argumento pragmático, finalidade, coexistência (essência, pessoa – autoridade, duplas hierarquias e argumentos *a fortiori*).
Argumentos que fundam a estrutura do real	Exemplo, ilustração, modelo, analogia, metáfora.

Fonte: Elaborado pelos autores.

O argumento de definição é quando professores ou estudantes justificam suas ideias por meio de relações conceituais do campo de estudo. No argumento de autoridade, a justificativa tem uma credibilidade atribuída a um especialista ou autoridade na área. Já o argumento pelo exemplo, confirma a regra ou conclusão defendida, enquanto pelo *exemplum in contrarium* invalida uma generalização. O argumento de ilustração objetiva tornar presente a regra ou conclusão defendida e, dessa forma, reforça a regra. Utiliza-se do argumento de analogia por meio de uma semelhança entre aquilo que se apresenta como novo e algo conhecido (OLIVEIRA, 2016).

A argumentação desempenha um papel importante nas aulas de Matemática. Discutir a veracidade dos resultados, compreender a estrutura de um argumento, suas relações e componentes, além de compreender a tipologia das justificativas empregadas são aspectos cruciais. Isso envolve a aplicação de propriedades, axiomas e teoremas para sustentar as justificativas, juntamente com o uso de técnicas argumentativas que aumentam a adesão ao tema discutido. Essas são as vertentes argumentativas empregadas na produção e análise da qualidade da argumentação dos estudantes, sob a associação das perspectivas teóricas de Toulmin (2006) e Perelman (1993).

Destarte, utilizamos dois referenciais, o de Toulmin (2006) e o de Perelman (1993), pois são complementares para a produção e para a análise da argumentação no ensino de Matemática. Assim, compreendemos que, isolados, cada um deles não é suficiente para o tipo de produção e análise da argumentação que desenvolvemos neste estudo. Sustentamos ainda que, para a produção da argumentação, é necessário promover o ensino explícito de argumentação. É importante que estudantes de Licenciatura em Matemática se apropriem de teorias argumentativas para que possam utilizá-las tanto em seus estudos quanto na prática profissional.

Portanto, construímos o modelo teórico Toulminiano e Perelmaniano (MATP), no qual associamos o *layout* de Toulmin (2006) à perspectiva de Perelman (1993). Esse modelo foi utilizado neste estudo para orientar a abordagem de ensino durante a intervenção didática, bem como para instrumentar a análise de argumentos de estudantes em contexto da Álgebra Linear. Nas subseções, a seguir, apresentaremos o que foi empregado desse modelo.

MATP – Abordagem argumentativa de ensino

A abordagem com foco argumentativo nas aulas promove interação entre estudantes e professores, incentivando discussões sobre temas específicos. Com o MATP, pudemos promover um ensino explícito de argumentação, abordando a produção de argumentos, técnicas argumentativas e o processo de justificação de ideias. Isso inclui discutir a força das conclusões em diferentes situações argumentativas, elementos essenciais para a comunicação matemática (GABEL; DREYFUS, 2017).

No esquema desenvolvido para o MATP (Figura 2), associamos elementos do *layout* de Toulmin à tipologia dos argumentos proposta por Perelman. As premissas na perspectiva de Perelman (**P**), correspondentes aos dados na perspectiva de Toulmin (**T**), são constituídas por informações em (**P**). A tese principal em (**P**), equivale à conclusão em (**T**), sendo baseada nas premissas. A justificação estabelece a conexão entre premissas e conclusão. A natureza desta justificativa baseia-se na tipologia dos argumentos de (**P**), enquanto o fundamento é o conhecimento partilhado, pelo campo que credencia a justificativa. O refutador é adicionado ao esquema quando há possíveis exceções, apresentadas por meio de contraexemplo(s), evidenciando desacordo quanto à verossimilhança, à plausibilidade e à probabilidade da conclusão. O qualificador é incluído no esquema quando é necessário concordar com a tese discutida, enfatizando sua certeza e imprimindo-lhe confiança.

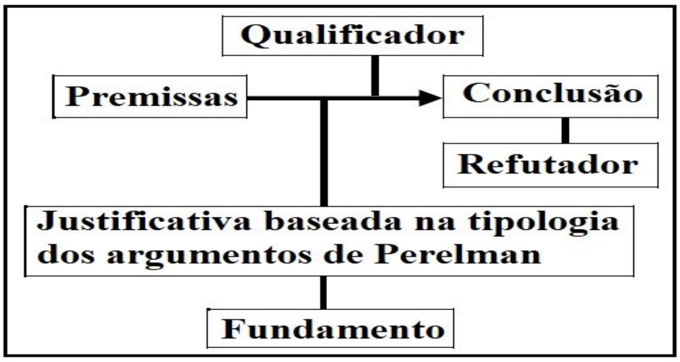

Figura 2 – Esquema simplificado do MATP
Fonte: Elaborado pelos autores.

Nas atividades da disciplina de Álgebra Linear, aplicamos o esquema do MATP (Figura 2) para aprimorar as habilidades argumentativas dos estudantes de Matemática, tanto no aspecto lógico quanto no retórico. Durante as discussões, empregamos a metodologia do referido modelo argumentativo para definir a estrutura dos argumentos, convencer e persuadir em relação aos temas abordados em aula. É crucial destacar que valorizamos o processo de justificação como um componente central, incentivando os(as) estudantes a fundamentarem suas conclusões com base em premissas sólidas e raciocínio consistente. Isso não apenas fortalece a compreensão dos conceitos matemáticos, mas também promove a capacidade dos estudantes de expressar e defender suas ideias de forma clara e convincente.

Enquanto a discussão em sala de aula é valiosa para explorar diferentes perspectivas e fomentar o debate oral entre os estudantes, o modelo teórico-argumentativo complementa esse processo ao oferecer uma estrutura organizada das componentes de um argumento. Além disso, ele focaliza na tipologia das justificativas, o que é essencial para a construção de argumentos válidos. Dessa forma, o MATP não substitui a discussão em sala de aula, mas enriquece e fortalece as habilidades argumentativas dos estudantes, preparando-os para analisarem criticamente e articularem seus pontos de vista de maneira eficaz.

MATP – Instrumento de análise

Empregamos o MATP para a análise deste estudo, observando a combinação das componentes do argumento, de acordo o modelo nas falas e argumentos produzidos pelos estudantes durante as atividades práticas da pesquisa, após receberem um ensino explícito de argumentação. Investigamos o aspecto estrutural conforme a perspectiva de Toulmin, bem como a tipologia da justificativa empregada segundo a retórica perelmaniana.

A qualidade da argumentação é determinada pela consistência da justificação e do fundamento, além dos outros elementos que sejam necessários para validar o argumento. Um argumento de melhor qualidade é bem estruturado, devidamente justificado e valida sua conclusão. Um argumento é considerado de qualidade mínima (Estágio A) quando não apresenta todas as justificativas necessárias. Argumentos de qualidade mediana (Estágio B_1) apresentam as justificativas necessárias para validar a conclusão. Se incluírem justificativas complementares, são considerados de melhor qualidade (Estágio B_2), reforçando o convencimento da conclusão. Na Educação Matemática no Ensino Superior, os argumentos de definição são fundamentais, mas a inclusão de exemplos e contraexemplos pode reforçar a compreensão dos temas, contribuindo para o convencimento.

Argumentos que vão além dos critérios do estágio B_1 ou B_2 e apresentam fundamentos são considerados de melhor qualidade (Estágio C_1). O fundamento desempenha um papel crucial ao credenciar as justificativas. Em certos casos, a presença dos elementos qualificador e/ou refutador pode ser necessária, contribuindo para a validade do argumento. Se a necessidade desses elementos é atendida, o argumento é considerado de melhor qualidade (Estágio C_2). A seguir, apresentamos o quadro analítico (Tabela 2) utilizado para análise da qualidade da argumentação, no qual associamos o modelo estrutural de Toulmin (2006) à perspectiva teórica de Perelman (1993).

Tabela 2 – Quadro analítico utilizado para avaliar a qualidade da argumentação

Estágio A	Argumentos que atendem ao eixo: premissas-justificativa-conclusão, mas que não apresentam todas as justificativas necessárias para validar a conclusão.
Estágio B	B_1: Argumentos que possuem premissas, conclusão e constituem-se de todas as justificativas necessárias para validar a conclusão, mas não apresentam os fundamentos. B_2: Argumentos que além dos itens citados no estágio B_1, contemplam justificativa(s) complementar(es) para validar a conclusão.
Estágio C	C_1: Consiste em argumentos que além dos itens citados no estágio B_1 ou B_2, apresentam fundamentos para justificativas. C_2: Argumentos que além dos itens citados no estágio C_1, contemplam uma refutação e/ou qualificação, caso a situação argumentativa requisite a presença destes componentes.

Fonte: Elaborado pelos autores.

Procedimentos metodológicos

Optamos por uma abordagem qualitativa para orientar este estudo devido à natureza dinâmica do objeto, que envolve um processo reflexivo. Além disso, nossa investigação busca mais a compreensão do que a explicação dos fenômenos estudados (LICHTMAN, 2010). Os aspectos éticos da pesquisa foram considerados de acordo com a Resolução do Conselho Nacional de Saúde n.º 510 de 07/04/2016. Este estudo foi registrado no Comitê de Ética em Pesquisa de uma Universidade pública do estado da Bahia.

A intervenção didática foi implementada na disciplina de Álgebra Linear I do curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade estadual. Esta disciplina, de caráter obrigatório, tem uma carga horária de 60 horas e é ministrada no 3° semestre do curso. Seu conteúdo programático inclui: Matrizes, determinantes e sistemas lineares; Espaços vetoriais; Dependência e independência linear; Base e dimensão; Transformações lineares; Transformações geométricas; Teorema do Núcleo e da Imagem.

Apresentamos o projeto aos 18 estudantes que estavam presentes e ao professor da turma que participariam da pesquisa. Explicamos para eles como seria a intervenção didática, qual seria seu objetivo e os procedimentos metodológicos que seriam empregados. Informamos sobre o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) e, depois, solicitamos o consentimento dos estudantes em participar da pesquisa. Aceitaram o registro no TCLE os 18 estudantes e o professor[1] da disciplina.

Dessa forma, o processo metodológico deste estudo começou com o ensino explícito de argumentação, em uma exposição dialogada de aproximadamente 1h, na **primeira etapa** da pesquisa, realizada no início da disciplina. Durante essa sessão, os estudantes foram apresentados aos conceitos de argumentação, *layout* de Toulmin (2006), o MATP e técnicas argumentativas de Perelman (1993). Destacou-se a importância do processo de justificação e foram dados exemplos de esquemas argumentativos, utilizando contextos de matemática básica e matrizes. Os participantes receberam um texto, contendo teorias argumentativas para leitura em casa, como suporte à intervenção. Na aula subsequente, dedicamos 1h30 para atividades práticas e produção de dados em grupos, avaliando o ensino explícito de argumentação conforme o MATP, para posterior estudo.

Ainda nessa etapa da construção dos dados, em comum acordo com o professor da disciplina, propusemos uma questão com enfoque argumentativo que foi aplicada na primeira avaliação individual da disciplina, cujas respostas serviram como dados para este estudo (Ver em análise dos dados). Para a análise dos argumentos construídos pelos estudantes, o professor nos forneceu a cópia da resolução da referida questão. Assim, investigamos se os estudantes utilizaram justificativas consistentes para conectar premissas e conclusões na questão, além de verificarmos se empregaram fundamentos consistentes para as justificativas. Essa análise contribuiu para avaliar a qualidade da argumentação individual, conforme a Tabela 2.

Após o professor da disciplina explicar os principais conceitos de Espaços e Subespaços Vetoriais, avançamos para **a segunda etapa** da intervenção, aplicando questões com foco argumentativo. Essa atividade prática foi realizada em dois grupos de quatro estudantes (grupos Q e R) e um grupo de três estudantes (grupo S). Durante essa atividade, cada grupo discutiu e respondeu as questões utilizando o MATP, com um celular gravando as discussões. Os estudantes debateram durante uma hora. Em seguida, convocamos um representante de cada grupo para explanar no quadro o desenvolvimento da resposta de uma das questões. Posteriormente, cada representante voluntariamente resolveu uma questão, cuja

[1] Visando a aumentar a confiabilidade deste estudo, esse professor realizou uma revisão desse texto em relação às seções de metodologia, análise e discussão dos resultados.

resposta foi discutida por toda a sala durante 30 minutos. Toda a discussão foi registrada em áudio e vídeo.

Para analisar os argumentos dos estudantes, transcrevemos vídeos e áudios das discussões em grupos pequenos e na sala toda, além de registrar dados relevantes em nosso caderno de bordo. Durante essa análise, buscamos identificar as justificativas para a passagem das premissas às conclusões, observando sua tipologia e fundamentação. Avaliamos a necessidade de refutação e qualificação nos argumentos, organizando-os conforme a estrutura do MATP. Em seguida, analisamos a qualidade dos argumentos de maneira coletiva, com base na Tabela 2. Para identificar as contribuições dos grupos e estudantes individuais, utilizamos letras maiúsculas para os grupos (Q, R ou S) acompanhadas de subscrito para diferenciar cada estudante (por exemplo, R_1 representa um estudante do grupo R), enquanto o professor é representado por (P), a pesquisadora por (Pe) e a turma por (T).

Análise dos dados e discussão dos resultados

A análise será dividida em duas etapas. Na primeira etapa, estudaremos os dados gerados no início da disciplina, focando na qualidade da argumentação individual. Na segunda etapa, analisaremos os dados produzidos durante o curso e em meados da disciplina, concentrando-nos na análise da argumentação coletiva.

Análise dos dados e discussão dos resultados – etapa I

Nesta etapa, aplicamos uma questão com enfoque argumentativo na primeira avaliação da disciplina. Nosso objetivo foi avaliar a qualidade dos argumentos construídos individualmente pelos estudantes, conforme detalhado na Tabela 2. Verificamos se os estudantes elaboraram justificativas e apresentaram fundamentos alinhados com as premissas e conclusões de cada item, buscando construir argumentos consistentes. Também investigamos a tipologia das justificativas utilizadas. Dos 18 estudantes que consentiram com o (TCLE), 17 participaram da avaliação, e 14 responderam à questão apresentada.

3) Classifique em Verdadeiro (V) ou Falso (F). Se Falso, mostre com um exemplo; se Verdadeiro, justifique; para as justificativas apresentadas, há proposições ou teoremas que a(s) sustente(m)?

a) Se A e B são matrizes tais que $AB = 0$, então $A = 0$ ou $B = 0$.
b) Se A e B são matrizes simétricas, o produto AB é simétrico.
c) Se A é uma matriz ortogonal, então $\det A = \pm 1$.

Respostas: a) Falsa, b) Falsa, c) Verdadeira.

Figura 3 – Questão com enfoque argumentativo da primeira avaliação
Fonte: adaptada de Strang (2013).

No item (a), a metade dos estudantes acertou a resposta da classificação, identificando-a como falsa. Para justificar a falsidade, eles apresentaram um contraexemplo, denominado de *exemplum in contrarium* na perspectiva de Perelman (1993) (Figura 4)[2]. Dois desses estudantes apresentaram proposições que sustentam o resultado (Figura 5). Os outros estudantes que não acertaram a classificação do item, informaram que a proposição era verdadeira, apresentando exemplos ou proposições que não sustentam o resultado apresentado, ou deixaram a questão sem resposta (Figura 6).

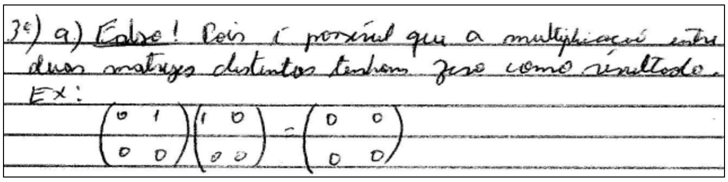
3ª) a) Falso! Pois é possível que a multiplicação entre duas matrizes distintas tenham zero como resultado.
EX:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Figura 4 – Primeiro exemplo de resposta da Questão 3 item "a"
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

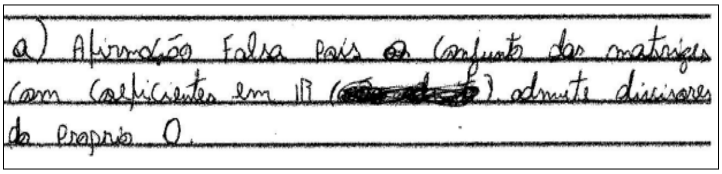
a) Afirmação Falsa pois o conjunto das matrizes com coeficientes em $\mathbb{R}$ ( ) admite divisores do próprio 0.

Figura 5 – Segundo exemplo de resposta da Questão 3 item "a"
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

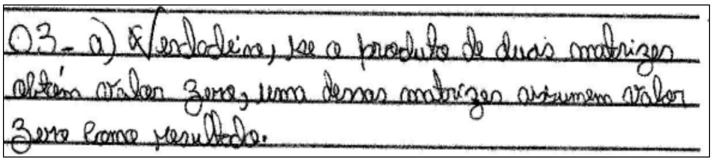
03- a) Verdadeira, se o produto de duas matrizes obtém valor zero, uma dessas matrizes assumem valor zero como resultado.

Figura 6 – Terceiro exemplo de resposta da Questão 3 item "a"
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Metade dos estudantes não atingiu o estágio A na qualidade da argumentação para **o item (a),** apresentando classificações equivocadas e justificativas inadequadas para validar a conclusão. Por outro lado, cinco estudantes alcançaram o estágio B_1, apresentando um contraexemplo que invalidou a classificação proposta e evitou a conclusão.

Os outros dois estudantes alcançaram o estágio C_1 ao fornecerem um fundamento que validou a justificativa. No entanto, não incluíram justificativas retóricas complementares.

No item (b), três estudantes classificaram corretamente a proposição como falsa. Um não forneceu justificativa, outro apresentou um contraexemplo e um terceiro utilizou propriedades para embasar suas justificativas (Figura 7). Os demais estudantes declararam que a proposição era verdadeira ou não conseguiram determinar sua veracidade. É importante destacar que, se os estudantes que afirmaram ser verdadeira tivessem percebido sua validade apenas em casos específicos, fornecendo um contraexemplo, eles teriam acertado a

[2] As figuras dessa questão representam algumas das ilustrações que descrevemos na análise de cada item conforme cópia das avaliações dos estudantes.

classificação. No entanto, generalizaram indevidamente a conclusão para todas as matrizes simétricas, aplicando propriedades de forma inadequada (Figura 8).

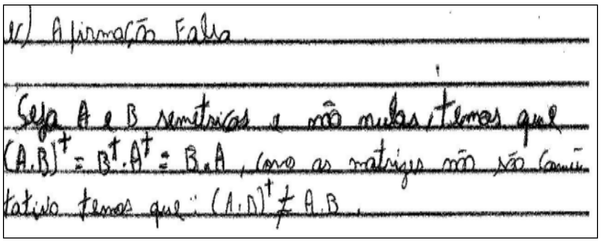

Figura 7 – Primeiro exemplo de resposta da Questão 3 item "b"
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

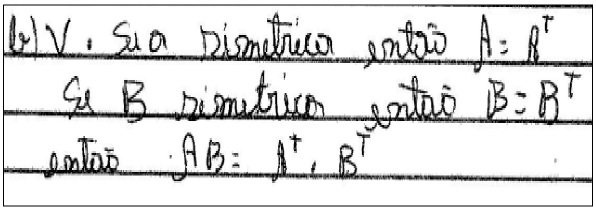

Figura 8 – Segundo exemplo de resposta da Questão 3 item "b"
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Na avaliação da qualidade da *argumentação* dos estudantes para **item (b)**, compreendemos que a maior parte dos estudantes não atingiu o estágio A. Esses estudantes não acertaram a classificação da proposição ou, quando acertaram, não forneceram pelo menos uma justificativa plausível ou coerente com a classificação proposta. Um estudante encontra-se no estágio B_1 por ter apresentado uma justificativa por meio de um contraexemplo, enquanto outro alcançou o estágio C_1 por incluir não apenas uma justificativa, mas também a fundamentação, dando credibilidade à argumentação.

Para valorar a proposição como falsa (itens **a** e **b**), percebemos que eles justificam por meio de contraexemplos e, em menor frequência, constatamos aqueles que fazem o uso do fundamento para credenciar a justificativa. A tipologia da justificativa mais empregada foi o argumento pelo exemplo, pelo *exemplum in contrarium* e por definição.

No item (c), metade dos estudantes classificou corretamente a proposição como verdadeira. Destes, dois não forneceram justificativas, três apresentaram justificativas incompletas ou com erros de definição (Figura 9), enquanto dois ofereceram justificativas fundamentadas (Figura 10). A outra metade dos estudantes indicou que a proposição era falsa ou não conseguiu determinar sua veracidade.

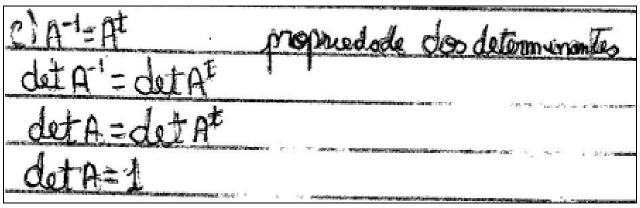

Figura 9 – Primeiro exemplo de resposta da Questão 3 item "c"
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

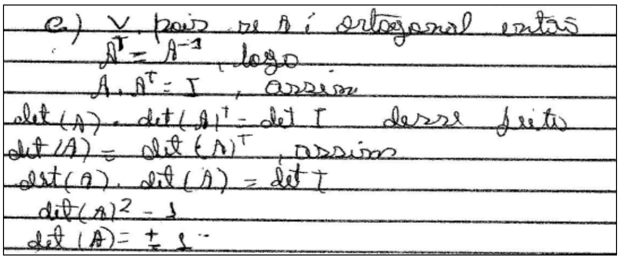
c) V, pois se A é ortogonal então
$A^T = A^{-1}$, logo
$A \cdot A^T = I$, assim
$\det(A) \cdot \det(A)^T = \det I$ desse jeito
$\det(A) = \det(A)^T$, assim
$\det(A) \cdot \det(A) = \det I$
$\det(A)^2 = 1$
$\det(A) = \pm 1$

Figura 10 – Segundo exemplo de resposta da Questão 3 item “c”
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Nesse item, uma pequena parte dos estudantes apresentou as justificativas suficientes para validar a conclusão. Aqueles que não responderam de modo apropriado à classificação do item, não aplicaram as propriedades de maneira adequada para validar o resultado. Esses estudantes poderiam ter recorrido a recursos retóricos por meio de exemplos ou contraexemplos que corroborassem a compreensão da proposição. A tipologia do argumento usada nesse item foi a de definição. Acreditamos que, sobretudo nesse item, por haver mais generalização, os estudantes poderiam ter empregado os demais tipos de argumento para apoiar o resultado almejado.

Portanto, em relação à qualidade da argumentação dos estudantes para o **item (c)**, compreendemos que mais da metade não alcançou o estágio A. Mesmo os estudantes que classificaram corretamente a proposição como verdadeira, mas não apresentaram pelo menos uma justificativa para conectar as premissas à conclusão, não foram considerados no estágio A. Isso sugere a ausência da estrutura básica do argumento, que envolve a relação entre premissas, justificativas e conclusão. Três estudantes estão no estágio A, pois não apresentaram as justificativas necessárias para validar a conclusão.

Ainda neste item, dois estudantes alcançaram o estágio C_1, porque além do eixo dos três componentes, o argumento incluiu um fundamento e, assim, compreendemos como uma melhor qualidade para argumentação. As justificativas e os fundamentos podem ser visualizados em uma das respostas na Figura 10.

Nessa questão, boa parte dos estudantes buscou estudar a veracidade das proposições e justificar suas respostas. Desta forma, eles atenderam a um importante aspecto da prática argumentativa que é a geração de justificativas. No entanto, ainda percebemos que o uso do fundamento foi menos utilizado. Para Toulmin (2006), o fundamento é um elemento importante no discurso argumentativo uma vez que esse elemento empresta uma “autoridade à justificativa”. O fundamento, segundo Can e Isleyen (2020), aumenta a validade do argumento.

A dificuldade dos estudantes em produzir argumentos de melhor qualidade, observada neste estudo, ecoa em pesquisas anteriores envolvendo estudantes universitários de Matemática (UYGUN-ERYURT, 2020; VIEIRA; SOUZA; IMAFUKU, 2020).

Especificamente na Álgebra Linear I, área foco deste estudo, percebe-se a necessidade de argumentos que incorporem fundamentos e outros elementos argumentativos pertinentes à situação, além dos componentes principais. Como resultado, entendemos que boa parte dos estudantes não conquistou uma qualidade melhor da argumentação.

Apesar da maioria dos estudantes não ter alcançado o estágio de melhor qualidade da argumentação, identificamos efeitos da intervenção didática no desenvolvimento de suas habilidades. Permitir que estudantes de Licenciatura em Matemática trabalhem com questões que demandam classificação de proposições em verdadeiras ou falsas, juntamente com suas justificativas e fundamentos, conforme aplicado no modelo da questão, pode ampliar a compreensão dos temas matemáticos (VIEIRA; SOUZA; IMAFUKU, 2020). Ademais, ao se apropriarem de questões com enfoque argumentativo, caso venham a atuar no campo educacional, poderão proporcionar aos estudantes atividades de cunho argumentativo.

Análise dos dados e discussão dos resultados – etapa II

Esta etapa é composta pela construção coletiva de argumentos, após discussão em pequenos grupos e/ou com o grupo de toda a turma, acerca de questões com foco argumentativo e aplicações do MATP sobre Espaço e Subespaços Vetoriais. A lista contém três questões. O tempo de aula não permitiu uma discussão mais aprofundada para a questão 3. Portanto, analisaremos as questões 1 e 2 por termos dados que permitiram a análise segundo o objeto de estudo.

Para compreender a elaboração dos argumentos dos estudantes, destacaremos trechos das discussões acerca de cada questão para construir um argumento. Avaliaremos a construção das justificativas, sua tipologia, seus fundamentos e outros elementos argumentativos em relação às premissas e conclusões de cada questão, visando um argumento consistente. Seguiremos a ordem proposta pelo modelo do MATP na construção do argumento. Analisaremos a tipologia das justificativas, verificando se os estudantes utilizaram elementos retóricos que sustentassem o tema em discussão. Em seguida, avaliaremos a qualidade dos argumentos elaborados pelos estudantes de acordo com a Tabela 2.

1) Se $Ax = B$ é um sistema linear homogêneo de m equações em n incógnitas, então o conjunto dos vetores-solução é subespaço de $\mathbb{R}^n$. Justifique esta asserção. Quando possível, apresente fundamentos para as justificativas. Para refutar esse resultado, qual(is) alterações deveríamos aplicar no sistema acima? Justifique.

Figura 11 – Questão 1 com enfoque argumentativo para discussão nos grupos
Fonte: Adaptada de Ruggiero e Vitorino (2018, p. 3).

Os grupos relataram dificuldade no entendimento dessa questão com relação à notação e ao estudo do conjunto solução. Portanto, optamos por colocar em plenária com toda a turma e por construir a resolução da questão coletivamente, visto que ela despertou curiosidade e gerou desafios para a discussão nos grupos. O estudante S_1 foi o voluntário que se propôs a desenvolver a questão no quadro, com a contribuição da turma e mediação da pesquisadora e do professor.

> S_1: Como montar esse sistema?
> Pe: E precisa montar esse sistema?
> P: Não tem a forma...
> P: A forma matricial?
> (S_1: Continua sem demonstrar entendimento).
> T: Não manifesta entendimento, apenas vontade de compreender o conjunto solução.
> Pe: Propõe que se analise inicialmente o que acontece estudando um exemplo e escreve no quadro um caso particular de um sistema homogêneo.
> $$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Destarte, com o exemplo de um sistema linear homogêneo, houve um estudo do conjunto solução. S_1 informou: "uma é a solução nula, mas esqueci a outra". A pesquisadora perguntou: "Se o sistema é linear homogêneo, ele tem apenas a solução nula ou ele tem o quê?" A turma respondeu: "Infinitas soluções, incluindo a nula". S_1 resolveu o sistema com a colaboração da turma e encontrou a solução em função da variável z, S = {(z, z, z) com z real}. Com a mediação da pesquisadora e do professor, a turma percebeu que a solução nula e as demais soluções, de acordo com a condição encontrada para o valor de x e de y, em função de z, satisfazem o sistema. Em seguida, a pesquisadora perguntou: "O conjunto solução desse sistema é subespaço vetorial?" S_1 respondeu que, como tanto a solução nula quanto a soma de duas quaisquer soluções satisfazem, então é subespaço. A pesquisadora acrescentou a pergunta: "o produto de um escalar real por uma solução está nesse subespaço?" A turma respondeu que sim.

Na sequência, destacamos que estávamos realizando o estudo de um caso particular. Deveríamos proceder pensando no caso geral, ou seja, para todo sistema linear homogêneo. S_1 propôs escrever o sistema na forma matricial e igualá-lo à matriz nula. O professor interveio com perguntas que entendemos com pró-argumentativas[3]. Destacamos algumas: "Quem é a matriz dos coeficientes? Por que devemos igualar a zero? Como se justifica isso?" Ocorreu, neste momento, a discussão do conjunto solução de qualquer sistema linear homogêneo:

> T: A solução trivial é igual a 0. Logo, a solução nula pertence ao conjunto solução do sistema.
> Pe: Se a gente pode tomar X_1 e X_2 pertencentes ao conjunto solução, a soma pertencerá?
> P: Se X_1 é solução, quem é AX_1?
> S_1: AX_1 é igual a 0.
> P: De maneira análoga, fazemos com X_2 sendo solução, AX_2 também é igual a 0.
> Pe: Então, se tomarmos $A(X_1 + X_2)$. Pode dizer que é igual a zero aplicando qual propriedade?
> T: A propriedade distributiva.
> Pe: Distributiva da multiplicação de matrizes.
> S_1: Vai dar então que $X_1 + X_2$ pertence ao conjunto solução.

[3] Perguntas que estimulam a interação entre estudantes e de estudantes com o professor, visando à produção de argumentos sobre o tema da aula (CARNEIRO; TEIXEIRA; OLIVEIRA, 2023).

> Pe: Agora, só falta que condição para verificar?
> T: A terceira condição para ser subespaço.
> S_1: Multiplicação por escalar. Se vai ter um alfa pertencente a $\mathbb{R}$ e uma solução X que quando multiplica alfa por X pertence ao conjunto solução.

Em seguida, incentivamos a turma a fazer a associação dos elementos argumentativos presentes na proposição da questão 1. Utilizamos perguntas pró-argumentativas: “Quais são as premissas? Qual é a conclusão? Qual o porquê de sairmos da premissa e concluirmos o resultado? Quais as justificativas aplicadas? Quais são os fundamentos? Há condições para refutar o resultado?”. O professor perguntou: “O resultado da proposição falharia se acontecesse o quê?" Q_2 e o professor disseram que, em vez do termo refutar, utiliza-se “falhar”. Na sequência, a turma respondeu que a conclusão seria inválida se o sistema não fosse homogêneo. Após todo o processo argumentativo, temos o argumento construído coletivamente de acordo o MATP com intervenções do professor e da pesquisadora:

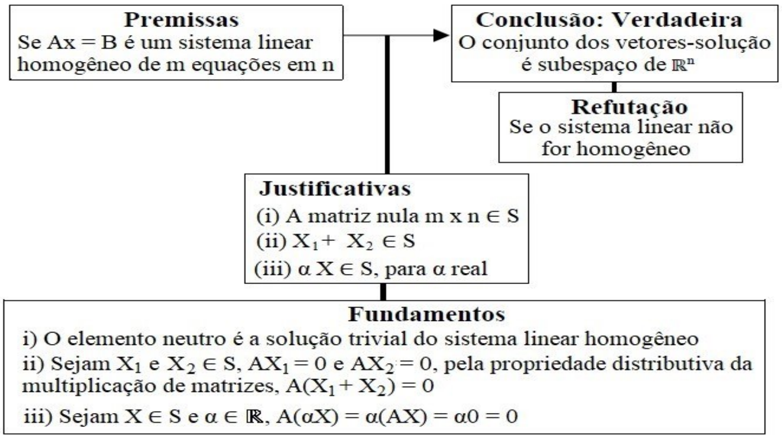

Figura 12 – Argumento construído coletivamente referente à primeira questão
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

A resolução da questão nos grupos foi dificultada pela compreensão conceitual dos sistemas de equações lineares. Observamos que a turma tinha dificuldade ou não se recordava das possíveis soluções de um sistema linear homogêneo. Esses resultados coincidem com a pesquisa de Cardoso (2014), que identificou dificuldades dos estudantes em lidar com conceitos básicos durante o curso de Álgebra Linear. Segundo Wawro (2015), apesar da importância do conceito de solução em matemática em diversos contextos, os estudantes têm dificuldades em entender o significado simbólico de “ser uma solução”. Essa complexidade reside na interpretação do simbolismo e nas várias interpretações das soluções de certas equações.

A retomada de conhecimento só ocorreu após a discussão em plenária de um caso particular de sistema linear homogêneo e o desenvolvimento do seu respectivo conjunto solução. Concordamos que os casos particulares podem elucidar a compreensão de tópicos de

Álgebra Linear (BOGOMOLNY, 2007). A utilização dos casos particulares tem o papel de fundamentar o raciocínio e, desta forma, contribuir como uma ferramenta convincente.

Além da dificuldade com o conceito e com a utilização da solução do sistema dado em sua forma matricial, intuímos que a turma não estava segura das condições necessárias para ser um subespaço. Houve intervenções tanto da pesquisadora quanto do professor para a construção das razões que levavam o conjunto solução a ser um subespaço vetorial. Os estudantes demonstraram dificuldades para mostrar o porquê de as condições do subespaço serem atendidas. A presença da solução nula, atendendo à primeira condição, foi aplicada com a justificativa, todavia, as outras condições foram desenvolvidas quando encorajamos a turma e intervimos com perguntas que orientavam o emprego das condições e das propriedades necessárias para a elaboração das respostas.

Os estudantes usaram, principalmente, o argumento de definição, enquanto a pesquisadora usou o argumento pelo exemplo e o professor argumentou com base em informações das aulas. Embora os argumentos de definição tenham um papel essencial na matemática, a inclusão de outros tipos de justificativas é vantajosa para a compreensão dos temas matemáticos. Metaxas et al. (2016) sustentam que, ao aumentar os elementos que apoiam a argumentação, a compreensão se torna mais sólida.

Em relação à qualidade da argumentação, no início da discussão nos grupos, os estudantes não atingiram o estágio A. A construção do argumento consistente ocorreu coletivamente, envolvendo toda a turma e com a intervenção do professor e da pesquisadora. Compreendemos que o argumento elaborado pela turma após a mediação, especialmente por meio de perguntas pró-argumentativas, contemplou o estágio C_2 em termos de qualidade argumentativa.

2) **Verdadeiro ou Falso** (se falso, mostre por meio de exemplo; se verdadeiro, justifique; para a(s) justificativa(s) apresentada(s), há proposições ou teoremas que a(s) sustente(m)?) Ilustre cada uma das proposições (geometricamente, exemplos).
   - (i) $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0\}$ é um subespaço vetorial do $\mathbb{R}^2$.
   - (ii) $U = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u = \alpha\,(1, 1)\}, \forall\, \alpha \in \mathbb{R}$ é subespaço de $\mathbb{R}^2$.
   - (iii) Qualquer reta que não passe pela origem é subespaço de $\mathbb{R}^2$.
   - (iv) A união de subespaços vetoriais de um mesmo espaço vetorial é necessariamente um subespaço vetorial. *Respostas:* (i) F, (ii) V, (iii) F, (iv) F

Figura 13 – Questão 2 com enfoque argumentativo para discussão nos grupos
Fonte: Adaptada de Ruggiero e Vitorino (2018, p. 1–2).

Para essa questão, em relação às discussões que ocorreram nos grupos, só descreveremos as informações obtidas no grupo R[4].

[4] Os grupos Q e S tiveram uma baixa participação e interesse inicial nas discussões. Embora alguns estudantes tenham compartilhado ideias após incentivo do professor e da pesquisadora, a interação entre os membros permaneceu baixa. Durante a apresentação coletiva, alguns estudantes desses grupos foram mais ativos, contribuindo para as respostas, porém os áudios dessas discussões não foram conclusivos para o estudo.

(i) Alguns estudantes defendiam que a proposição é verdadeira, porém não apresentaram justificativas suficientes para sustentar a conclusão. Outros defendiam que era falsa, mas também não forneceram as justificativas necessárias. Compreendemos que houve uma falta de consenso no grupo.

> R_1: Acho que não é um subespaço, não vale a condição 3.
> R_2: Será? Se passa pela origem, o ponto (0,0) pertence.
> R_1: Sim, o ponto (0,0) pertence.
> R_3: Então é subespaço.
> R_1: Mas a questão é que X é maior ou igual a zero e Y é maior ou igual a zero... não sei, acho que não é.
> R_3: Ele passa pela origem, é subespaço.
> R_1: Vai ser uma reta? Vai formar uma constante?
> R_3: Constante.
> R_1: Vai ficar uma reta paralela, não é um subespaço.
> R_4: Mas tem que justificar porque não é subespaço.

Conforme a discussão no grupo, notamos que os estudantes só tinham convicção da condição relativa ao elemento neutro. Apresentaram dificuldade tanto nas condições 2 e 3 quanto na representação geométrica do conjunto U.

Durante a discussão em sala, o estudante Q_1 se voluntariou e foi ao quadro desenvolver a questão. Ele apresentou, inicialmente, que o conjunto U representava o plano cartesiano, especificando mais tarde que se tratava do primeiro quadrante, onde X e Y são maiores ou iguais a zero. Na sequência, a pesquisadora perguntou à turma, se com essa condição para X e para Y, o conjunto U é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$? Alguns estudantes, incluindo R_3, S_1, Q_2 e Q_1, responderam afirmativamente, sem considerar a possibilidade de o alfa ser menor que zero. O professor lembrou que, para ser subespaço, o escalar nas condições deve ser um número real.

Nessa esfera, Q_1 refletiu e declarou: "Se o alfa for número negativo, quando for multiplicar pelo vetor no primeiro quadrante, ele vai dar um vetor negativo, que não está dentro do primeiro quadrante". Após essas reflexões, a turma ficou convencida de que não é subespaço, pois falha na condição 3. Q_1 escreveu no quadro que a proposição é falsa e, em seguida, justificou que não atende à condição quando se multiplica um vetor do conjunto U por um escalar negativo.

Então, a partir das contribuições durante a discussão coletiva, temos a elaboração do argumento seguindo as diretrizes do MATP:

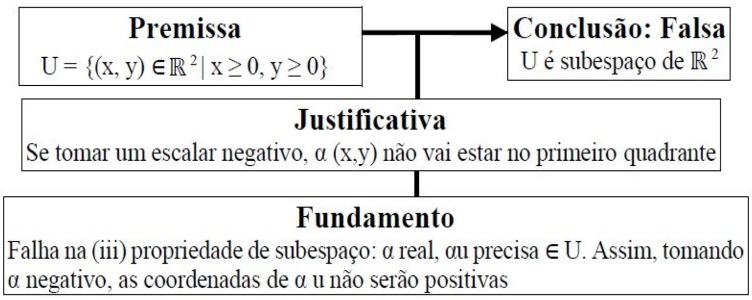

Figura 14 – Argumento construído coletivamente referente à segunda questão do item (i)
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

(ii) Inicialmente, aconteceu uma discussão no entendimento da notação de "u = α (1, 1)":

> R_1: O que é esse α (1,1)?
> R_2: Significa multiplicação de um escalar por um...
> R_3: A multiplicação por um escalar está entre as propriedades para ser um subespaço.
> R_3: Quando tem um vetor e multiplica por um escalar, temos um novo vetor com mesmo sentido, a depender do escalar que está multiplicando.
> R_4: Você quer dizer, mesma direção.
> R_3: Isso, são paralelos.
> R_1: No caso, são vetores colineares. A questão aí é por conta que precisa ter o "zero" no subespaço. Ainda não entendi, o "α (1, 1)", dúvida da notação α (1,1) para aparecer o vetor zero.
> R_1: Acho que esse item é verdadeiro, é subespaço vetorial sim. É preciso pensar no plano cartesiano. Só que a reta vai passar pela origem de qualquer jeito.
> R_4: Sim.
> R_3: Sim, não sei como aparecer zero.

Eles defendiam a veracidade da asserção, todavia com dúvidas para justificar. Olharam os slides do professor que tratava do assunto e o estudante R_1 contou que assistiu a uma videoaula no dia anterior à atividade prática, para entender melhor as condições de subespaço. No grupo, por outro lado, eles estavam com dúvidas gerais sobre como atender à questão de zero estar presente nesse conjunto, mesmo que o estudante R_1, durante a discussão, tenha apresentado a possibilidade de o conjunto U representado na asserção ser uma reta que passa pela origem.

A questão só foi elucidada após a socialização das respostas com o grupo de toda a sala, com mediação da pesquisadora e do professor. R_1 foi ao quadro e a pesquisadora sinalizou a importância do entendimento da representação geométrica do conjunto $U = \{u \in \mathbb{R}^2 \mid u = \alpha\,(1, 1)\}$. Esse estudante fez o desenho da reta e, com incentivo de perguntas por parte da pesquisadora e do professor da turma, os estudantes participaram e compreenderam que o conjunto representa uma reta que passa pelo primeiro e terceiro quadrante, a chamada primeira bissetriz. A estudante Q_2 sinalizou que só conseguiu entender completamente depois que viu a ilustração e que acompanhou as observações da turma quanto aos elementos que pertencem à reta em estudo. No decorrer da discussão, foram verificadas as condições para ser subespaço vetorial.

Com a contribuição da turma, R_1 citou e verificou as condições para ser um subespaço, que estão descritas no argumento seguinte conforme o MATP construído após a plenária com toda a turma.

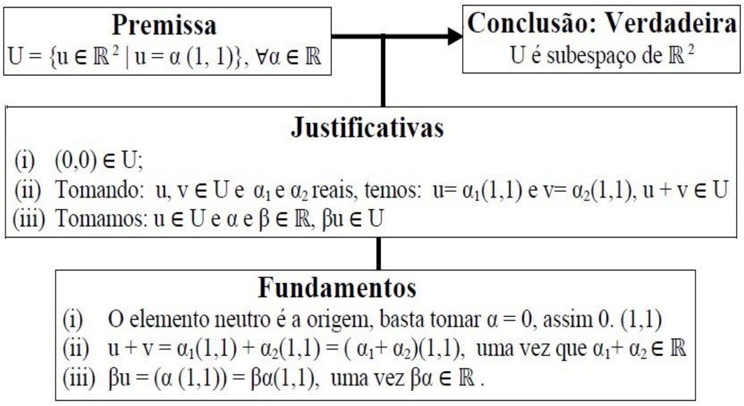

Figura 15 – Argumento construído coletivamente referente à segunda questão no item (ii)
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

(iii) Durante a discussão no grupo, houve um acordo entre os estudantes que a proposição é falsa.

> R_1: A terceira proposição é falsa.
> R_2: Realmente, está incorreto, pois falha em uma das condições para ser subespaço.
> R_1: Para ser subespaço, tem uma propriedade que diz que contém o zero. Logo, se não passa pela origem, essa reta não contém o zero.
> R_3: Eu acho que falso.

O argumento construído de forma coletiva pelo grupo R, seguindo as diretrizes do MATP, foi o seguinte:

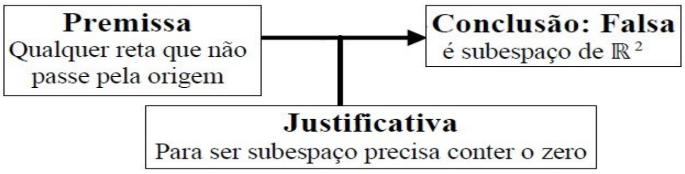

Figura 16 – Argumento construído coletivamente referente à segunda questão no item (iii)
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

Durante a discussão do grupo de toda a turma, após análise do item (ii), a estudante Q_2 informou que "é fácil visualizar que quando o alfa não é zero, a reta não passará pela origem". O estudante S_1 também defendeu que "após a visualização da reta do item (ii), a gente já responde ao item (iii)". O estudante Q_3 afirmou que "poder visualizar o conjunto com a representação geométrica ajuda o entendimento". A turma estava assim convencida sobre a falsidade da asserção e a razão dessa falsidade.

iv) Os estudantes afirmaram que essa proposição é verdadeira. Um deles usou um caso particular para justificar.

> R_1: É verdadeira essa questão.
> R_4: Acredito que esse termo "necessariamente" é uma pegadinha. Mas, é verdadeira.
> R_1: Não tem pegadinha. A união é subespaço vetorial.
> R_3: Se tivermos dois subespaços, com um sendo a metade do outro, quando juntarmos, formamos um espaço vetorial inteiro.

Na discussão no grupo, eles defenderam a verdade da proposição por meio de um caso particular, ainda que um estudante ficasse em dúvida no termo "necessariamente".

Durante a discussão em plenária, a pesquisadora chamou a atenção para o termo “necessariamente”. Q_2 informou que “esse termo implica dizer que precisa ser subespaço, que sempre será”. Alguns estudantes concordavam que a proposição era verdadeira, mesmo após destacarmos o “necessariamente”. A pesquisadora pediu que a turma refletisse sobre a seguinte situação: considerando os eixos cartesianos OX e OY, vocês concordam que eles são subespaços vetoriais? Responderam que sim. Apenas um estudante, S_3, sustentou que OY não é subespaço de $\mathbb{R}^2$. Porém, depois ele concordou quando a pesquisadora explicou que, de maneira análoga a OX, OY também é subespaço. Na sequência, a pesquisadora perguntou: e quanto à união desses subespaços, é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^2$? Alguns estudantes continuavam a defender que sim.

O professor relembrou à turma um exemplo relacionado à regra do paralelogramo, discutido anteriormente sobre a união de subespaços. Em seguida, a pesquisadora questionou sobre a adição de vetores no eixo OX e no eixo OY, indagando se o resultado sempre estaria contido na união dos dois eixos. Após reflexões e análises, os estudantes concluíram que a proposição era falsa, percebendo que a união de dois subespaços nem sempre é um subespaço vetorial, a menos que um esteja contido no outro. Surgiu a discussão sobre a condição para que essa proposição fosse verdadeira e se sempre seria falsa, concluindo que a união de dois subespaços é um espaço vetorial, a menos que um esteja contido no outro. O seguinte argumento foi construído coletivamente com a turma conforme o MATP:

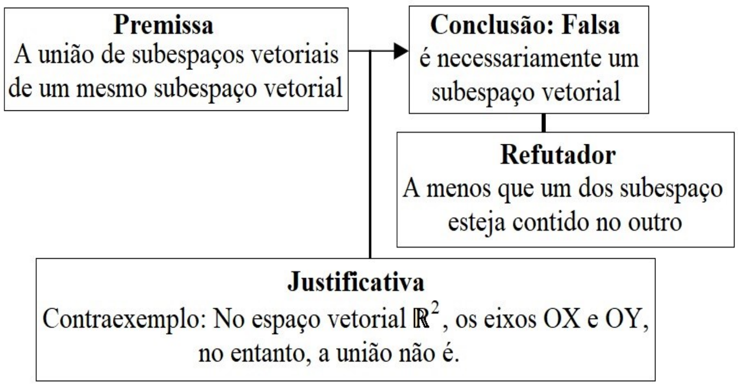

Figura 17 – Argumento construído coletivamente referente à segunda questão no item (iv)
Fonte: Dados da pesquisa (2022).

De acordo com as respostas encontradas na questão 2, percebemos que os estudantes apresentaram dificuldades. Eis alguns exemplos: identificar os elementos que pertenciam ao conjunto que estava em verificação para ser Subespaço Vetorial, realizar a ilustração geométrica dos conjuntos em apreciação, com exceção do item (iii), e compreender notações oriundas da geometria analítica. De uma maneira geral, os estudantes encontraram dificuldades de justificar a veracidade das asserções. Notamos que a maioria da turma não empregou o conhecimento de geometria analítica para estudar proposições de subespaços vetoriais. Outrossim, não identificou de maneira precisa se os conjuntos em apreciação atendiam ou não todas as condições para ser subespaço vetorial.

Percebemos que a tipologia da justificativa mais empregada, depois do argumento de definição, foi o argumento de autoridade via consulta aos *slides* do professor, bem como as citações expressas pelo professor. Compreendemos a importância das definições e das propriedades na prática da matemática. Entretanto, defendemos o emprego dos demais recursos retóricos, pois eles contribuem para o entendimento dos temas discutidos. Obtivemos benefícios do uso de representação geométrica para ilustrar os conjuntos, exemplos e *exemplum in contrarium*, também de analogia e de apoio com os argumentos de autoridade.

Ao encorajá-los com perguntas pró-argumentativas e incentivá-los a usar recursos retóricos além dos argumentos de definição, tivemos uma melhor participação dos estudantes. Eles comentaram que foi mais fácil visualizar os tópicos em discussão e confirmaram o entendimento dos temas. À vista disso, Gabel e Dreyfus (2017) defendem que, durante o processo de ensino da matemática no âmbito superior, além da lógica formal, existem justificativas, exemplos, representações e outros meios explorados pela argumentação, que trazem subsídios para o entendimento dos temas em estudo.

É interessante destacar que o recurso retórico da ilustração geométrica não foi bem usado nas discussões do grupo, apenas durante a plenária com toda a turma e com o incentivo da pesquisadora e do professor. Apesar de as representações geométricas exercerem um papel crucial na matemática e enriquecerem o processo argumentativo (GABEL; DREYFUS, 2017), é necessário haver um cuidado para manter uma harmonia entre os componentes conceituais e figurais (ANTONINI, 2018). Portanto, é preciso conhecer as vantagens de se realizar as representações geométricas para que não sejam geradas mais dificuldades na compreensão, ao invés de benefícios.

Em relação à qualidade da argumentação, considerando a discussão do grupo R, notamos que:

No item (i), o grupo B não atingiu o estágio A na qualidade da argumentação, pois não houve concordância sobre a veracidade da proposição e as justificativas foram insatisfatórias. Quanto **ao item (ii),** embora os estudantes tenham acertado a classificação da proposição, as justificativas não garantiram a conexão entre premissas e conclusão, mantendo o grupo no estágio A. **Já no item (iii**), os estudantes identificaram a falha na conexão entre premissa e conclusão, mas sem apresentar um fundamento, alcançando o estágio B_1 na qualidade da argumentação. **No item (iv),** apesar de identificarem a proposição como verdadeira com base em um caso particular, não analisaram que essa afirmação não se sustenta de forma geral. Consequentemente, não alcançaram o estágio A na qualidade da argumentação, já que a justificativa se baseou apenas em um caso específico, não considerando a falsidade geral da proposição.

Os resultados mostram que os estudantes enfrentaram dificuldades em construir argumentos consistentes, não atingindo o estágio A na qualidade da argumentação nas questões 1 e 2. Em algumas construções, utilizaram exemplos para validar proposições, mas não consideraram todas as condições necessárias para fundamentar a conclusão. Além disso, não perceberam casos que contradiziam suas generalizações. Em muitos casos, os fundamentos e exceções foram inseridos com a mediação da pesquisadora e do professor durante a plenária com toda a turma.

Os estudantes apresentaram dificuldades no uso dos recursos retóricos para embasar as discussões. Houve pouca aplicação de exemplos, analogias e outras técnicas argumentativas nos grupos Q e S durante a atividade. A interação nos grupos foi limitada, mas na discussão no quadro, mediada pelo professor e pela pesquisadora, houve maior participação. Embora a maioria dos estudantes não tenha atingido a melhor qualidade na argumentação, a abordagem com foco argumentativo permitiu aprofundar temas de Espaços e Subespaços Vetoriais, incentivando reflexões e o uso de recursos retóricos. Isso contribuiu para o desenvolvimento das habilidades argumentativas dos estudantes de Licenciatura em Matemática na disciplina de Álgebra Linear I.

Devido à carência de questões com enfoque argumentativo propostas em aulas de Matemática no Ensino Superior (RODRIGUES et al., 2021; WAWRO, 2015), pontuamos que é necessária a promoção de atividades de cunho argumentativo, sobretudo com discussões em grupo, para que os estudantes possam realizar inferências estimulados pelo processo argumentativo para que, assim, apresentem suas ideias, defendam-nas com os credenciamentos do campo em estudo, possam ouvir e questionar as ideias dos demais estudantes e reflitam sobre os argumentos plausíveis que contribuem para a solução das questões em discussão.

Ademais, em um ensino pautado na argumentação, as atividades são baseadas em processo de discussão e podem ser realizadas em grupos (CAN; ISLEYEN, 2020). Nesse sentido, Kwon et al. (2015) indicam que, quando os estudantes trabalham em grupos, acontecem as trocas de ideias e o envolvimento em discussões matemáticas que proporcionam novas estratégias na resolução de problemas. Para além da proposta de questões com enfoque argumentativo, ressaltamos que é válido que os estudantes tenham contato com o ensino explícito de argumentação para se apropriarem dos elementos argumentativos essenciais para a construção da habilidade argumentativa.

Considerações finais e implicações

Este estudo empregou o Modelo Teórico Argumentativo (MATP) como guia durante a intervenção didática na disciplina de Álgebra Linear I, no curso de Licenciatura em Matemática. Esse modelo também foi usado para analisar os argumentos dos estudantes em duas etapas da disciplina. Na análise da qualidade da argumentação, combinamos as teorias de Toulmin e Perelman, considerando o aspecto lógico e retórico.

O MATP permitiu uma avaliação detalhada, observando não apenas a estrutura e consistência dos argumentos, mas também as componentes essenciais de um argumento coerente. Além disso, enfatizou a importância da tipologia das justificativas empregadas para apoiar o convencimento e a persuasão dos resultados matemáticos. Esse enfoque não só fortalece a habilidade dos(as) estudantes em formular argumentos com qualidade, mas também pode os(as) capacitar a analisar as bases lógicas por trás das soluções propostas, promovendo, assim, um entendimento mais reflexivo da matemática. Este estudo contribui para a Educação Matemática no Ensino Superior, seguindo recomendações de estudos anteriores ao usar teorias argumentativas integradas (CARNEIRO et al., 2023; METAXAS et al., 2016; RODRIGUES et al., 2021).

Na primeira etapa, tivemos indícios de que a maior parte dos estudantes constrói argumentos que não atendem ao estágio de melhor qualidade em relação à argumentação. Alguns tentaram explorar a veracidade das proposições, mas não conectaram adequadamente as premissas e a conclusão. Além disso, houve falta de fundamentação e de recursos retóricos. Na segunda etapa, os dados evidenciam que, em relação à qualidade da argumentação, a maioria dos estudantes tem dificuldade em elaborar argumentos que estão compreendidos a partir do estágio A. Muitos se limitaram ao eixo básico de premissas-justificativas-conclusão, sem justificar de maneira satisfatória. Houve falta de fundamentação e uso limitado de recursos retóricos. Outrossim, percebemos pouco uso de argumentos retóricos que diferem do argumento de definição. Sublinhamos que, nessa etapa, os argumentos construídos de melhor qualidade ocorreram após discussões em sala, mostrando a importância desse processo facilitado pelo professor e pela pesquisa.

Acreditamos que o aprofundamento em lógica e técnicas de demonstração pode otimizar o desempenho do modelo argumentativo toulminiano e perelmaniano, evidenciando a influência do aprendizado nesses aspectos para a qualidade da argumentação dos estudantes. Notamos que eles ainda não estão familiarizados com questões focadas em argumentação, o que se reflete na dificuldade em construir argumentos consistentes em ambas as etapas. A maioria não alcançou um estágio de argumentação mais elevado, seja individualmente ou em grupos.

A introdução de questões com enfoque argumentativo é essencial para estudantes de Licenciatura em Matemática, preparando-os para o campo educacional. A prática constante da argumentação na Educação Matemática é crucial para o desenvolvimento dessas habilidades.

Consideramos fundamental que os estudantes alcancem estágios B e C em relação à qualidade argumentação. Para isso, devem utilizar justificativas adequadas, fundamentos sólidos, considerar exceções e/ou qualificar suas conclusões desde que a situação argumentativa requisite. Recursos retóricos podem ser promissores na validação de argumentos formais, proporcionando uma estrutura persuasiva que fortalece a consistência e a clareza das explicações matemáticas apresentadas.

Encontramos algumas limitações no desenvolvimento da intervenção, principalmente devido ao tempo disponível. Poderíamos ter facilitado discussões mais produtivas nos grupos e uma melhor socialização das questões no quadro. Acreditamos que a falta de familiaridade dos estudantes com esse tipo de discussão contribuiu para uma menor participação. Além disso, identificamos uma limitação na formulação da questão na primeira etapa, pois não deixamos claro que, entre as justificativas apresentadas, os(as) estudantes poderiam incluir as justificativas informais que utilizaram na resolução.

No entanto, notamos efeitos na construção das habilidades argumentativas dos estudantes durante a intervenção. Em ambas as etapas, os estudantes tiveram oportunidade de praticar questões com a perspectiva argumentativa lógica associada à retórica. Durante a intervenção, colocamos em evidência o papel essencial da justificação e da fundamentação, bem como dos demais elementos importantes para a construção de uma argumentação com qualidade.

Destarte, os estudantes tiveram a oportunidade de refletir sobre a importância das inferências por meio de uma perspectiva argumentativa. Sobretudo na segunda etapa, notamos que houve uma preocupação dos estudantes com o processo de justificação, embora, em certos momentos, tenham enfrentado dificuldades para explicitar quais propriedades e teoremas eram essenciais nas construções matemáticas e a importância delas para respaldar os argumentos. Nessa fase, os estudantes associaram componentes argumentativos a termos que facilitaram a compreensão, como o uso do termo “falhar” em vez de “refutar”.

Ademais, na segunda etapa, os estudantes reconheceram o valor das ilustrações na obtenção de resultados matemáticos. Nesse ponto, observamos indícios de que eles deram maior importância aos recursos retóricos, as propriedades e aos teoremas para fundamentar seus argumentos. Isso sugere que estavam mais familiarizados com elementos que contribuem para o desenvolvimento da habilidade argumentativa, demonstrando uma maior reflexão sobre o processo de argumentação.

Torna-se relevante propor mais estudos com foco em argumentação, especialmente sob a lente teórica de Toulmin (2006) associada à de Perelman (1993) em contextos de Ensino Superior de Matemática, sobretudo com licenciandos(as). Com base nesta pesquisa, destacamos a necessidade de investigações adicionais, como a análise da experiência de estudantes e professores do curso de Licenciatura em Matemática com propostas de ensino explícito de argumentação. Além disso, é essencial avaliar como abordagens pró-argumentativas, em diferentes componentes curriculares da Licenciatura em Matemática, contribuem para o desenvolvimento das habilidades de argumentação e para realizar comparações entre essas abordagens.

Os resultados desta pesquisa destacam a relevância do MATP ao contribuir para a compreensão e exploração da argumentação no contexto das aulas de matemática no Ensino Superior, especialmente no campo da Álgebra Linear. Esse modelo argumentativo emerge como uma ferramenta viável para guiar intervenções didáticas e analisar a argumentação sob a ótica de uma perspectiva lógica associada à retórica, adaptando-se de acordo com a área curricular específica. Ele apresenta potencial para adaptações não apenas no contexto da matemática, mas também no ensino de ciências.

Referências

ALMEIDA, W. N. C.; MALHEIRO, J. M. da S. A Argumentação e a Experimentação investigativa no Ensino de Matemática. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v. 11, n. 2, p. 57-83, 2018.

ANTONINI, S. Figural conceps in proving by contradiction. *Quadrante*, [*s. l.*], v. XXVII, n. 2, 2018.

BOGOMOLNY, M. Raising students' understanding: Linear algebra. *In*: WOO, J. H. *et al*. (ed.). *Proceedings of the 31st conference of the international group for the psychology of mathematics education.* Seoul: PME, 2007. p. 65-72. v. 2.

CAN, O. S.; ISLEYEN, T. The effect of probability instruction through argumentation approach on the achievement of preservice teachers and the permanence of their knowledge. *African Education Research Journal*, v. 8, p. 540-553, 2020.

CARDOSO, V. C. *Ensino e Aprendizagem de álgebra linear*: uma discussão acerca de aulas tradicionais, reversas e de vídeos digitais. 2014. 205 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2014.

CARNEIRO, J. S.; TEIXEIRA, E. S.; OLIVEIRA, A. M. P. de. Usos da argumentação na educação matemática: uma revisão sistemática da literatura no Ensino Superior. *Educação Matemática Pesquisa*, v. 25, n.3, p.131-148, 2023.

GABEL, M.; DREYFUS, T. Affecting the flow a proof by creating presence – a case study in Number Theory. *Educational Studies em Mathematics*, v. 96, n. 2, p. 187-205, 2016.

GABEL, M.; DREYFUS, T. The flow of a proof: establishing a basis of agreement. *CERME 10*, Dublin, v. 1, p. 155-162, 2017.

KWON, N.; YOUNGGON, B.; HWAN, O. Design research on inquiry-based multivariable calculus: focusing on students' argumentation and instructional design. *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, v. 47, n. 6, p. 997-1011, out. 2015.

LICHTMAN, M. *Qualitative Reserch in Education*: A User's Guide. 2. ed. Califórnia: Sage, 2010.

MATOS, F. C. de. *Praxeologias e modelos praxeológicos institucionais*: o caso da álgebra linear. 2017. 324 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Educação Matemática e Científica, Universidade Federal do Pará, Belém, 2017.

METAXAS, N.; POTARI, D.; ZACHARIADES, T. Analysis of a Teacher's pedagogical arguments using Toulmin's model and argumentation schemes. *Educational Studies in Mathematics*, v. 93, n. 3, p. 383-397, 2016.

OLIVEIRA, J. R. de. *Argumentação e Educação:* as contribuições de Chaïim Perelman. Curitiba: Editora CRV, 2016.

PERELMAN, C. *O império retórico:* retórica e argumentação. Porto: Edições ASA, 1993.

RODRIGUES, F.; SILVA, S. da; MONTEIRO, M. Argumentação no Ensino da Matemática: a produção nacional e a formação do professor que ensina matemática. *Ensino da Matemática em Debate*, v. 8, n. 1, p. 203-229, maio 2021.

RUGGIERO, M. A. G.; VITORINO, A. *Álgebra Linear e Aplicações*. Subespaços Vetoriais. 2018. Disponível em: https://www.ime.unicamp.br/~marcia/AlgebraLinear/subespacos.html. Acesso em: 4 set. 2022.

SILVA JÚNIOR, G. A. da. *Elementos de exploração argumentativa docente na sala de aula*: uma proposta de análise à luz de teoria de Perelman e Olbrechts-Tyteca. 2019. 84 f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências Exatas e da Terra) – Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2019.

SIMPSON, A. The anatomy of a mathematical proof: implications for analyses with Toulmin's scheme. *Educational Studies in Mathematics*, v. 90, n. 1, p. 1-17, 11 jul. 2015.

STRANG, G. *Introdução à Álgebra Linear*. Tradução J. R. Souza. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

TOULMIN, S. *Os usos do Argumento*. Tradução Reinaldo Guarany. São Paulo: Martins Fontes, 2006.

UYGUN-ERYURT, T. Conception and Development of Inductive Reasoning and Mathematical Induction in the Context of Written Argumentations. *Acta Didactica Napocensia*, v. 13, n. 2, p. 65-79, 2020.

VIEIRA, W.; SOUZA, V. H. G. de S.; IMFUFU, R. S. Sobre Justificativas em Questões do Tipo Verdadeiro/Falso de Estudantes de Licenciatura em Matemática. *Ciência & Educação,* [*s. l.*], v. 26, 20010, 2020.

WAWRO, M. Reasoning About Solutions in Linear Algebra: the case of abraham and the invertible matrix theorem. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, [*s. l.*], v. 1, n. 3, p. 315-338, 30 set. 2015.

SOBRE OS AUTORES

JOILMA SILVA CARNEIRO. Professora Assistente no Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS) e possui experiência na área de Matemática, com foco principal em polinômios, álgebra, mosaicos e curvas algébricas. Sua formação inclui graduação em Matemática e especialização em Educação Matemática pela referida universidade. Concluiu o mestrado Profissional em Matemática na UEFS e doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia (UFBA) e Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). É membro do grupo de pesquisa Observatório da Educação Matemática (OEM) na UFBA e faz parte do subgrupo de pesquisa em Argumentação do grupo (CABURÉ) na UFBA/UEFS. Seus interesses de pesquisa concentram-se na linha de Argumentação na Educação Matemática no Ensino Superior.

ELDER SALES TEIXEIRA. Graduado em Licenciatura em Física pela Universidade Federal da Bahia (UFBA), possui mestrado e doutorado em Ensino Filosofia e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia/Universidade Estadual de Feira de Santana. Atualmente é professor adjunto da Universidade Estadual de Feira de Santana. Membro do corpo docente do Programa de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências (Universidade Federal da Bahia/Universidade Estadual de Feira de Santana) e do Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física (Sociedade Brasileira de Física) - polo UEFS. Tem experiência na área de Educação, com ênfase em Ensino, Filosofia e História das Ciências e Metodologia para o Ensino de Física, atuando principalmente nos seguintes temas: História e Filosofia da Ciência no Ensino de Física, Natureza da Ciência e Argumentação no Ensino de Física.

ANDRÉIA MARIA PEREIRA DE OLIVEIRA. Graduada em Matemática pela Universidade Católica do Salvador (UCSAL), possui mestrado em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho (UNESP) e doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências pela Universidade Federal da Bahia (UFBA) e Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS). Atualmente, é professora adjunta no Departamento II da Faculdade de Educação da UFBA, ministrando aulas nos cursos de Licenciatura em Matemática e Pedagogia. Além disso, é docente permanente nos programas de Pós-Graduação em Ensino, Filosofia e História das Ciências da UFBA/UEFS e em Educação da UFBA. É membro do grupo de pesquisa Observatório da Educação Matemática (OEM) na UFBA, certificado pelo CNPq, e integra o Comitê Científico da ANPEd, especificamente pelo GT 19 Educação Matemática. Também exerce a função de coordenadora do Comitê de Ética em Pesquisa em Educação da Faculdade de Educação da UFBA (CEP-FACED/UFBA). Seu foco de pesquisa está na Educação Matemática, explorando a formação e prática pedagógica de professores de Matemática, Modelagem Matemática e Materiais Curriculares Educativos.

NOTAS DE AUTORIA

Joilma Silva Carneiro
https://orcid.org/0000-0002-6213-8262
Universidade Estadual de Feira de Santana, Bahia, Brasil. – jscarneiro@uefs.br

Elder Sales Teixeira
https://orcid.org/0000-0002-6013-2043

Universidade Estadual de Feira de Santana, Bahia, Brasil. – esteixeira@uefs.br

Andreia Maria Pereira de Oliveira
https://orcid.org/0000-0002-8011-5179
Universidade Federal da Bahia, Bahia, Brasil.- ampo@ufba.br

Agradecimentos
Ao professor e aos estudantes participantes da pesquisa, expresso minha gratidão pela parceria, paciência e colaboração ao compartilhar suas aulas e experiências. Agradeço também aos integrantes do grupo de pesquisa Observatório da Educação Matemática (OEM) da UFBA e ao subgrupo de pesquisa em Argumentação (CABURÉ) na UFBA/UEFS, por todo o aprendizado e pelas experiências enriquecedoras que tivemos juntos. Cada contribuição foi fundamental para o desenvolvimento deste estudo.

Como citar esse artigo de acordo com as normas da ABNT
CARNEIRO, J. S.; TEIXEIRA, E. S.; OLIVEIRA, A. M. P. Qualidade da argumentação de estudantes da licenciatura em matemática na disciplina álgebra linear. Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Florianópolis, v. 17, p. 1-29, 2024.

Contribuição de autoria
Nome Completo: Joilma Silva Carneiro participou diretamente e ativamente da concepção, da coleta de dados e análise de dados, elaboração do manuscrito, redação e discussão de resultados.

Nome Completo: Elder Sales Teixeira participou diretamente e ativamente da concepção, análise de dados, elaboração do manuscrito, redação e discussão de resultados.

Nome Completo: Andreia Maria Pereira de Oliveira participou diretamente e ativamente da concepção, análise de dados, elaboração do manuscrito, redação e discussão de resultados.

Financiamento
Não se aplica.

Consentimento de uso de imagem
Não se aplica.

Aprovação de comitê de ética em pesquisa
A pesquisa foi aprovada pelo comitê de ética Número do Parecer: 5.539.224, CAAE: 57438622.3.0000.0053 em 21 de julho de 2022.

Conflito de interesses
Não se aplica.

Publisher
Universidade Federal de Santa Catarina. Programa de Pós-Graduação em Educação Científica e Tecnológica. Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus/suas autores/as, não representando, necessariamente, a opinião dos/as editores/as ou da universidade.

Histórico
Recebido: 21 de dezembro de 2023

Revisado: 20 de julho de 202.

Aceito: 16 de outubro de 2024

Publicado: 15 de dezembro de 2024.