O VELHO PRINCÍPIO DE ARQUIMEDES

A.B. Guimarães
Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras "Santa Marcelina"
Muriaé – MG

Resumo

Neste trabalho discutimos o princípio de Arquimedes mostrando três modos distintos de verificá-lo teoricamente e propusemos uma solução para um problema que consta como um desafio no livro intitulado "Curso de Física Básica" de autoria do Prof. Moysés Nussenzveig.

I. Introdução

O Prof. Moysés Nussenzveig, em seu livro intitulado "Curso de Física Básica" [1], propõe o seguinte problema de número 10 da página [1]-4:

"(a) Um cubo de gelo flutua sobre água gelada num copo, com a temperatura da água próxima de 0ºC. Quando o gelo derrete, sem que haja mudança apreciável da temperatura, o nível da água no copo sobe, desce ou não se altera?

(b) Um barquinho flutua numa piscina; dentro dele estão uma pessoa e uma pedra. A pessoa joga a pedra dentro da piscina. O nível da água na piscina sobe, desce ou não se altera?(Três físicos famosos, a quem este problema foi proposto erraram a resposta. Veja se você acerta!)"

Este desafio, feito pelo Prof. Moysés, nos motivou a discutir o princípio de Arquimedes e propor uma solução para o problema.

II. Aspectos históricos

Arquimedes nasceu em Siracusa na Silicia, por volta de 287 A. C., onde foi morto em 212 A. C., por um soldado romano. Passou algum tempo de sua vida em Alexandria onde ficou bastante conhecido pelo caso da coroa do rei Hierão II. O rei Hierão II, governante de Siracusa e amigo de Arquimedes, suspeitou que uma coroa de ouro puro que ele mandara fazer, era na realidade, de ouro fundido com prata, embora pesasse o mesmo que o ouro dado ao ourives. Ele perguntou a Arquimedes como poderia determinar se o ouro tinha sido ou não adulterado, sem estragar a coroa, e dizem que Arquimedes encontrou a resposta enquanto tomava banho. Ele observou que a quantidade de água que se derramava da banheira quando nela entrava, era igual ao volume do seu corpo quando este imergia. Verificou que, se a coroa fosse de ouro puro deveria deslocar uma quantidade de água semelhante a deslocada por uma massa de ouro de igual peso. Se, por outro lado, estivesse misturado com prata, que pesa menos que o ouro, a coroa teria um volume maior e deslocaria mais água que o ouro puro. Arquimedes ficou tão satisfeito com a sua descoberta que dizem ter saído do banho e corrido, nu, pelas ruas da cidade em direção à sua casa, gritando "Heureca", "Descobri". Não sabemos se a história é verídica - ela foi contada pela primeira vez, pelo arquiteto e engenheiro romano Marco Vitrúvio [2], no século I A. C..

III. Considerações teóricas

Embora o princípio de Arquimedes tenha sido obtido diretamente da experiência ele pode ser facilmente verificado por considerações teóricas. Seu enunciado é o seguinte:

Todo <u>corpo</u> mergulhado num fluido fica submetido a uma força (empuxo) de baixo para cima igual ao peso do volume de fluido deslocado pelo corpo e cuja direção passa pelo ponto onde se encontrava o centro de gravidade do fluido deslocado [3].

A verificação teórica mais comum desse princípio é relacionada à diferença de pressão entre dois pontos de um fluido em equilíbrio. Consideremos um corpo sólido em forma de um cilindro circular de área da base A e altura h totalmente imerso num fluido de densidade p, em equilíbrio. Por simetria, vemos que as forças sobre a lateral do cilindro se equilibram duas a duas. Entretanto, a pressão P_2 exercida pelo fluido sobre a base inferior do cilindro é maior que a pressão P_1 exercida sobre a base superior. Pela lei de Stevin, temos:

$$P_2 - P_1 = \rho \, g \, h$$

Assim a resultante das torças superficiais exercidas pelo fluido sobre o cilindro será uma força vertical $E = E\,K$ dirigida para cima. Como $E = P\,A$, temos:

$$E = P_2 A - P_1 A = \rho \, g \, h = mg,$$

onde m é a massa do fluido deslocado pelo cilindro. Logo, temos que $E = \rho\, g\, V$, onde $V = A\, h$ e $\rho\, V = m.$ Por conseguinte, a força **E**, que se chama empuxo, é dada por $E = m\, g\, k = -P_f$ onde P_f é o peso da porção de fluido deslocado pelo corpo.

Pode-se chegar ao mesmo resultado aplicando o princípio de "solidificação" enunciado por Stevin em 1586. Suponhamos que o corpo sólido imerso fosse totalmente substituído pelo fluido.

O volume de fluido que ele deslocou estaria em equilíbrio com o resto do fluido. Logo, a resultante das forças superficiais que atuam sobre a superfície S desse volume, hipotético, tem de ser igual e contrária a resultante das forças volumétricas que atuam sobre ele, ou seja, ao peso da porção de fluido deslocada. As pressões superficiais não se alteram se imaginarmos a superfície S "solidificada". Logo, a resultante das forças superficiais sobre o sólido é igual e contrária ao peso da porção de fluido deslocada. Como $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{P_f}$ se equilibram, elas devem atuar no mesmo ponto, ou seja, no centro de gravidade da porção de fluido deslocada, denominado centro de empuxo.

Outra maneira não muito comum, mas muito interessante de verificar o princípio de Arquimedes é por considerações energéticas. Levantemos, hipoteticamente, um corpo de volume V e densidade ρ até a uma altura h, fazendo isto uma vez no vácuo e outra vez num fluido de densidade ρ_o. No vácuo necessitamos de uma quantidade de energia igual a $\rho\, Vgh$ que é a energia potencial gravitacional que o corpo adquire.

No segundo caso, necessitamos de uma quantidade de energia menor, visto que ao levantarmos o corpo a uma altura h, um volume igual de fluido desce à mesma altura. Assim, para levantarmos o corpo no fluido necessitamos uma quantidade de energia dada por $\rho Vgh - p_o Vgh$. Podemos interpretar a quantidade de energia ρVgh como sendo o trabalho realizado por uma força complementar (empuxo) que atua no corpo imerso no fluido que facilita sua ascensão. Como o trabalho é dado por $\rho_o Vg$ h, a força é dada por $E = \rho_o gV$ e dirigida verticalmente para cima.

IV. Solução do problema

Parte (a):

O peso do bloco de gelo é equilibrado pelo empuxo da água, que é igual ao peso da porção de água deslocada pela parte imersa do bloco de gelo. Como na fusão o gelo tem seu volume reduzido, e a massa, obviamente, não se altera,

$$\rho_g\, V_g = \rho_a\, V_a\,,$$

então, o volume ocupado pelo gelo derretido é ,exatamente, igual aquele ocupado anteriormente pela parte submersa do bloco, portanto o nível da água no copo não se altera.

Parte (b):

Sejam:

V_i - a soma do volume de água V_H na piscina com o volume imerso do barco V_{Si}, inicialmente,

V_f - a soma do volume de água na piscina com o volume imerso do barco V_{sf} após a pedra ter sido jogada na piscina e o volume V_p da pedra;

M_p - massa da pedra;

M_b - soma da massa do barco com a massa da pessoa;

ρ - densidade da pedra e ρ_o densidade da água.

Assim, temos:

$$V_i = V_{si} + V_H \tag{1}$$

e

$$V_f = V_{sf} + V_H + V_p \tag{2}$$

Subtraindo (2) de (l), temos:

$$V_i - V_f = (V_{si} - V_{sf}) - V_p$$

Devemos considerar três hipóteses:

1ª) Se $V_{si} - V_{sf} > V_p$, isto é, $V_i > V_f$, neste caso o nível da água na piscina desce.

2ª) Se $V_{si} - V_{sf} < V_p$, isto é, $V_i < V_f$, neste caso o nível da água na piscina sobe.

3ª) Se $V_{si} - V_{sf} < V_p$,isto é, $V_i = V_f$, neste caso o nível da água na piscina não se altera.

Para verificar qual das hipóteses é verdadeira devemos usar o princípio de Arquimedes.

Enquanto a pedra está dentro do barco, temos:

Peso = Empuxo

ou

$$\left(M_b + M_p)g = \rho_o V_{si} g\right) \quad (3)$$

Depois que a pessoa joga a pedra na água temos:

$$M_b g = \rho_o V_{sf} g \quad (4)$$

Substituindo (4) em (3) e eliminando g, temos:

$$\rho_o \left(V_{si} - V_{sf}\right) = M_p$$

ou ainda

$$V_{si} - V_{sf} = M_p / \rho_o \quad (5)$$

Substituindo $M_p = \rho V_p$ em (5), temos:

$$V_{si} - V_{sf} = \left(\rho / \rho_o\right) V_p \quad (6)$$

Subtraindo V_p nos dois membros da equação (6), temos:

$$V_{si} - V_{sf} - V_p = \left(\rho / \rho_o - 1\right) V_p$$

Como $\rho > \rho_o$, o segundo membro da equação anterior é sempre positivo, ou seja,

$$\left(V_{si} - V_{sf}\right) - V_p > 0 \text{ ou } V_{si} - V_{s_f} > 0$$

ou ainda

$$V_i > V_f$$

Assim podemos concluir que a primeira hipótese é a verdadeira, ou seja, o nível da água na piscina desce.

Observe que podemos, ainda, determinar a diferença entre o nível inicial h_i e o nível final h_f da água na piscina. Para tal, suponhamos que a área da superfície da base da piscina seja S. Então, pela equação (6), temos:

$$S_{hi} - S_{hf} = \left(\rho / \rho_o - 1\right) V_p$$

ou

$$h_i - h_f = \left(\rho / \rho_o - 1\right) V_p / S$$

É importante observar que consideramos constante a temperatura do sistema na resolução do problema de acordo com o enunciado do proponente.

V. Conclusão

Este problema, embora esteja proposto em um livro dedicado aos alunos de curso superior, a solução que apresentamos para ele é perfeitamente compreensível para alunos do curso de segundo grau. Outros problemas, semelhantes a este, que aparentemente parecem difíceis podem ser facilmente resolvidos usando este mesmo raciocínio. Por exemplo:

Suponha que no interior do bloco de gelo referido na parte (a) do problema proposto estivesse uma bolinha de chumbo. Nas mesmas condições do problema o que aconteceria com o nível da água no copo? E se fosse uma bolha de ar?

Referências

1- NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica** – Fluidos, Oscilações e Ondas, Calor. 2. ed. Editora Edgard Blücher Ltda, 1990.

2- RONAN, C. A. **História Ilustrada da Ciência**. Jorge Zahar Editor, 1987.

3- IRMÃOS MARISTAS. **Física**. Coleção F.T.D. Ltda, 1965.