

**DISCUTINDO OS CONCEITOS DE ERRO E INCERTEZA A PARTIR DA TÁBUA DE GALTON COM ESTUDANTES DE GRADUAÇÃO: UMA CONTRIBUIÇÃO PARA A INCORPORAÇÃO DE NOVAS ABORDAGENS DA METROLOGIA AO ENSINO DE FÍSICA SUPERIOR<sup>+</sup>**

---

*Paulo Lima Junior  
Fernando Lang da Silveira  
Instituto de Física – UFRGS  
Porto Alegre – RS*

**Resumo**

*Até a publicação do Guia para Expressão da Incerteza da Medição (GUM), a questão dos erros e das incertezas não estava bem resolvida. Neste artigo, discutimos os conceitos de erro e incerteza segundo as diretrizes mais atuais do campo da metrologia, sugerindo uma maneira de introduzir tais conceitos para estudantes de graduação, fazendo uso da tábua de Galton ou Quincunx como recurso didático. A tábua de Galton também é usada para introduzir o Teorema Central do Limite, explicitando a importância deste teorema na elaboração de intervalos de cobertura e para a interpretação das incertezas.*

**Palavras-chave:** *Erro. Incerteza. Metrologia. Atividades Experimentais.*

---

<sup>+</sup> Discussing the concepts of error and uncertainty with undergraduate students through means of the Galton box: A contribution to incorporate new metrological approaches to Physics teaching

<sup>\*</sup> *Recebido: fevereiro de 2011.  
Aceito: maio de 2011.*

## Abstract

*Until the publication of the Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement (GUM), the question of errors and uncertainties was not well resolved. In this paper, we discuss the concepts of error and uncertainty, according to the latest guidelines in the field of metrology, and suggest a way to introduce such concepts to undergraduate students through means of the Galton box (also called Quincunx) as a teaching tool. The Galton box is also used to introduce the Central Limit Theorem, emphasizing the importance of this theorem in the development of coverage intervals and for the interpretation of uncertainties.*

**Keywords:** *Error. Uncertainty. Metrology. Laboratory Activities.*

## I. Introdução

Metrologia é a ciência da medição. Ela envolve todas as questões teóricas e práticas implicadas nos procedimentos de medição de grandezas em diversas atividades acadêmicas e profissionais, tais como o controle de qualidade dos produtos e insumos industriais, a condução de pesquisa básica, a produção de novas tecnologias, o desenvolvimento e a calibração de padrões de medida (JCGM, 2008a). Por essa razão, a metrologia constitui um elemento fundamental na formação básica de profissionais das áreas de tecnologia e ciência experimental, dentre os quais se encontram os futuros bacharéis e licenciados em Física.

A confiabilidade dos resultados das medições é uma questão crítica no campo da metrologia e tem sido abordada sob os conceitos de erro e incerteza. Em 1977, devido à falta de consenso internacional com respeito à avaliação e expressão da confiabilidade dos resultados de medição, o Comitê Internacional de Pesos e Medidas (CIPM) deu início a um processo que culminou com a publicação, na década de 1990, do Guia para Expressão da Incerteza da Medição (GUM) (JCGM, 2008a) e do Vocabulário Internacional de Metrologia (VIM) (JCGM, 2008b). Assim, antes da publicação do GUM e do VIM, documentos elaborados por representantes das sete organizações internacionais mais eminentes do campo da metrologia<sup>1</sup>, não havia um vocabulário e um conjunto de procedimentos padronizados e

---

<sup>1</sup> BIPM (Bureau International des Poids et Mesures), IEC (International Electrotechnical Commission), IFCC (International Federation of Clinical Chemistry), ISO (International

amplamente aceitos que permitissem avaliar e expressar a confiabilidade dos resultados de medição. Nesse sentido, até meados da década de 1990, a questão dos erros e das incertezas não estava bem resolvida.

A busca por estabelecer fundamentos internacionais relativos à avaliação e expressão da confiabilidade dos resultados de medição implicou uma revisão ampla das tradicionais “teorias de erros”. Sem a pretensão de apontar aqui todas as modificações introduzidas pela nova abordagem do GUM e do VIM à metrologia, é possível destacar que:

### **1. Conceitos fundamentais foram abandonados, criados, redefinidos.**

O conceito de *erro*, por exemplo, passa a ser empregado exclusivamente como a diferença entre um valor observado e o valor verdadeiro de um mensurando. A expressão *erro aleatório* deixa de designar o desvio padrão da média de uma série de observações repetidas. A expressão *erro padrão* foi abolida. A *incerteza* torna-se o conceito mais fundamental da nova abordagem à metrologia.

### **2. Procedimentos básicos foram modificados, expandidos.**

Os procedimentos de avaliação da confiabilidade dos resultados de medição (sobretudo aqueles que não envolvem observações repetidas, feitas aproximadamente sob as mesmas condições) são introduzidos e justificados de maneira menos arbitrária na nova abordagem do GUM e do VIM. Por exemplo, a escolha da metade da menor divisão da escala como “erro instrumental” presente nas tradicionais “teorias de erros” é substituída pela elaboração de modelos teóricos que permitam associar todas as informações relevantes e disponíveis sobre o experimento (que não se limitam à largura da menor divisão da escala do instrumento de medida) a uma quantidade que expresse o quanto não se pode confiar no resultado dessa medição e que possa ser interpretada como desvio padrão<sup>2</sup>.

---

Organization for Standardization), IUPAC (International Union of Pure and Applied Chemistry), IUPAP (International Union of Pure and Applied Physics) e OIML (International Organization of Legal Metrology).

<sup>2</sup> Este procedimento é chamado *avaliação da incerteza do tipo B*. Uma introdução aos procedimentos de avaliação da confiabilidade do resultado da medição pode ser encontrada no artigo “Sobre as incertezas do tipo A e do tipo B e sua propagação sem derivadas” de Lima Junior e Silveira (no prelo), aceito para publicação na Revista Brasileira de Ensino de Física.

### **3. A existência de um único valor verdadeiro, bem definido, tornou-se desnecessária.**

A abordagem do GUM e do VIM à metrologia permite tratar naturalmente situações em que não é possível supor a existência de um único valor verdadeiro, bem definido (sem variabilidade), para o mensurando. Tal abordagem é aplicável a situações em que o alvo da mensuração é intrinsecamente variável, como por exemplo, em um estudo de variação da tensão eficaz em uma tomada elétrica ao longo de um intervalo de tempo de um dia, uma semana ou um mês (vide a seção 3.1 deste artigo).

No âmbito da educação científica, alguns trabalhos buscaram esclarecer aspectos dos novos procedimentos e do novo vocabulário da metrologia (CRUZ et al., 2009; VUOLO, 1999), incorporando-os ao ensino de Física (BUFFLER et al., 2008; SIEGEL, 2007). Uma dificuldade típica das tentativas de incorporação dessas novas diretrizes às disciplinas introdutórias de Física experimental está em superar as concepções e a linguagem na qual a maioria dos professores teve formação e que foram alteradas pelo GUM e pelo VIM.

Neste artigo, abordamos especificamente a questão conceitual de como o GUM e o VIM definem *erro* e *incerteza* e de como é possível introduzir esses dois conceitos fundamentais em disciplinas de Física básica experimental usando um dispositivo didático bastante tradicional: a tábua de Galton.

## **II. Tábua de Galton ou Quincunx**

A tábua de Galton ou Quincunx (HACKING, 1991) é um dispositivo muito simples, idealizado pelo famoso cientista Sir Francis Galton (1822-1911), que consiste de uma placa com pregos fixados em posições alternadas e em fileiras equidistantes, conforme mostra a Fig. 1. A tábua é inclinada de tal forma que uma esfera, inicialmente em repouso, possa se deslocar por gravidade desde a parte superior (identificada por uma cruz na Fig. 1) até a base, onde os espaços entre dois pregos contíguos estão indexados com números reais, inteiros.

Na tábua de Galton que idealizamos e construímos, os pregos estão posicionados formando triângulos equiláteros. O espaço entre quaisquer dois pregos contíguos é de 12,5 mm. Essas dimensões garantem que uma esfera de aço de 12,0 mm (facilmente encontrada no mercado) percorra a tábua da seguinte maneira: ao colidir frontalmente com um prego, a esfera dirige sua próxima colisão frontal necessariamente e com a mesma probabilidade a um dos dois pregos que, na fileira inferior, encontram-se mais próximos do prego anterior (veja Fig. 2). Conforme

será demonstrado adiante, essas condições permitem criar um modelo probabilístico muito especial para a corrida da esfera na tábua de Galton.

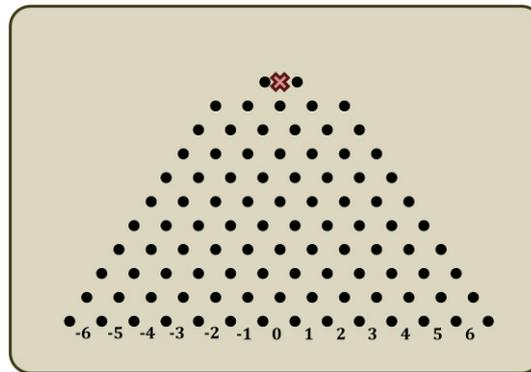


Fig. 1- Tábua de Galton ou Quincunx.

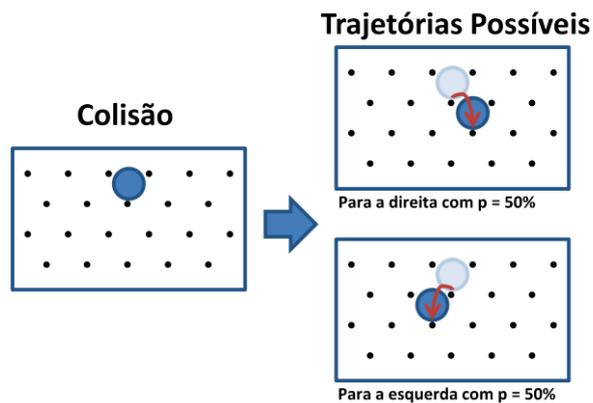


Fig. 2 - Representação das duas únicas trajetórias possíveis após cada colisão no Quincunx construído.

Dessa forma, o nosso Quincunx deve operar de maneira análoga ao clássico problema do andar do bêbado (MLODINOW, 2009) que, em uma calçada, tem igual probabilidade de dar um passo à direita ou à esquerda. Assim, a cada prego

que encontra, admite-se que a esfera tem igual probabilidade de desviar-se para um lado ou outro, colidindo necessariamente com um dos dois pregos contíguos da fileira imediatamente abaixo. Como é possível perceber na Fig. 1, uma corrida da esfera através de todas as fileiras é análoga ao problema unidimensional do andar do bêbado, que dá sempre 10 passos com  $\frac{1}{2}$  unidade de comprimento cada.

Se o diâmetro da esfera for muito diferente da distância entre os pregos, ela poderá se comportar de maneira diversa da admitida, saltando mais de um espaço após uma colisão (tal costuma acontecer em muitas tábuas de Galton apresentadas na *web*) ou ficando presa entre uma fileira de pregos e outra. Assim, apesar da simplicidade aparente, a nossa tábua de Galton requereu uma manufatura bastante cuidadosa de modo a assegurar o pressuposto de equiprobabilidade – à direita ou à esquerda de um prego, no espaço contíguo – para cada uma das colisões da esfera.

Considera-se como resultado do lançamento, ao final de uma corrida da esfera, o local entre dois pregos que a esfera atinge, identificado por número inteiro, na fileira inferior, conforme a Fig. 1. Esse resultado é a posição  $x$ , constituindo-se em uma variável discreta que pode assumir um número inteiro desde -5 até 5. Então  $x$  constitui-se em uma variável aleatória dada pela seguinte expressão:

$$x = X + E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_{10} \quad (1)$$

Na expressão (1)  $X$  é posição inicial da esfera (na nossa tábua  $X$  é igual a zero por construção),  $E_i$  é resultado do  $i$ -ésimo passo (podendo valer  $\frac{1}{2}$  ou  $-\frac{1}{2}$  com igual probabilidade). Por conter 10 passos, o Quincunx por nós construído determina que a posição final  $x$  é sempre um número inteiro, conforme notado anteriormente (a menos de uma falha eventual ou defeito de fabricação, as posições finais  $-6$  e  $+6$  jamais ocorrerão). Como cada passo pode ser considerado independente dos anteriores, é esperado que eles (quase) se cancelem uns aos outros, determinando que os resultados finais estejam centrados em  $x = 0$ , com probabilidade decrescente, conforme se afastem da posição zero.

A tábua de Galton se constitui em um dispositivo singelo, de fácil compreensão, que concretiza um sistema estritamente probabilista. Cada resultado possível é apenas previsível em probabilidade! A distribuição de probabilidades do resultado final será apresentada adiante.

Muitos pensadores já se valeram do Quincunx na exemplificação de um mundo probabilístico. O filósofo da ciência Karl Popper dedica atenção especial a ele “*porque pode servir como um modelo extremamente simples de um mundo probabilístico*” (POPPER, 1989, p. 100). Jean Piaget, em seus estudos sobre a gênese da ideia do acaso, usou concretamente a tábua de Galton em entrevistas

clínicas, verificando que crianças com idade de 12 anos já apresentam a “*compreensão do papel dos grandes números na regularidade das distribuições*” (PIAGET; INHELDER, 1974, p. 52). Dessa forma, cremos que o Quincunx pode ter grande valor pedagógico na introdução dos conceitos de metrologia para os alunos em disciplinas iniciais de física experimental.

### **III. Diferenças entre erro e incerteza**

O Guia para Expressão da Incerteza da Medição (GUM) e o Vocabulário Internacional de Metrologia (VIM) delimitam de maneira muito consistente as fronteiras entre os conceitos de erro e incerteza. Evidentemente, não é fundamental que os alunos compreendam essa demarcação em todos os seus detalhes, mas é preciso que o professor conheça o novo vocabulário internacional para evitar em sala de aula usos que são contraditórios com a nova linguagem internacional. Doravante, espera-se que a maioria dos materiais didáticos produzidos incorpore a nova terminologia.

#### **III.1 Definições de erro e incerteza**

Por definição, erro é a diferença entre o valor obtido no processo de medição e o valor verdadeiro da grandeza medida (JCGM, 2008b). Assim, o conceito de erro supõe que ao mensurando possa ser atribuído um valor verdadeiro, bem definido. Entretanto, em algumas situações práticas a existência de tal valor verdadeiro não tem sentido, podendo às vezes se constituir em uma idealização.

Por exemplo, embora a aceleração de queda livre seja usualmente considerada uma constante para cada posição na superfície da Terra, ela varia ao longo do dia devido aos efeitos de maré solar e lunar (SILVEIRA, 2003). Como essas variações são muito pequenas (menores do que uma parte por milhão), podemos desprezá-las para quase todos os propósitos de pesquisa e ensino e, então, considerar que a aceleração de queda livre tenha um valor local bem definido. Ou seja, para decidir se podemos atribuir a um mensurando um valor verdadeiro é necessário levar em consideração (além da própria natureza do fenômeno em questão) o propósito do processo de medição e o grau de sofisticação e precisão da medida.

Como outro exemplo, podemos citar a necessidade de monitorar a tensão elétrica em residências e indústrias com fins de controlar e avaliar a qualidade do fornecimento de energia elétrica. Esse propósito, por si mesmo, presume que não sejam desprezadas as variações da tensão elétrica ao longo do dia, ou da semana, ou de outro intervalo de tempo de interesse. Por isso, não faz sentido referir um

valor verdadeiro da tensão elétrica fornecida a este ou àquele consumidor, existindo de fato um *conjunto de valores verdadeiros* distribuídos em torno de um valor nominal (por exemplo, 127 V ou 220 V). Essa distribuição de valores será representada por uma estatística de tendência central (por exemplo, seu valor médio no intervalo de tempo de interesse, ou ainda a sua mediana) e uma medida de dispersão ou variabilidade (por exemplo, sua variância ou desvio padrão ou ainda seus valores extremos) ou até por uma função distribuição de frequências. De qualquer maneira, neste tipo de situação em que não há um valor verdadeiro bem definido, mas um conjunto de valores verdadeiros, não se define erro de medição (JCGM, 2008b).

A incerteza, por sua vez, é uma estatística que expressa quantitativamente a qualidade do resultado da medição (JCGM, 2008a). Ela é uma estatística não-negativa que caracteriza a dispersão dos valores que razoavelmente podem ser atribuídos ao mensurando (JCGM, 2008b). Quanto maior for essa dispersão, menos confiável será o resultado da medição. Por isso, a incerteza pode ser considerada uma medida da dúvida racional que se tem no valor experimentalmente atribuído a uma grandeza (JCGM, 2008a).

A incerteza pode ser expressa de duas maneiras: (1) como desvio padrão, ela é chamada incerteza padrão; e (2) como um múltiplo de desvio padrão, ela é chamada incerteza expandida. Nos dois casos, ela é uma medida da dispersão dos valores que podem ser razoavelmente atribuídos ao mensurando.

No caso particular (frequentemente satisfeito em laboratórios didáticos) em que podemos atribuir um valor verdadeiro ao mensurando, a incerteza padrão pode ser interpretada como o desvio padrão da variável erro em uma série de observações realizadas sob as mesmas condições. No caso mais geral, em que há um conjunto de valores verdadeiros, a incerteza padrão pode ser interpretada como o desvio padrão que caracteriza a distribuição dos resultados de medição em torno da média do conjunto de valores verdadeiros assumidos pelo mensurando.

Independente de ser possível falar em valor verdadeiro e erro, toda a determinação experimental de grandezas físicas possui alguma incerteza associada. De fato, como é possível perceber, a definição de incerteza não depende do conceito de valor verdadeiro e mesmo uma grandeza que não possua valor verdadeiro bem definido, mas um conjunto de valores verdadeiros, pode ter sua incerteza avaliada sem dificuldades.

### III.2 Como são calculados o erro e a incerteza de uma medida

Como, por definição, erro é a diferença entre o valor obtido no processo de medição e o valor verdadeiro do mensurando<sup>3</sup>, decorre que o erro é uma quantidade, ora positiva, ora negativa. A avaliação do erro de uma medida depende, portanto, do conhecimento prévio sobre o valor do mensurando.

Por exemplo, desde 1983, a velocidade da luz no vácuo é, por definição, igual a 299.792.458 m/s. Assim, ao final de qualquer medição que tenha por objetivo determinar a velocidade da luz no vácuo, podemos subtrair o resultado obtido experimentalmente do valor conhecido por definição. O resultado dessa operação (ora positivo, ora negativo) é o valor exato do erro da medição.

Há, porém, algumas circunstâncias em que o erro da medição pode ser conhecido aproximadamente. Por exemplo, é comum encontrar na literatura medidas de constantes da natureza muito mais precisas e confiáveis do que aquelas produzidas em laboratórios didáticos. Exemplificando, quando se obtém com uma balança didática de Cavendish um valor para a constante da gravitação universal, a diferença entre este valor e o valor referido na literatura pode ser considerado uma boa aproximação para o erro dessa medida. Em qualquer caso, para que seja possível avaliar o erro de uma medição, é necessário se ter alguma informação sobre o valor do mensurando com precisão superior àquela da medição em pauta.

A incerteza, por sua vez, dispensa esse tipo de informação prévia. Ela pode ser avaliada a partir da análise estatística de uma série de observações (por exemplo, calculando-se o desvio padrão da média de observações repetidas aproximadamente sob as mesmas condições) ou por outros métodos (JCGM, 2008a). Em todo o caso, é possível que o resultado da avaliação da incerteza seja expresso e interpretado como um desvio padrão e, por essa razão, a incerteza jamais será uma quantidade negativa.

### III.3 A decomposição do erro e da incerteza

Uma questão central para a discussão de erros e incertezas em atividades experimentais de Física é a decomposição do erro em componentes que representam a contribuição de cada fonte de erro e a decomposição da incerteza em parce-

---

<sup>3</sup> A rigor, a expressão “valor verdadeiro do mensurando” é redundante uma vez que “o valor do mensurando” é sempre seu valor verdadeiro. Entretanto, ainda que redundante, utilizaremos essa expressão eventualmente para enfatizar o conceito de valor verdadeiro.

las que correspondem às contribuições de cada fonte de variabilidade na medição efetivada. Devido a características que decorrem das definições de erro e incerteza, essas duas quantidades se decompõem de maneiras significativamente distintas.

É possível assumir que o erro total  $E$  é o somatório dos erros  $E_i$  provenientes de diversas fontes, de acordo com a seguinte expressão:

$$E = E_{fonte1} + E_{fonte2} + E_{fonte3} + \dots + E_{fontei} \quad (2)$$

Considere, por exemplo, o caso em que se deseja determinar a aceleração de queda livre com um pêndulo, uma trena e um cronômetro acionado manualmente. Nesse caso, o tempo de reação do operador do cronômetro, a imprecisão da posição inicial e final do movimento de oscilação do pêndulo, o posicionamento da trena para avaliar o comprimento do pêndulo (comprimento do pêndulo simples equivalente ao pêndulo físico efetivamente utilizado), o erro de calibração da trena e outros fatores contribuem (ora para mais, ora para menos) para a variabilidade do resultado da medição em torno do valor verdadeiro da aceleração de queda livre local (supondo que tal valor exista).

Observe que, devido à definição de erro, o conceito de erro aleatório, tal como ocorre em manuais mais antigos de técnicas de análise de dados experimentais, jamais será empregado para designar o desvio padrão da média de uma série de observações. O desvio padrão da média, parâmetro sempre positivo, é uma medida da incerteza e não do erro aleatório. Segundo o VIM (JCGM, 2008b), erro aleatório é a parcela do erro que varia de maneira imprevisível entre uma medição e outra. Ele pode ser atribuído à relação da grandeza que estamos medindo com outras grandezas que não conseguimos ou não desejamos controlar experimentalmente (e, portanto, estão variando) ou ainda pode representar uma parcela intrinsecamente estocástica, isto é, não sujeita a possíveis controles. Assim, o erro aleatório sempre pode ser positivo ou negativo.

Como a incerteza sempre pode ser expressa e interpretada como um desvio padrão, ou como um múltiplo do desvio padrão, é necessário que as incertezas se somem sempre aos quadrados<sup>4</sup>. Com efeito, se  $u_i$  representa o desvio padrão da parcela de erro correspondente à  $i$ -ésima fonte de erro, e se as diversas parcelas de erro são quantidades não correlacionadas, com qualquer distribuição, é possível deduzir que a incerteza total  $u$  deve ser dada por

---

<sup>4</sup> Um teorema absolutamente geral (NUNNALLY, 1978) afirma que o quadrado do desvio padrão (variância) de uma variável aleatória composta (isto é, que resulta da soma de variáveis aleatórias) é a soma dos quadrados dos desvios padrão das componentes se as componentes forem estatisticamente independentes ou apresentarem covariâncias nulas.

$$u^2 = u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + \dots + u_n^2. \quad (3)$$

Assim, enquanto erros são simplesmente somados para se obter o erro total, as diversas incertezas são elevadas ao quadrado e somadas, obtendo-se no final o quadrado da incerteza total.

#### III.4 Uso prático dos conceitos de erro e incerteza

Como é possível perceber, o conceito de erro é muito mais restrito do que o conceito de incerteza. Para que se possa definir erro de medição é necessário definir valor verdadeiro. Nos casos em que não podemos pressupor a existência de tal valor, não faz sentido evocar o conceito de erro. Além disso, o erro é uma quantidade frequentemente não calculada, pois seu cálculo, ainda que aproximado, exige conhecimento prévio do valor do mensurando. Frequentemente, o valor (verdadeiro) do mensurando é aquilo que desejamos estimar no processo de medição e não é conhecido de antemão.

Porém, o conceito de erro é muito importante para dar consistência à teoria da medição. A hipótese de que o erro se decompõe em parcelas estatisticamente independentes que se somam, contribuindo, ora para mais, ora para menos, aos resultados de medição, é fundamental para justificar a adoção de um pressuposto muito usual em análise de dados experimentais: que as medidas de boa parte das grandezas físicas variam segundo uma distribuição aproximadamente normal ou gaussiana. Esse pressuposto será discutido mais adiante neste artigo, a partir da tábua de Galton.

O conceito de incerteza, por sua vez, é mais abrangente. Ele não depende de se conhecer o valor do mensurando. A rigor, tal valor pode não existir e mesmo assim será possível avaliar a incerteza da medição. Enfim, a incerteza é a expressão mais apropriada e universal da qualidade do resultado de uma medição.

O quadro 1 resume a comparação entre os conceitos de erro e incerteza.

#### IV. Erro e incerteza na tábua de Galton

Como já foi antecipado, é possível relacionar a tábua de Galton aos processos de medição em geral, identificando nela os conceitos de erro e incerteza. Além disso, é possível argumentar, a partir desse dispositivo didático, que a média de cada grandeza medida em laboratório flutua aproximadamente segundo uma distribuição estatística conhecida: a distribuição normal ou de Gauss.

Quadro 1 - Comparação entre conceitos de erro e de incerteza, segundo o novo vocabulário internacional de metrologia.

|   | <b>Erro</b>   | <b>Incerteza</b>   |
|---|---|--|
| <b>Definição</b>                        | É a diferença entre o resultado obtido em uma medição e seu valor verdadeiro.   | É um parâmetro que permite avaliar quantitativamente a confiabilidade do resultado de uma medição.   |
| <b>Como se obtém?</b>                   | O erro é obtido pela diferença entre o resultado da medição e o seu valor verdadeiro. Portanto, pode ser positivo ou negativo.  | A incerteza pode ser obtida por procedimentos estatísticos ou não, mas sempre poderá ser interpretada como um desvio padrão. Portanto, é sempre um parâmetro positivo.   |
| <b>O que é necessário para obtê-lo?</b> | É necessário saber (ou ter uma boa estimativa) do valor verdadeiro para estimar o erro de uma medida.   | Não é necessário saber o valor verdadeiro para estimar a incerteza do resultado de uma medição.  |
| <b>Como se decompõe?</b>                | <p>O erro se decompõe linearmente nas diversas fontes de erro:</p> $E = E_{fonte1} + E_{fonte2} + \dots$ <p>Existem várias componentes de erro porque existem várias fontes de erro.</p> <p>Observa-se que, nesta definição, o conceito de erro aleatório jamais será empregado como referência ao desvio padrão de uma série de observações!</p> | <p>A incerteza pode ser interpretada como um desvio padrão. O quadrado da incerteza total se decompõe em uma soma de quadrados, caso as incertezas parciais sejam estatisticamente independentes:</p> $u^2 = u_1^2 + u_2^2 + \dots$ <p>De maneira análoga ao erro, a incerteza pode ser expressa em componentes atribuídas a diversas fontes de variabilidade.</p> |
| <b>Qual é seu uso prático?</b>          | O conceito de erro tem mais importância teórica do que prática.   | É a maneira adequada de avaliar a confiabilidade do resultado de uma medição.  |

## IV. Erro e incerteza na tábua de Galton

Como já foi antecipado, é possível relacionar a tábua de Galton aos processos de medição em geral, identificando nela os conceitos de erro e incerteza. Além disso, é possível argumentar, a partir desse dispositivo didático, que a média de cada grandeza medida em laboratório flutua aproximadamente segundo uma distribuição estatística conhecida: a distribuição normal ou de Gauss.

Enfim, partindo dessas informações, será possível interpretar a incerteza da medição construindo intervalos de cobertura – intervalos que, com alguma probabilidade, contêm o valor verdadeiro do mensurando ou a média dos valores verdadeiros, conforme o caso. Com tudo isso, será possível perceber que a tábua de Galton possui grande valor para introduzir conceitos de metrologia nos laboratórios de Física básica.

### IV.1. Analogia da tábua de Galton com o processo de medição

De um modo geral, podemos supor, para as medições realizadas em laboratórios didáticos, que o resultado obtido ( $x$ ) é igual a um valor verdadeiro ( $X$ ) somado a um erro ou ruído ( $E$ ) conforme a expressão a seguir:

$$x = X + E \quad (4)$$

Adicionalmente, podemos considerar que, na maioria dos experimentos, existem várias fontes de erro. Ou seja, há diversas fontes de variabilidade no processo de medição que contribuem para que o resultado obtido seja diferente do valor alvo. Assim, o erro total pode ser decomposto em parcelas menores e essas componentes de erro são produzidas por fontes relativamente independentes (por exemplo, tempo de reação do operador, variação no posicionamento do instrumento de medida, subjetividade na leitura de escalas analógicas...). Assim,

$$x = X + E_{fonte1} + E_{fonte2} + E_{fonte3} + \dots + E_{fontei} \quad (5)$$

Como é possível perceber, essa situação é análoga ao que ocorre na corrida de uma esfera na tábua de Galton. Nesse caso, podemos imaginar que cada fileira de pregos representa uma fonte de erro, desviando a esfera para a direita ou para a esquerda em relação a sua posição anterior, contribuindo, dessa forma, com uma parcela para o erro total. O resultado de um percurso da esfera através de todas as fileiras de pregos representa, portanto, a posição inicial (aqui entendida como a posição verdadeira) acrescida do erro resultante de todas as fontes de erro envolvidas na medição.

## IV.2. A distribuição normal ou de Gauss

Segundo o Teorema Central do Limite (VENTSEL, 1973, p. 291-295; VUOLO, 1996, p. 213-215), quando variáveis estatisticamente independentes, com variâncias semelhantes, se somam para produzir uma nova variável (tal como ocorre na soma das componentes de erro para produzir o erro total), essa nova variável tem distribuição tendendo à distribuição normal ou gaussiana<sup>5</sup>, quando o número de componentes cresce.

Embora exista uma dedução formal para o Teorema Central do Limite (por exemplo, VENTSEL, 1973), a tábua de Galton permite introduzi-lo de maneira informal e didática para o estudante de graduação. Na tabela 1, encontram-se as frequências relativas para 922 resultados de lançamentos na tábua. O gráfico 1 é o histograma desses resultados. A rigor, a distribuição que melhor descreve a probabilidade  $P(x)$  de ocorrência de cada resultado é uma distribuição multinomial, dada por

$$P(x = n - 5) = \frac{N!}{n!(N-n)!} p^N. \quad (6)$$

Na expressão (6), dado que o espalhamento da bolinha, a cada colisão com um prego, tem a mesma chance de ocorrer à esquerda ou à direita, então  $p = 0,5$ .  $N = 10$  expressa o número total de colisões da bolinha para chegar à última fileira de pinos e  $x = n - 5$  representa a posição final do lançamento (resultando em uma variável inteira e discreta com valores extremos de  $-5$  e  $+5$ , conforme a Fig. 1). Entretanto, como é possível perceber a partir da curva normal ajustada ao histograma do gráfico 1, a distribuição<sup>6</sup> de Gauss adere com excelente aproximação aos resultados da nossa tábua de Galton.

---

<sup>5</sup> A rigor, o Teorema Central do Limite afirma que, quando um número virtualmente infinito de variáveis não correlacionadas, com a mesma distribuição, é somado para produzir  $y = x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_N$ , a variável  $y$  resultante possuirá distribuição normal ou gaussiana. Por isso, quando existem várias fontes de erro, é lícito admitir *a priori* (portanto, antes de se fazer qualquer medida) que estamos lidando com uma variável com distribuição aproximadamente normal.

<sup>6</sup> A esse respeito, foi realizado um teste estatístico para avaliar a aderência entre a distribuição dos resultados obtidos com a tábua de Galton e a distribuição multinomial dada na expressão (6). Compreender os fundamentos do teste utilizado transcende aos objetivos deste artigo. Entretanto, importa saber que, de tal teste, resultou que as diferenças entre as frequências relativas observadas e previstas (gráfico 1) podem ser devidas ao acaso ( $\chi^2 = 12,5$ ;  $p = 0,13$ ) (SPIEGEL, 1974).

Tabela 1 - Tabela das frequências: resultados nos lançamentos em uma tábua de Galton.

| <i>Resultado</i><br><i>x</i> | <i>Frequência</i><br><i>Observada</i> | <i>Frequência</i><br><i>Relativa</i><br><i>Observada</i> | <i>Probabilidade da</i><br><i>distribuição</i><br><i>multinomial</i> |
|------------------------------|---------------------------------------|--|--|
| -5                           | 0                                     | 0,00%  | 0,10%  |
| -4                           | 10                                    | 1,08%  | 0,98%  |
| -3                           | 53                                    | 5,75%  | 4,39%  |
| -2                           | 91                                    | 9,87%  | 11,72%   |
| -1                           | 170                                   | 18,44%   | 20,51%   |
| 0                            | 250                                   | 27,11%   | 24,61%   |
| 1                            | 183                                   | 19,85%   | 20,51%   |
| 2                            | 117                                   | 12,69%   | 11,72%   |
| 3                            | 37                                    | 4,01%  | 4,39%  |
| 4                            | 11                                    | 1,19%  | 0,98%  |
| 5                            | 0                                     | 0,00%  | 0,10%  |

Não recomendamos solicitar que os estudantes lancem a esfera na tábua centenas de vezes, como fizemos aqui. Mostrar o gráfico e explicá-lo, apresentando também alguma simulação em computador, deve ser suficiente para que eles visualizem a distribuição da variável com a qual estão lidando. O mais importante é deixar claro que a maioria das situações experimentais pode ser interpretada de maneira semelhante à tábua de Galton: diversas fontes de variabilidade combinadas tendem a produzir uma distribuição aproximadamente normal.

A partir da distribuição de probabilidades dada por (6), é possível se obter a média ( $\mu_x$ ) e o desvio padrão ( $\sigma_x$ ) esperado para  $x$  (isto é, a média e o desvio padrão em um conjunto muito grande, virtualmente infinito de resultados) na tábua de Galton. A média é dada por

$$\mu_x = \sum P(x) \cdot x. \quad (7)$$

Ora, por uma simples consideração de simetria das probabilidades em torno de  $x = 0$ , resulta que a média é nula.

O desvio padrão é dado por

$$\sigma_x = \sqrt{\sum (P(x) \cdot (x - \mu_x)^2)}. \quad (8)$$

Calculando-se o desvio padrão esperado, encontra-se

$$\sigma_x = \sqrt{0,001 \cdot (-5)^2 + 0,0098 \cdot (-4)^2 + \dots + 0,0098 \cdot (4)^2 + 0,001 \cdot (5)^2} \quad (9)$$

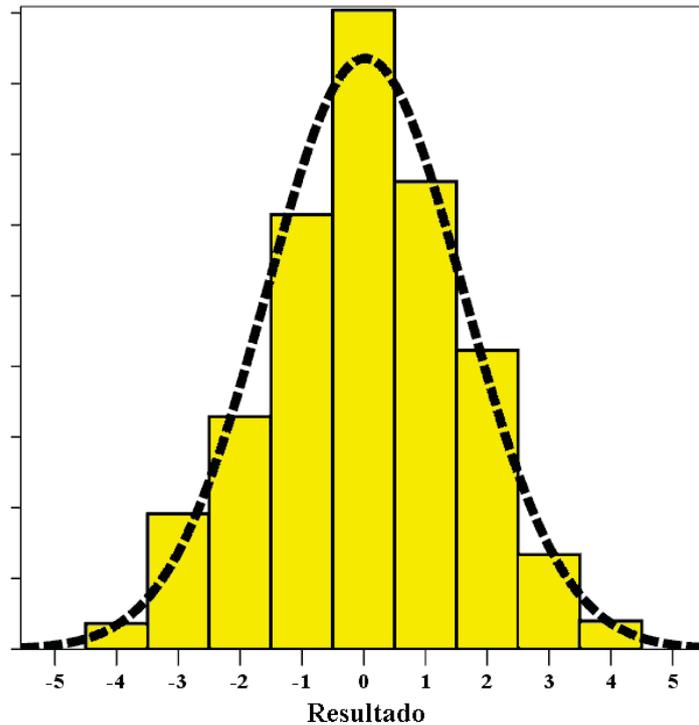


Gráfico 1 - Histograma para os resultados na tábua de Galton.

$$\sigma_x = \sqrt{2,50} = 1,581 \quad (10)$$

Outra forma de se calcular o desvio padrão dos resultados no Quincunx, prescindindo da distribuição de probabilidades dada em (6), está em utilizar o fato de que, para uma variável composta por parcelas não correlacionadas ( $x = X + E_1 + E_2 + E_3 + \dots + E_N$ ), seu desvio padrão ao quadrado é igual à soma dos desvios padrão ao quadrado de cada variável componente ( $\sigma_x^2 = \sigma_{E_1}^2 + \sigma_{E_2}^2 + \sigma_{E_3}^2 + \dots + \sigma_{E_N}^2$ ). Como o resultado  $x$  obtido na tábua de Galton é uma variável aleatória compósita com dez componentes e, sendo o desvio padrão de cada componente

igual a 0,5 (as componentes são variáveis binomiais com valores -0,5 e 0,5 igualmente prováveis<sup>7</sup>), decorre que

$$\sigma_x = \sqrt{0,5^2 + 0,5^2 + \dots + 0,5^2} = \sqrt{10 \cdot 0,5^2} = \sqrt{2,50} = 1,581 \quad (11)$$

A média e o desvio padrão efetivamente obtidos para o conjunto de 922 lançamentos são, respectivamente,  $\bar{x} = 0,02$  e  $S_x = 1,59$ . A incerteza na média de  $x$ , que é o desvio padrão da média de  $x$ , resulta  $u(x) = S_{\bar{x}} = S_x/\sqrt{n} = 0,05$ . Constata-se, então, que os resultados dos lançamentos em nosso Quincunx são consistentes com o modelo probabilístico a ele aplicado.

### IV.3 Procedimentos propostos

A partir da discussão realizada até aqui, é possível propor um procedimento simples (e talvez divertido) através do qual os alunos poderão exercitar os conceitos de erro e incerteza, tomando consciência de que, na maioria das situações experimentais, podem pressupor que a variável que estão medindo está sujeita a flutuações segundo uma distribuição normal devido à interveniência de diversas fontes de erro no processo de medição.

Como proposta de atividade, um estudante de cada grupo escolhe um número inteiro  $R$  qualquer entre 10 e 90. O número escolhido deve ser anotado em uma folha de papel sem que os outros colegas do grupo tomem conhecimento.

Fora do campo de visão de seus colegas, o estudante soltará a esfera na tábua de Galton, declarando somente o resultado da operação  $r = R + x$ . Nessa operação,  $r$  representa o valor observado;  $R$  é o número escolhido em segredo e representa o valor (verdadeiro) do mensurando e  $x$  é o resultado da tábua, que deve ser somado ao valor verdadeiro, representando o ruído ou erro da medida. Ao todo, recomendamos realizar 20 observações.

Os estudantes que desconhecem o valor verdadeiro  $R$  devem calcular a média de  $r$  (representada por  $\bar{r}$ ), o desvio padrão de  $r$  (representado por  $S_r$ ) e o desvio padrão da média de  $r$  (representado por  $S_{\bar{r}}$ ) para as amostras que correspondem às 5, 10, 15 e 20 primeiras observações (será necessário fazer uma breve introdução a respeito do desvio padrão da média, justificando sua existência e mostrando como calculá-lo).

Resultados obtidos experimentalmente encontram-se na tabela 2.

---

<sup>7</sup> O desvio padrão de uma variável binomial, equiprovável, é a metade da diferença entre o maior e o menor valor (metade da amplitude da variável).

Tabela 2 - Média e desvio padrão da média para o valor verdadeiro  $X = 32$ .

| <i>Número de observações</i> | <i>Dados Obtidos</i>            | <i>Média <math>\bar{r}</math></i> | <i>Desvio padrão <math>S_{\bar{r}}</math></i> | <i>Desvio Padrão da Média <math>S_{\bar{r}}</math></i> |
|------------------------------|---------------------------------|-----------------------------------|---|--|
| 5                            | 32, 32, 29, 29, 33              | 31,0                              | 1,9   | 0,8  |
| 10                           | anteriores e 34, 33, 33, 29, 32 | 31,6                              | 1,9   | 0,6  |
| 15                           | anteriores e 31, 30, 34, 33, 31 | 31,7                              | 1,8   | 0,5  |
| 20                           | anteriores e 33, 34, 30, 32, 35 | 32,0                              | 1,8   | 0,4  |

A respeito da tabela 2, é importante fazer as seguintes considerações:

- O desvio padrão de  $r$  resultou consistente com a expectativa teórica dada pela expressão (10).
- O desvio padrão da média  $S_{\bar{r}}$  é uma medida da incerteza sobre a média  $\bar{r}$ .
- Quando o número de observações aumenta, a incerteza  $S_{\bar{r}}$  tende a diminuir.
- A redução da incerteza não é proporcional ao aumento de observações (na verdade o desvio padrão da média é inversamente proporcional à raiz quadrada do número de observações). Existe um ponto a partir do qual o trabalho que se tem em aumentar o número de observações não é compensado por uma redução significativa na incerteza da medição.

A etapa seguinte da análise consiste em usar os valores médios e os desvios padrão das médias para determinar intervalos de cobertura.

#### IV.4 Determinando intervalos de cobertura

Intervalos de cobertura são intervalos em que a probabilidade de ocorrência do valor verdadeiro (ou da média do conjunto de valores verdadeiros) está especificada. Tais intervalos são importantes porque permitem contornar a impossibilidade de se conhecer exatamente o valor (ou os valores) de grandezas que só podem ser determinadas por meio de experimentos.

A determinação dos intervalos de cobertura requer ter obtido o resultado da medição (que pode ser a média de uma série de observações feitas aproximadamente sob as mesmas condições), a incerteza desse resultado (que pode ser expressa pelo desvio padrão da média) e conhecer a distribuição de probabilidades que descreve a variabilidade do resultado.

A respeito da distribuição de probabilidades, o Teorema Central do Limite (ilustrado com resultados da tábua de Galton) oferece fortes razões teóricas para aceitarmos como pressuposto que a média<sup>8</sup> de resultados experimentais segue uma distribuição aproximadamente normal ou gaussiana.

A forma geral de um intervalo de cobertura é  $(\bar{x} - k \cdot S_{\bar{x}}, \bar{x} + k \cdot S_{\bar{x}})$ , em que  $k$  é um número real positivo chamado *fator de abrangência*. Tendo assumido como válida a distribuição normal de probabilidades para a média, os fatores de abrangência e as respectivas *probabilidades de cobertura* podem ser obtidos da tabela 3.

Tabela 3 - Intervalos e probabilidades de cobertura para a distribuição normal ou de Gauss.

| <i>Probabilidade de cobertura</i> | <i>Fator de Abrangência</i> |
|-----------------------------------|-----------------------------|
| <i>p</i>                          | <i>k</i>                    |
| 68,27%                            | 1,0                         |
| 95,45 %                           | 2,0                         |
| 99,73 %                           | 3,0                         |

Conforme foi dito, a correspondência entre probabilidades de cobertura e fatores de abrangência, apresentados na tabela 3, só se sustenta se for possível supor que a melhor estimativa  $\bar{x}$  flutua segundo uma distribuição normal de probabilidades. Embora, para os propósitos da maioria dos laboratórios didáticos, esse pressuposto da normalidade possa ser considerado satisfatório, é preciso acrescentar que, a rigor, a tabela 3 vale somente nos casos em que é feito um número muito grande de medidas (usualmente considera-se que  $n > 30$  é suficientemente grande). Para os casos em que são feitas poucas observações de um mensurando e, portanto, a amostra é pequena ( $n = 5, 10$  ou  $15$ , por exemplo), as probabilidades de cobertura tornam-se dependentes da quantidade de observações realizadas, conforme é apresentado no gráfico 2<sup>9</sup>.

<sup>8</sup> Mesmo quando as medidas individuais não se encontram normalmente distribuídas, a média de um conjunto de medidas terá distribuição aproximadamente normal. Isso decorre do fato de uma média ser uma soma de variáveis e, portanto, vale o Teorema Central do Limite para essa medida de tendência central.

<sup>9</sup> A teoria que suporta a construção dos intervalos de abrangência em pequenas amostras foi desenvolvida originalmente pelo famoso estatístico inglês William Sealy Gosset (1876-

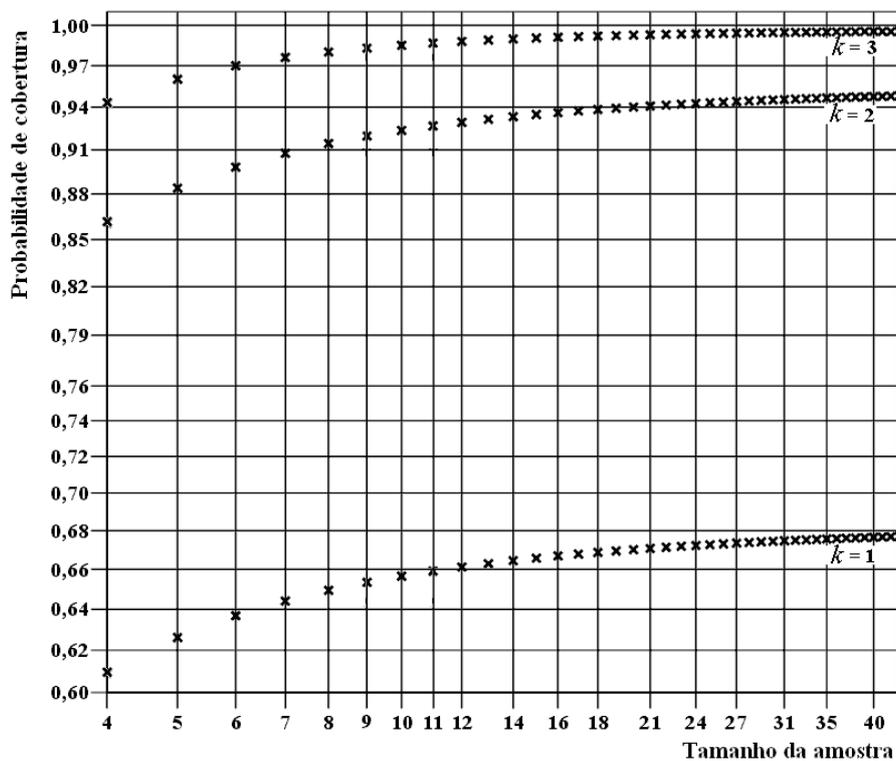


Gráfico 2 - Probabilidades de cobertura em função dos fatores de abrangência  $k$  e do número de observações na amostra.

Como é possível perceber a partir do gráfico 2, para amostras com  $n < 30$  a correspondência entre fatores de abrangência  $k$  e probabilidades de cobertura  $p$  desviam-se significativamente dos valores rigorosamente válidos para a distribuição normal (tabela 3). Entretanto, para os propósitos da metrologia na maioria das atividades didáticas de física experimental – em que o objetivo não é realizar uma análise estatística refinada dos dados, mas discutir como se avalia e expressa a

---

1937), que usava o pseudônimo de Student. A distribuição de probabilidades para a média em pequenas amostras é conhecida como *distribuição t de Student* e pode ser encontrada em qualquer bom texto de estatística como, por exemplo, Spiegel (1974). O gráfico 2 é consistente com tal distribuição.

incerteza da medição, chamando atenção ao fato de que todo o processo de medição tem limitações – alguns professores podem considerar satisfatórios os valores apresentados na tabela 3, mesmo quando a amostra for pequena.

A partir dessas informações, e tendo escolhido o fator de abrangência  $k = 2$ , foram elaborados intervalos de cobertura para a série de 5, 10, 15 e 20 observações. Os resultados encontram-se na Tabela 4.

Tabela 4 - Intervalos de cobertura para cada série de observações.

| <i>Número de observações</i> | <i>Média <math>\bar{r}</math></i> | <i>Desvio Padrão da Média <math>S_{\bar{r}}</math></i> | <i>Intervalos de Cobertura</i> |
|------------------------------|-----------------------------------|--|--------------------------------|
| 5                            | 31,0                              | 0,8  | (29,4; 32,6)                   |
| 10                           | 31,6                              | 0,6  | (30,4; 32,8)                   |
| 15                           | 31,7                              | 0,5  | (30,7; 32,7)                   |
| 20                           | 32,0                              | 0,4  | (31,2; 32,8)                   |

Como é possível perceber, a probabilidade de cobertura aumenta (gráfico 2), tendendo para as probabilidades explicitadas na tabela 3, e a largura dos intervalos diminui (tabela 4) com o aumento da quantidade de observações, mantido o mesmo fator de abrangência. Ou seja, quanto mais observações há na amostra, aumenta a certeza de que o valor verdadeiro (ou a média dos valores verdadeiros) pertença a um intervalo de cobertura cada vez mais estreito. A partir da série que contém 20 observações e da consideração adicional de que o valor verdadeiro é inteiro, é possível concluir (com probabilidade pouco inferior a 95%) que o valor verdadeiro é igual a 32 ou 33. Esse resultado exemplifica que a determinação experimental do valor de uma grandeza sempre está sujeita a alguma incerteza.

## V. Considerações finais

O ensino de metrologia tem uma forte componente tradicional. Um dos maiores obstáculos para a introdução de novos conceitos e procedimentos desse campo nas aulas de Física básica experimental é a formação tradicional que a grande maioria dos professores recebeu e que tende a se reproduzir nas gerações mais novas de estudantes. Neste artigo, discutimos os conceitos de erro e incerteza segundo as diretrizes mais atuais do campo da metrologia, sugerindo uma maneira de introduzir tais conceitos para o estudante de graduação com auxílio da tábua de Galton, interessante recurso didático.

A partir da tábua de Galton, é possível distinguir erro e incerteza: o erro como quantidade, ora positiva, ora negativa, que, somada ao valor (verdadeiro) do mensurando, produz flutuações no resultado da medição; a incerteza como desvio padrão da média de uma série de observações realizadas sob as mesmas condições e como medida da confiabilidade da média dessa série de observações.

Além disso, foi possível discutir o Teorema Central do Limite a partir da tábua de Galton nos aspectos que interessam às atividades experimentais, argumentando que, na maioria das situações de laboratório, devido à existência de muitas fontes de erro, podemos considerar que o resultado da medição flutua aproximadamente segundo uma distribuição normal.

Como a relação entre fatores de abrangência e probabilidades de cobertura está dada para variáveis que flutuam segundo uma distribuição aproximadamente normal, é possível elaborar intervalos de abrangência a partir do resultado da medição e da incerteza dessa medição.

Enfim, embora não consideremos necessário apresentar os conceitos de erro e incerteza em todos os seus detalhes ao estudante – sobretudo ao estudante do primeiro semestre – com este artigo, demonstramos que é possível introduzir e discutir, com alguma profundidade e consistência, conceitos fundamentais do campo da metrologia no Ensino de Física superior.

### **Agradecimentos**

Agradecemos aos pareceristas que, com tanto esmero e competência, analisaram este artigo, e fizeram valiosas sugestões que permitiram aprimorá-lo. Agradecemos também ao estudante Luís Gustavo P. Rodrigues, pelas suas contribuições na coleta de dados.

### **Referências**

BUFFLER, A.; ALIE, S.; LUBBEN, F. Teaching measurement and uncertainty the GUM way. **The Physics Teacher**, v. 46, n. 9, p. 539-543, 2008.

CRUZ, A.; FILIPE, E.; ALMEIDA, G.; VALADARES, J.; PELLEGRINO, O. Medições e incerteza de medição: Um contributo baseado nas convenções e resoluções internacionais. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 26, n. 1, p. 125-135, 2009.

HACKING, I. **La domesticación del azar**. Barcelona: Gedisa, 1991. 363 p.

JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN METROLOGY (JCGM). **Evaluation of measurement data: Guide to the expression of uncertainty in measurement (GUM)**. 1. ed. Sèvres: BIPM, 2008a. 120 p. Disponível em: <[www.bipm.org/en/publications/guides](http://www.bipm.org/en/publications/guides)>. Acesso em: 17 set. 2010.

JOINT COMMITTEE FOR GUIDES IN METROLOGY (JCGM). **International vocabulary in metrology: Basic and general concepts and associated terms (VIM)**. 3. ed. Sèvres: BIPM, 2008b. 90 p. Disponível em: <[www.bipm.org/en/publications/guides](http://www.bipm.org/en/publications/guides)>. Acesso em: 17 set. 2010.

LIMA JUNIOR, P.; SILVEIRA, F. L. Sobre as incertezas do tipo A e B e sua propagação sem derivadas: Uma contribuição para a incorporação da metrologia contemporânea aos laboratórios de física básica superior. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, no prelo.

MLODINOW, L. **O andar do bêbado**. Rio de Janeiro: Zahar, 2009. 261 p.

NUNNALLY, J. C. **Psychometric theory**. New York: McGraw-Hill, 1978. 701 p.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A origem da ideia do acaso na criança**. Rio de Janeiro: Record, 1974. 328 p.

POPPER, K. R. **A teoria dos quanta e o cisma da Física**. Lisboa: D. Quixote, 1989. 227 p.

SIEGEL, P. Having fun with error analysis. **The Physics Teacher**, v. 45, n. 4, p. 232-235, 2007.

SPIEGEL, M. R. **Estatística**. São Paulo: McGraw-Hill, 1974. 580 p.

SILVEIRA, F. L. Marés, fases principais da lua e bebês. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 20, n. 1, p. 10-29, 2003.

VUOLO, J. H. Avaliação e expressão da incerteza em medição. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 21, n. 3, p. 350-358. 1999.

VENTSEL, H. **Théorie des probabilités**. Moscou: MIR, 193. 558 p.

VUOLO, J. H. **Fundamentos da teoria de erros**. 2. ed. São Paulo: Blucher, 1996. 249 p.