RAMSEY PARA PRINCIPIANTES

Jean-Luc Rosinger[1]

> Enough must therefore be saved to reach or approach bliss some time, but this does not mean that our whole income should be saved. The more we save the sooner we shall reach bliss, but the less enjoyment we shall have now, and we have to set the one against the other. Mr Keynes has shown me that the rule governing the amount to be saved can be determined at once from these considerations (RAMSEY [5] p. 480).

Qual deveria ser a taxa de poupança de uma nação ? Em 1928, Frank Ramsey, ajudado por Keynes, propôs uma resposta cujo futuro seria brilhante. A chamada "regra de Keynes-Ramsey" é a chave da resolução do problema neoclássico do crescimento, hoje promovido à pedra angular da teoria macroeconômica[2]. Muitos estudantes, no entanto, e alguns dos seus professores, acham pouco intuitiva esta regra, tal como formulada nos livros textos contemporâneos, e temem enfrentar a teoria do controle ótimo ou da programação dinâmica habitualmente invocadas para dar conta da mensagem de Ramsey. O objetivo desta nota é reduzir o custo de aprendizagem exigido pela moderna teoria macroeconômica. É muito simples derivar formalmente a regra com o recurso familiar da otimização

[1] Professor dos Cursos de Graduação e Pós-Graduação em Economia da Universidade Federal de Santa Catarina - UFSC

[2] Blanchard e Fischer, no seu muito referido livro-texto de teoria macroeconômica, começam sua exposição com a apresentação dos "modelos básicos com horizonte infinito". Neste contexto, a contribuição de Ramsey é considerada "protótipo para estudar a alocação intertemporal dos recursos" ([1], p. 38). Estes autores, tratando da dinâmica no tempo contínuo, recorrem ao princípio do máximo de Pontrijagin para derivar a regra. Outros, notadamente Sargent [6] e mais recentemente Ljunquist e Sargent[4], preferem o tempo discreto e a programação dinâmica.

estática sujeita a restrições. A intuição econômica necessária, por outro lado, não passa de um argumento de arbitragem intertemporal.

1 A regra de Keynes-Ramsey num modelo de dois períodos

Para derivar formalmente a regra de Keynes-Ramsey num contexto simplificado, iremos considerar um modelo de dois períodos. No primeiro período, o agente representativo da economia consome parte de sua renda e poupa a outra parte. A contrapartida desta poupança é um ato de investimento que aumenta o estoque de capital da economia. No segundo período, repete-se a escolha entre consumo e investimento. Esta economia parte de um estoque inicial de capital e não pode encerrar sua atividade com um estoque negativo.

Consideramos, portanto, um agente representativo que maximiza a utilidade $V(c_1, c_2)$ derivada do consumo per capita c durante dois períodos indiciados por 1 e 2. A função de utilidade V é suposta separável e aditiva, e a utilidade futura é descontada conforme uma taxa de preferência pelo presente ρ. Este agente maximiza, por conseguinte, a expressão

$$V(c_1, c_2) = \mathrm{u}(c_1) + \frac{\mathrm{u}(c_2)}{1+\rho} \qquad (1)$$

Notamos que se, hipótese natural em se tratando da utilidade, a função u é estritamente côncava, então a função V, combinação linear positiva de funções côncavas, é ela mesma estritamente côncava.

A tecnologia da economia obedece `as hipóteses habituais. O produto agregado Y resulta da produção a partir de dois fatores, capital e trabalho. Os rendimentos de escala são constantes. Logo, podemos considerar que o produto per capita y é uma função estritamente côncava $f(k)$ do estoque de capital por unidade de trabalho k. Supõe-se que o capital não se deprecia. No contexto do modelo de dois períodos, temos, portanto

$$k_F - k_2 = f(k_2) - c_2 \qquad (2)$$

$$k_2 - k_1 = f(k_1) - c_1 \qquad (3)$$

$$k_F \geq 0 \qquad (4)$$

em que k_1 é dado e k_F representa o estoque final desejado de capital por unidade de trabalho, uma quantidade não-negativa.

Associando os multiplicadores λ_1, λ_2 e μ a estas restrições, formamos o lagrangiano

$$L = u(c_1) + \frac{u(c_2)}{1+\rho} + \lambda_1 (f(k_1) - c_1 + k_1 - k_2) + \lambda_2 (f(k_2) - c_2 + k_2 - k_F) + \mu\, k_F$$

O teorema de Kuhn-Tucker garante que caso c_1, c_2, k_2 e k_F maximizem a função de utilidade (1) sujeita \`as restrições (2), (3) e (4), temos

$$\lambda_1 = u'(c_1) \qquad (5)$$

$$\lambda_2 = \frac{u'(c_2)}{1+\rho} \qquad (6)$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 (1 + f'(k_2)) \qquad (7)$$

$$\lambda_2 = \mu \qquad (8)$$

As condições (5), (6) e (7) implicam

$$\frac{u'(c_1)}{u'(c_2)/(1+\rho)} = 1 + f'(k_2) \qquad (9)$$

Esta é a condição de otimalidade que, nesta ou noutra forma, é referida como regra de Keynes-Ramsey. É conveniente enunciá-la a partir da seguinte forma alternativa, em que se supõe, conforme o artigo de Ramsey, que a utilidade futura não é descontada ($\rho = 0$) :

$$\frac{u'(c_2) - u'(c_1)}{u'(c_2)} = -f'(k_2) \qquad (10)$$

Em palavras : sobre uma trajetória temporal ótima de consumo, a taxa de decrescimento da utilidade marginal do consumo deve ser igual à produtividade marginal do capital. É fácil explicar o porquê desta regra[3]. Um decréscimo do consumo de montante dc no primeiro período acarreta uma perda de utilidade valorada na margem de $u'(c_1)\, dc$. O investimento deste montante aumenta o estoque de capital e permite um consumo no segundo período de montante $(1 + f'(k_2))\, dc$, portanto, um acréscimo de utilidade valorada na margem de $u'(c_2)\,(1 + f'(k_2))\, dc$. Sobre a trajetória temporal ótima de consumo, pequenas realocações do consumo não devem afetar a utilidade, de maneira que temos :

$$u'(c_1)\, dc = u'(c_2)\,(1 + f'(k_2))\, dc$$

isto é, a condição (10) é verificada.

Caso se desconte a utilidade futura ($\rho > 0$), é necessário reescrever esta última relação para levar em conta este desconto :

[3] Blanchard e Fischer [1] p. 41

$$u'(c_1)\,dc = \frac{u'(c_2)\,(1 + f'(k_2))\,dc}{1+\rho}$$

e reencontra-se nossa fórmula original (9).

Observamos que a condição de folgas complementares no teorema de Kuhn-Tucker

$$\mu\, k_F = 0 \qquad (11)$$

implica, devido a (8) e (6), que o estoque final de capital por unidade de trabalho k_F é necessariamente nulo. A intuição segundo a qual para maximizar o consumo os agentes devem consumir todo o capital herdado no período terminal é assim confirmada.

2 A regra de Keynes-Ramsey num modelo de T períodos

A regra de Keynes-Ramsey não se altera num modelo no qual consideramos um número finito T de períodos. Isto resulta da estrutura particular do problema de otimização considerado. O agente representativo maximiza a soma

$$\sum_{t=1}^{T} \beta^{t-1} u(c_t)$$

em que definimos $\beta \equiv 1/(1+\rho)$, sujeito \`as restrições

$$k_{t+1} - k_t = f(k_t) - c_t\,, \quad t = 1, \ldots, T-1$$

$$k_F \geq 0$$

para k_1 dado. Procedendo como supra, isto é, formando o lagrangiano e eliminando os multiplicadores, derivamos para cada período uma condição necessária para obter um ótimo na forma de uma equação chamada "equação de Euler "[4]

$$\frac{u'(c_t)}{\beta u'(c_{t+1})} = 1 + f'(k_{t+1}), \quad t = 1, \ldots, T-1 \quad (12)$$

Verificamos também que a condição de folgas complementares implica que o estoque final de capital kF deve ser necessariamente nulo.

De um ponto de vista macroeconômico, é, todavia, conveniente analisar o problema da taxa ótima de poupança no contexto de um número infinito de períodos. Evitamos assim ter que fixar arbitramente um prazo final de otimização (o fim do mundo). Com um número infinito de períodos a análise é mais delicada. A soma infinita a maximizar

$$\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} u(c_t)$$

tem que convergir para que o problema tenha significação. Para este efeito, um teorema elementar de análise (e intuitivamente óbvio) enuncia que a condição necessária e suficiente é que a série {Sn} onde

$$S_n = \sum_{t=1}^{n} \beta^{t-1} u(c_t)$$

seja limitada[5]. Neste contexto, nossa equação de Euler permanece válida. Finalmente, vale ressaltar que, com horizonte infinito, a condição de folgas complementares (11) continua também válida, conforme os resultados

[4] Ljunquist e Sargent [4], p. 35, derivam esta equação recorrendo à fórmula de Benveniste-Scheinkman da programação dinâmica (a pequena diferença entre a equação de Euler derivada por estes autores e nossa equação resulta da hipótese de depreciação integral do capital no período adotada por eles).

[5] Por exemplo, Eggleston [2], teorema 7 p. 42 sobre séries reais não-negativas.

provados por Weitzman ([7], p. 785, teorema de dualidade)[6]. Esta condição é a condição de transversalidade da teoria do controle ótimo ou do cálculo das variações.

3 Interpretando a regra de Keynes-Ramsey : uma arbitragem intertemporal de preços

Seja um empréstimo realizado em numerário cuja taxa de remuneração por período é ρ. Uma unidade de numerário emprestada durante um período vale no final do período $(1 + \rho)$ unidades do mesmo numerário. Seja também uma unidade de um ativo qualquer cujo preço em termos de numerário é p_t no início do período e p_{t+1} no final. A taxa de retorno por período sobre este ativo é r. Uma unidade de numer´ario investida neste ativo valer´a no final do período (p_{t+1}/ p_t) $(1 + r)$ unidades deste numer´ario. A arbitragem assegura que no equilíbrio temos

$$1 + \rho = (p_{t+1}/ p_t)\,(1 + r)$$

desde que os rendimentos dos diversos ativos devem se igualar quando avaliados na mesma unidade de conta. Dito doutro modo, a evolução do preço do ativo considerado deve corrigir a eventual discrepância das taxas intrínsecas de retorno.

Observamos que a regra de Keynes-Ramsey (12) pode ser reescrita precisamente desta forma :

$$1 + \rho = (u'\,(c_{t+1}) \,/\, u'\,(c_t)) \,/\, u'\,(c_t)\,(1 + f'\,(k_{t+1}))$$

[6] No horizonte infinito, mostrar a necessidade de uma condição de transversalidade no ótimo é nada trivial e é objeto até hoje de trabalhos bastante técnicos. Uma síntese do estado das artes acompanhada de novos resultados é Kamihigashi [3]. No contexto do problema particular de maximização estudado aqui, o trabalho citado de Weitzman parece ser o primeiro a fornecer uma resposta definitiva.

Com efeito, a razão das utilidades marginais pode ser interpretada como razão de preços relativos. A significação da regra fica esclarecida : ao longo da trajetória ótima de crescimento, a evolução intertemporal do consumo deve ser tal que, corrigido pelos preços associados a esta evolução, o rendimento na margem do capital torna-se igual `a perda devida `a espera.

Referências bibliográficas

[1] Blanchard, O.J., e S. Fischer. **Lectures on Macroeconomics**. Cambridge, Mass. : The MIT Press, 1989.

[2] Eggleston, H.G. **Elementary Real Analysis**. Cambridge: Cambridge University Press, 1962

[3] Kamihigashi, T. **Necessity of Transversality Conditions for Infinite Horizon Problems**, Econometrica, 2001, n.69, p.995-1012.

[4] Ljungquist, L., e T.J. Sargent. **Recursive Macroeconomic Theory**. Cambridge, Mass. : The MIT Press, 2000.

[5] Ramsey, F.P. **A Mathematical Theory of Savings**, Economic Journal, 38, 543-559. Reimpresso como "Optimal growth", Ch. 20 em Growth Economics, ed. por A. Sen. Harmondsworth : Penguin Books, 1928, p. 477-495.

[6] Sargent, T.J. **Dynamic Macroeconomic Theory**. Cambridge, Mass.: Harvard University Press, 1987

[7] Weitzman, M.L. **Duality Theory for Infinite Horizon Convex Models**, Management Science, 1973, n.19, 783-789.