Considerações sobre o Pense e Responda (resposta do n. anterior) publicado no v. 5, n. 3

1. Se a Terra girasse no sentido indicado na figura, o Sol nasceria a Oeste e se poria a Leste, além disso, o desvio do objeto que cai seria para o Oeste.
2. A relação utilizada para calcular a velocidade relativa do objeto só é aplicável a referenciais que não giram e como a Terra gira, o resultado obtido esta incorreto. Sem vetores, a relação correta é

$$V_{OS} = V_O - V_S - \omega h = 0,$$

já que a partícula é solta a partir do repouso. Com certeza, isso invalida o argumento utilizado para deduzir que o objeto se desvia para Leste e invalida os cálculos que se baseiam no resultado incorreto obtido.

Infelizmente, o problema é complicado e não conheço nenhuma maneira simples de abordá-lo. Entretanto, considero simples mostrar, com argumentos bastante elementares, que o desvio tem que ser para Leste, ainda que calcular o quanto se desvia seja bem mais complicado. A seguir apresento as "demons-trações" mais simples que me ocorreram, sem pretender atribuir-me sua paternidade.

1. Porque se produz um desvio para Leste

Tal como se argumenta na revista, no momento de soltar o objeto, esse cai com uma velocidade para Leste (em relação a um referencial que não gira com a Terra), devendo, então, "ficar em órbita" segundo as leis de Kepler, entre elas a "lei das áreas". Mas como a sua distância ao centro da Terra está diminuindo ("está caindo"), para "áreas iguais em tempos iguais" o objeto deve descrever "ângulos crescentes em tempos iguais", e como a Terra segue girando com "ângulos iguais em tempos iguais", o objeto "se adianta" à Terra e se desvia para Leste. Esse argumento mostra também que, para qualquer queda "razoável", o efeito tem que ser muito pequeno.

2. Cálculo do desvio

A maneira mais simples que me ocorre para calcular o desvio num referencial que não gira com a Terra exige saber que, de acordo com a "lei das áreas", se ω' é a velocidade angular do objeto e r é a sua distância ao centro da Terra, então:

$$r^2 \omega' = constante$$

Como, no instante de soltá-lo, sua velocidade angular é igual à velocidade angular ω da Terra e sua distância ao centro da Terra é r_0 ($r_0 = R + h$, sendo R = raio da Terra e h_0 = altura inicial sobre a superfície terrestre),

$$\omega' = \omega\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 ,$$

e, à medida que cai, $\omega' > \omega$ porque $r < r_0$. Portanto, a velocidade angular relativa ω_r do objeto em relação à Terra é:

$$\omega_r = \omega' - \omega = \frac{\omega(r_0 + r)(r_0 - r)}{r^2} ,$$

donde a componente "horizontal" da velocidade relativa do objeto com relação à Terra é:

$$v_r = \omega_r r = \frac{\omega(r_0 + r)(r_0 - r)}{r} .$$

Fazendo $r = R + h$:

$$v_r = \frac{\omega(h_0 - h)(2R + h_0 + h)}{(R + h)}$$

que, no caso $h_0 << R$ considerado na revista, dá:

$$v_r = 2\omega(h - h_0) .$$

Dentro dessa aproximação,

$$h_0 - h = \frac{gt^2}{2} \quad \text{e}$$

$$v_r = \omega g t^2 ,$$

que, por integração, resulta em

$$d = \frac{\omega g t^3}{3} .$$

Combinando esse resultado com $t^2 = \frac{2h_0}{g}$, obtém-se finalmente

$$d = \frac{2}{3\omega h_0\left(\frac{2h_0}{g}\right)^{\frac{1}{2}}} ,$$

que corresponde a $\frac{2}{3}$ do valor obtido na revista.

Uma maneira de chegar a esse mesmo resultado sem proceder formalmente a integração é a seguinte. A velocidade relativa para Leste não é constante, mas aumenta à medida que o corpo cai. Podemos obter o desvio para Leste, num dado tempo de queda, multiplicando esse tempo pelo valor médio da velocidade relativa para Leste. Dividindo o tempo total de queda τ em, por exemplo, milionésimos de segundo, podemos tomar a velocidade relativa em cada um desses intervalos como constante e igual a:

$$v_{r1} = \omega g(1\times 10^{-6}s)^2;\; v_{r2} = \omega g(2\times 10^{-6}s)^2;\; [...];\; v_{rN} = \omega g(N\times 10^{-6}s)^2,$$

de modo que a velocidade média é

$$< v_r >= \frac{\omega g(1^2 + 2^2 + [\ldots] + N^2)(10^{-6}s)^2}{N}$$

que, utilizando a conhecida fórmula para a soma dos *N* primeiros quadrados, dá

$$< v_r >= \frac{\omega g(N+1)(2N+1)(10^{-6}s)^2}{6}$$

e, como *N >> 1*, finalmente resulta

$$< v_r > = \frac{2\omega g(N\times 10^{-6}s)^2}{6} = \frac{\omega g\tau^2}{3},$$

já que obviamente $N\times 10^{-6}s = \tau$, o tempo total de queda. Com esse valor para a velocidade relativa média para o Leste, obtemos que

$$d =< v_r > \tau = \frac{\omega g\left(\frac{2h_0}{g}\right)^{\frac{3}{2}}}{3} = \frac{2}{3\omega h_0\left(\frac{2h_0}{g}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Claudio González
Depto. de Física
Universidade do Chile
Santiago – Chile

No vol. 5 n. 3, de dezembro de 1988, foi proposta, na página 203, uma solução para o problema, usando-se as equações do movimento horizontal de uma partícula. Gostaria, contudo, de afirmar que o movimento horizontal é estudado em relação a um sistema inercial, isto é, a Terra deveria estar em repouso. Como a Terra possui uma velocidade angular em torno de seu eixo de rotação, qualquer sistema referencial ligado à sua superfície deixa de ser um sistema inercial e, portanto, o problema requer uma solução mais elaborada como segue:

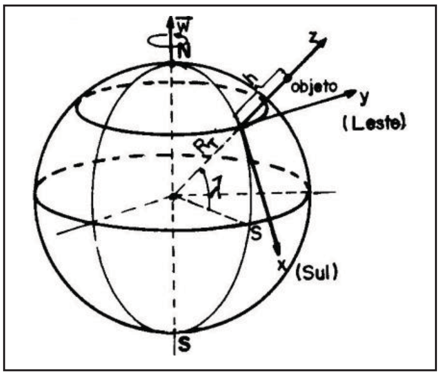
O movimento de uma partícula em relação ao sistema (*x, y, z*), ligado à superfície da Terra, como mostra a Fig. 1, é definido pelas seguintes equações diferenciais:

$$\ddot{x} = 2\omega\dot{y}(sen\lambda) \quad (1)$$

$$\ddot{y} = -2\omega(\dot{z}(\cos\lambda) + \dot{x}(sen\lambda)) \quad (2)$$

$$\ddot{z} = 2\omega\dot{y}(\cos\lambda) - g\,. \quad (3)$$

onde ω, g e λ são, respectivamente, a velocidade angular da Terra, sua aceleração da gravidade, suposta constante, e a latitude.



Considerando a partícula localizada sobre o eixo *z* da Fig. 1 e sobre o equador terrestre, deve-se substituir nas equações (1), (2) e (3), $\lambda = 0$, resultando:

$$\ddot{x} = 0 \quad (4)$$

$$\ddot{y} = -2\omega\dot{z} \quad (5)$$

$$\ddot{z} = 2\omega\dot{y} - g\,. \quad (6)$$

Assumindo, no instante $t = 0$, $x = y = 0$, $z = h$ e $\dot{x} = \dot{y} = \dot{z} = 0$ e integrando-se as equações (4) e (5), obtém-se, respectivamente,

$$\dot{x} = 0 \quad (7)$$

$$\dot{y} = 2\omega(h - z)\,. \quad (8)$$

Substituindo-se (8) em (6), resulta

$$\ddot{z} = 4\omega^2(h - z) - g\,. \quad (9)$$

Sendo, em (9), ω^2 muito menor que ω, pode-se escrever

$$\ddot{z} \cong -g\,, \quad (10)$$

que representa um movimento de queda livre ao longo do eixo *z* e fornece, respectivamente, a velocidade e a altura da partícula no instante *t*, a saber:

$$\dot{z} \cong -g\,t \tag{11}$$

$$z \cong \frac{h-1}{2\,g\,t^2}\,. \tag{12}$$

Substituindo-se (11) em (5) obtém-se a aceleração da partícula no sentido do eixo *y* (na direção Leste):

$$\ddot{y} \cong 2\omega\,g\,t\,. \tag{13}$$

A expressão (13) fornece, respectivamente, a velocidade e o deslocamento da partícula, no sentido do eixo *y* em relação ao tempo:

$$\dot{y} \cong \omega\,g\,t^2 \tag{14}$$

$$y \cong \frac{1}{3\omega\,g\,t^3}\,. \tag{15}$$

Se a partícula leva, em queda livre, um intervalo de tempo *T* para percorrer a altura *h*, então as equações (12) e (15) fornecem:

$$h \cong \frac{1}{2\,g\,T^2} \tag{16}$$

$$\delta \cong \frac{1}{3\,\omega\,g\,T^3}\,. \tag{17}$$

Eliminando-se o tempo entre essas últimas equações, obtém-se, finalmente, o deslocamento da partícula para Leste, isto é:

$$\delta \cong \frac{1}{3\,\omega\,g\left(\frac{2h}{g}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{3\,\omega\,h\sqrt{\frac{2h}{g}}}\,. \tag{18}$$

Substituindo-se, na expressão (18), $\omega = 7{,}29\times10^{-5}$ rad/s, $g = 9{,}8$ m/s^2 e $h = 200$ m, obtém-se um desvio para Leste de 6,2 cm, que é um valor bem diferente daquele encontrado no CCEF.

Referências bibliográficas

SPIEGEL, M. R. **Theory and problems of theoretical mechanics**. New York: Schaum Publishing, 1967.

Wilson Lopes
Departamento de Física – UnG
Guarulhos – SP