
COLISÃO INELÁSTICA COM ROTAÇÃO RELATIVA DE UM OBJETO DE SIMETRIA ESFÉRICA EM UM PLANO⁺*

Luis Paulo Silveira Machado

Departamento de Física – Universidade Federal da Paraíba

João Pessoa – PB

Fabrcio Queiroz Potiguar

Faculdade de Física – Universidade Federal do Pará

Belém - PA

Resumo

Neste trabalho, estudamos uma jogada comum no futebol, o chute ao gol, no qual a bola toca no campo antes de alcançar o goleiro. Tratamos este problema como um caso bidimensional da colisão inelástica e com rotação relativa entre uma esfera e um plano. Demonstramos que, em algumas situações, a bola, após o contato com o solo, pode obter nova trajetória e até velocidade maior na direção do gol, apesar da dissipação de energia. Todo este trabalho pode ser utilizado como contexto para conceitos de mecânica no Ensino de Física.

Palavras-chave: *Colisão inelástica com rotação. Variação de velocidade. Ensino de Física.*

⁺ Inelastic collision with relative rotation of an object of spherical symmetry in a plane

^{*} *Recebido: fevereiro de 2011.
Aceito: setembro de 2011.*

Abstract

In this paper we study a common move in soccer, the bounce of a ball on the floor before reaching the goalkeeper. We treat this problem as a two-dimensional case of inelastic collision and the relative rotation between a sphere and a plane. We show that, in some situations, the ball, after the bounce, might acquire a new trajectory and even higher velocity towards the goal, despite the dissipation of energy. All this work can be used as a context for the teaching of concepts of mechanics in basic Physics courses.

Keywords: *Inelastic collision with rotation. Velocity variation. Physics teaching.*

I. Introdução

O futebol é o esporte mais praticado do mundo e o que fascina todas as idades. Mesmo assim, existem poucos artigos sobre a Física neste assunto^[1]. Logo, é oportuno discutir um lance recorrente nesse esporte com o intuito de utilizá-lo como contexto pedagógico para aulas mais construtivas de Física. Além disso, tal contexto pode ser uma alternativa aos enredos tradicionais dos livros^[2].

O lance em questão trata do chute ao gol em que a bola entra em contato com o campo antes de chegar ao alcance do goleiro. Vários fatos podem ocorrer devido a esse contato: mudança de trajetória devido a imperfeições no campo (o famoso “montinho artilheiro” ou buracos no gramado), mudanças de velocidade, etc. É muito comum que as pessoas, ao observarem tais lances, imaginem que a velocidade da bola deve aumentar após o contato.

Uma análise superficial sobre os conceitos envolvidos nesse fenômeno certamente mostra que isto é impossível, dado o caráter inelástico do contato. Entretanto, uma análise mais profunda, com a ajuda de um modelo adequado para as forças envolvidas nesse processo, leva à conclusão de que tal cenário é possível, implicando que, desta vez, o senso comum não é totalmente incorreto.

A rigor, o evento mencionado é modelado como a colisão inelástica e com rotação relativa entre um objeto de simetria esférica e um plano. Neste trabalho, integramos as equações de movimento dessa esfera em duas dimensões, ou seja, a esfera possui rotação apenas em torno de um eixo, o qual passa pelo seu centro.

Assim, propomos discutir e demonstrar este fenômeno para, com isso, levar a uma abordagem diferente no ensino de Física^[3, 4, 5] de conceitos importantes

na mecânica clássica como conversões de energia, trajetória, oscilador harmônico, equação de movimento, ângulos de espalhamento, etc. Usando para esse fim um contexto leve, prazeroso e lúdico para os estudantes, o futebol. Todo o exposto pode ser tratado tanto em cursos básicos quanto avançados na graduação em Física, Engenharias e áreas afins.

O presente artigo encontra-se organizado do seguinte modo: na seção II, fazemos a descrição, com detalhes, do modelo utilizado. Na seção III, apresentamos os resultados bem como sua análise e interpretação. Na última seção, IV, são apresentadas as conclusões, na forma de um resumo; por fim, os agradecimentos.

II. Descrição do modelo

Na mecânica clássica, estudar a colisão entre dois objetos é relativamente simples. As leis de conservação da energia e do momento linear são suficientes para obter as velocidades finais dos corpos, desde que sejam conhecidas as condições iniciais e/ou os ângulos de espalhamento^[6]. Entretanto, estudar a colisão entre dois objetos com rotação relativa introduz complicações. De tal modo, a análise teórica do problema proposto com as forças apropriadas, como a força tangencial (fricção) no ponto de contato, é difícil. Existem grandes dificuldades de se obter uma solução analítica. Logo, necessita-se do estudo numérico deste problema como extensão dos resultados clássicos de espalhamento de partículas por forças centrais.

Para o estudo proposto, modelamos um disco de massa m e raio R , ambos unitários, inicialmente em contato com um plano rígido. A Fig. 1 ilustra as condições iniciais do problema. O sistema de coordenadas fixo no espaço tem sua origem coincidente com o ponto inicial de contato. O eixo y é perpendicular ao plano e passa pela posição inicial do centro de massa do disco, o eixo x é paralelo à superfície rígida.

De acordo com a ilustração, a posição inicial do centro de massa do disco é $(0, R)$. A velocidade inicial de translação v_i pode ser variada, de modo que as colisões podem ser tanto frontais quanto oblíquas. O disco também apresenta velocidade angular inicial em relação ao centro de massa, ω_i .

Dadas as características inelásticas e de fricção, as equações de movimento de translação para este disco são:

$$m \frac{dv_y}{dt} \hat{j} = F_n \quad (1)$$

$$m \frac{dv_x}{dt} \hat{i} = F_t \quad (2)$$

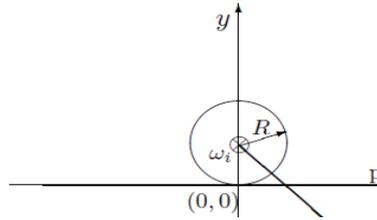


Fig. 1 - Instante inicial da colisão oblíqua inelástica e com rotação de uma esfera contra um plano.

nas quais F_n é a força normal e F_t a força tangencial; ambas atuam no ponto de contato entre o plano e disco. Por sua vez, v_x e v_y dizem respeito ao centro de massa (neste artigo estas componentes sempre são em relação ao centro de massa). A equação de movimento para a rotação é:

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{yF_t}{I} = -\frac{\tau}{I} \quad (3)$$

em que τ é o torque, ω é a velocidade angular mostrada na Fig. 1 em qualquer tempo e I a inércia rotacional da esfera (desconsideramos deslizamentos no contato). Apesar de reduzirmos a análise do problema para duas dimensões, o objeto original gira em três dimensões. Logo, contamos sua real distribuição de massa^[7]:

$$I = \frac{2mR^2}{5} \quad (4)$$

Consideramos as forças durante o contato seguindo Silbert *et al* (modelo de *spring-dashpot*)^[8]. Nesse modelo, as interações entre a esfera e o plano ocorrem tal como em molas lineares sujeitas a amortecimentos dependentes da velocidade e do atrito. Assim, as duas forças são caracterizadas por um termo elástico proporcional à deformação do objeto e a outro termo dissipativo dependente da velocidade. Escrevemos essas forças como

$$F_n = F_y = (\eta_n \delta - \gamma_n m v_y) \hat{j}, \quad (5)$$

$$F_t = F_x = (-\eta_t u_t - \gamma_t m v_t) \hat{i} \quad (6)$$

sendo $\delta = \delta(t)$ correspondente à compressão normal do disco, válida apenas no eixo y e dada por

$$\delta(t) = R - y(t), \quad (7)$$

$u_t = u_t(t)$ é a compressão tangencial do disco no contato com o plano rígido e v_t é a velocidade tangencial relativa no ponto de contato, expressa por

$$v_t = v_x + \frac{1}{2} \omega y. \quad (8)$$

Nas equações (5) e (6), temos (η_n, η_t) como as constantes elásticas nas direções normal e tangencial, responsáveis pela conservação da energia, e (γ_n, γ_t) as constantes viscoelásticas, nas respectivas direções, que caracterizam os termos dissipativos.

A expressão (8) é uma redução da velocidade tangencial relativa da colisão entre duas esferas girantes^[8]. Portanto, é válida apenas para a redução bidimensional considerada neste trabalho. Em v_t , o primeiro termo é devido ao movimento de translação do centro de massa e o segundo leva em conta a rotação e a deformação do disco; no segundo termo, é fácil de verificar que a dimensão é de velocidade. Na equação (6), u_t (também chamado de deslocamento tangencial elástico na região de contato) tem condição inicial nula. De acordo com o modelo de *spring-dashpot*, essa grandeza é constantemente acumulada durante o contato seguindo:

$$\frac{du_t}{dt} = v_t - \frac{u_t v_x x}{y^2}, \quad (9)$$

no qual o segundo termo surge da resistência, ou rigidez do corpo em relação à rotação na região de contato e assegura que u_t estará alinhado com o eixo x (ou plano, Fig. 1). A equação (9) é obtida da redução para duas dimensões de $\frac{du_t}{dt}$ da colisão de duas esferas girantes^[8]. Um modelo completo inclui a possibilidade de quebra do contato pelo rompimento do critério de Coulomb de fricção estática^[9], o que é descartado aqui, dada a baixa intensidade das forças envolvidas.

Por último, o torque, equação (3), em qualquer tempo, imprimirá uma aceleração angular negativa ao disco, uma vez que ele depende da força de atrito estático, sempre contrária ao sentido da rotação.

Alguns comentários a respeito dos valores fixados para as quatro constantes das forças são pertinentes. Em primeiro lugar, a constante elástica na direção radial, η_n , não pode ser muito pequena, caso contrário, a colisão não será próxima da situação real. Para η_n pequeno, o disco fica bastante comprimido, sem romper o seu limite elástico (o que não levamos em conta aqui). Embora possível, tal situação é improvável, dado que os módulos elásticos de materiais reais são muito altos. Isso foi observado quando se estudou a colisão puramente elástica sem rotação.

Em seguida, γ_n , a constante viscoelástica na direção radial, deve sempre ter valor pequeno. Este termo tira a energia do sistema através de uma viscosidade efetiva, como se o corpo estivesse imerso em um meio viscoso. Desse modo, valores altos de γ_n implicam em colisões muito demoradas, consequentemente, não físicas.

Outra consideração é sobre η_t e γ_t . Como colocado, o modelo descrito em (3) não leva em conta o deslizamento dos corpos devido ao rompimento do critério de Coulomb para contatos estáticos^[9]. Testamos alguns conjuntos de valores para as duas constantes tangenciais, e os resultados foram essencialmente os mesmos. Assim, os valores escolhidos não refletem uma situação particular, apenas otimizam a integração numérica.

Escolhemos os seguintes valores para as constantes:

$$\eta_n = 500; \gamma_n = \eta_t = 10 \text{ e } \gamma_t = 1. \quad (10)$$

A velocidade inicial do disco tem as seguintes componentes: $v_x = -v_y = 1$. A não ser que seja explicitamente mencionado, os resultados da próxima seção serão para os valores colocados aqui.

III. Resultados e interpretações

O objetivo principal do trabalho é verificar as mudanças na velocidade da bola durante o contato. Neste trabalho, não deixamos explícitas as unidades; nosso interesse é puramente teórico e optamos pela arbitrariedade dimensional. Essa opção não traz prejuízo para o trabalho, apenas conforto teórico. As unidades podem ser facilmente mostradas (por exemplo) no sistema internacional de medidas, basta fixar as unidades para uma das grandezas e respeitar as relações com as demais. Assim, mostramos nas Fig. 2 e 3, em função do tempo, ω e v_x para algumas condições iniciais de rotação. Para melhor interpretação, re-escalamos (normalizamos) a velocidade angular fazendo $\omega' = \omega(t)/\omega_i$, sendo ω_i a velocidade angular inicial. Também, tomamos $v'_x = v_x(t)/v_x(t=0)$, grandeza adimensional, calculada somente com a intenção de apresentar na mesma escala (eixo) de ω' .

Na Fig. 2, observamos o comportamento temporal de ω' e v'_x para três valores de ω_i com rotação no sentido horário^[10] e, na Fig. 3, para outros três valores com rotação anti-horária. Percebe-se, na Fig. 2 (nos três casos), que v'_x (símbolos abertos) aumenta enquanto ω' (símbolos sólidos) decai. Na Fig. 3, é visto (em todos os casos) que v'_x e ω' diminuem. Temos três conclusões: ω sempre diminui, devido à existência do atrito, conforme previsto pela eq. (3); quanto maior ω_i ,

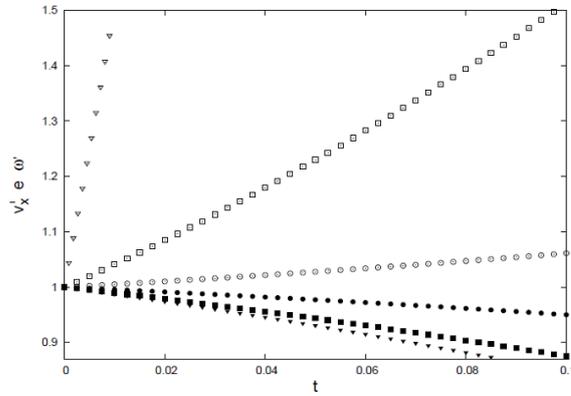


Fig. 2 - $\omega' = \frac{\omega(t)}{\omega_i}$ e $v'_x = \frac{v_x(t)}{v_x(t=0)}$ em função do tempo para três valores de ω_i . Os símbolos abertos representam v'_x , enquanto que os sólidos correspondem a ω' ; círculos para $\omega_i = -3$, quadrados para $\omega_i = -10$ e triângulos para $\omega_i = -100$.

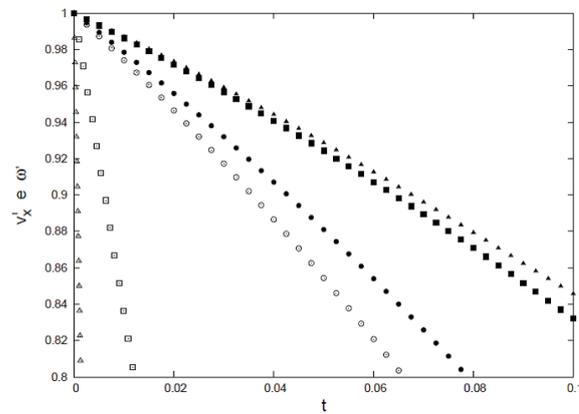


Fig. 3 - ω' e v'_x em função do tempo para outros três valores de ω_i . Os símbolos abertos representam v'_x , enquanto que os sólidos correspondem a ω' ; círculos para $\omega_i = 3$, quadrados para $\omega_i = 30$ e triângulos para $\omega_i = 300$.

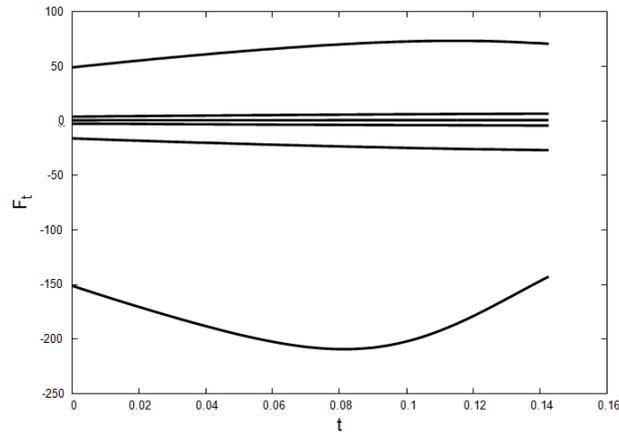


Fig. 4 - F_t , força tangencial, eq. (6), em função do tempo para os casos mostrados nas Fig. 2 e 3. De cima para baixo, temos $\omega_i = -100, -10, -3, 3, 30$ e 300 .

maior é a variação de v_x ; a combinação do sentido de rotação com o deslocamento do centro de massa desempenha papel decisivo para a mudança de v_x .

Mais informações são dadas na Fig. 4, onde medimos a força tangencial (controladora do aumento e da diminuição de v_x) para os casos da Fig. 2 (rotação horária) e 3 (rotação anti-horária). Neste ponto, é visível, para as condições mostradas na Fig. 2, que, sendo $F_t > 0$, o sentido da força coincide com o sentido do deslocamento do centro de massa, resultando no crescimento de v_x . Em contrapartida, para os casos da Fig. 3, $F_t < 0$, a força é contrária ao deslocamento e v_x diminui. Para compor a situação desejada, basta notar que a força de atrito deve ter mesmo sentido do deslocamento do centro de massa. Com isso, encontramos a condição favorável para o aumento de v_x . Quando o centro de massa se deslocar para a

- direita, a rotação deve ser horária;
- esquerda, a rotação deve ser anti-horária.

Satisfeitos os itens acima, a bola, após o contato com o solo, obtém velocidade maior na direção do gol, apesar da dissipação de energia.

Essa conclusão abre espaço para a discussão de um tópico importante nesta análise, a conversão de energia entre os graus de liberdade do disco. Des-

sa forma, analisamos o comportamento temporal da energia cinética de translação:

$$K_T = \frac{mv^2}{2},$$

energia potencial de compressão radial:

$$U_T = \frac{\eta_n \delta^2}{2},$$

energia cinética de rotação:

$$K_R = \frac{I\omega^2}{2},$$

energia potencial de compressão tangencial:

$$U_R = \frac{\eta_t u_t^2}{2}$$

e energia mecânica, E , a qual é a soma de todas essas formas de energia. As Fig. 5 e 6, respectivamente, mostram essas energias em função do tempo para dois casos: $\omega_i = -10$ (caso da Fig. 2) e $\omega_i = 3$ (rever Fig. 3). Ainda que nas duas condições iniciais as rotações estejam em sentido contrário, a análise qualitativa é essencialmente a mesma.

Aferimos que, com o decorrer da colisão, o disco se deforma e, gradualmente, converte as energias cinéticas em energias potenciais, U_T e U_R . Como o objeto se depara com um obstáculo, ocorre uma compressão radial a partir do ponto de contato, parte da energia de movimento translacional (v_y) se acumula em U_T . Essa conversão continua até a compressão radial máxima e até o mínimo movimento translacional ($v_y = 0$), que ocorre pouco antes da metade do tempo de colisão. Esse deslocamento dos pontos máximos e mínimos em relação à metade do processo é devido à dissipação de energia. No caso puramente elástico, todas as conversões são perfeitamente simétricas em relação ao tempo de contato. A partir da compressão máxima, uma parcela de U_T é reconvertida em movimento de translação (somente para v_y , devido à eq. (5)) e o restante é dissipado.

Vale ressaltar que K_T na Fig. 5, inicialmente, decai antes de crescer. Esse resultado pode parecer contraditório com o contínuo aumento de v_x na Fig. 2, porém a redução de K_T , nesse caso, é totalmente dirigida por v_y , que está sob influência de F_n .

O objeto em questão também apresenta movimento rotacional acrescentando interpretações ao processo. Ocasionalmente pela rotação, pela rigidez do material

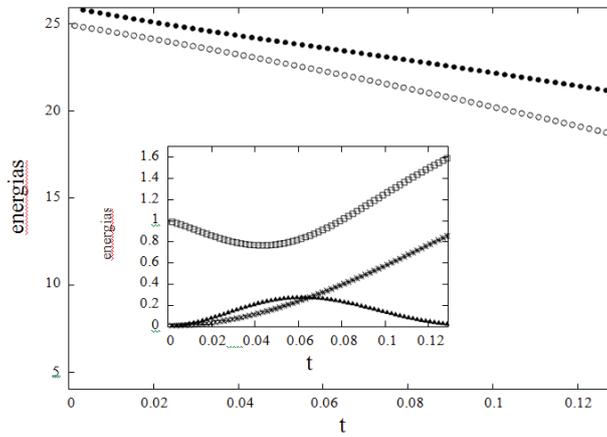


Fig. 5 - Conversões de energia ao longo do tempo para $\omega_i = -10$. Identifica-se com círculos sólidos E e círculos abertos K_R . Em destaque, quadrados abertos para K_T , triângulos sólidos para cima U_T e asterisco para U_R .

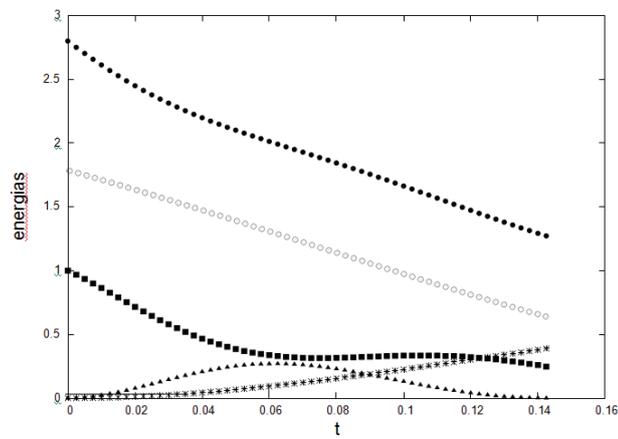


Fig. 6 - Conversões de energia para $\omega_i = 3$. Temos como círculos sólidos E , círculos abertos K_R , quadrados abertos para K_T , triângulos sólidos para cima U_T e asterisco para U_R .

e pelo atrito, também há deformação tangencial do disco. Logo, nas Fig. 5 e 6, U_R cresce devido ao modelo adotado e K_R diminui todo tempo. O último justificado pela presença de uma força contrária ao movimento (atrito estático) que converte ω em v_x . Aqui, notamos que o problema estudado é um excelente exemplo da força de atrito se comportando (também) como *força motriz*, convertendo energia cinética de rotação em energia cinética de translação^[11, 12].

A dissipação existe, notada na diminuição da energia mecânica total, o que não impede o aumento de uma das componentes da velocidade, às custas de uma diminuição (maior) em outra. O exposto usualmente não é destacado, tanto na sala de aula como na literatura.

As condições iniciais e as conversões de energia nas duas últimas figuras reafirmam os dois itens destacados no texto anteriormente.

Na Fig. 5, K_T final $>$ K_T inicial, neste caso, temos a bola se deslocando para a direita, com rotação horária. Na Fig. 6, K_T final $<$ K_T inicial, e a bola se desloca para a direita, com rotação anti-horária. Por fim, o que chama a atenção é a sequência de fatos ao longo do processo. Primeiro, o disco se deforma, acumulando energia como uma mola comprimida e, então, a energia é reconvertida em movimento. Na natureza, as colisões são eventos instantâneos e de difícil medição; aqui, vemos que, mesmo em processos muito rápidos, existe uma ordem de acontecimentos.

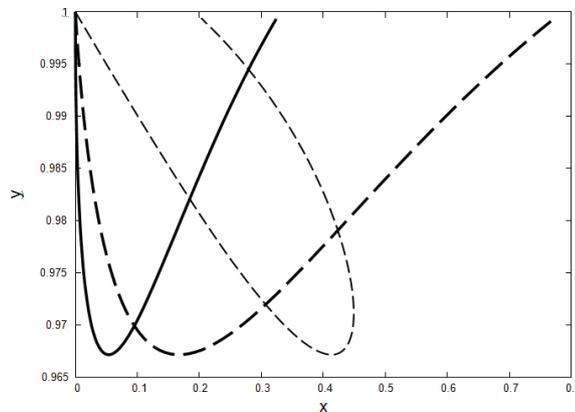


Fig. 7 - Trajetórias para diferentes condições iniciais. Na linha contínua, temos $v_x = 0$ e $\omega = -50$, na linha tracejada, $v_x = 1$ e $\omega = -100$ e, na linha pontilhada, a trajetória com $v_x = 10$ e $\omega = 170$.

A Fig. 7 apresenta três trajetórias para diferentes condições iniciais. Um caso foi a colisão frontal com rotação no sentido horário (linha contínua). Neste, nota-se um desvio na trajetória na direção da força de atrito que surge no contato entre a bola e o plano. Outra situação foi a colisão oblíqua com as componentes da velocidade sendo unitárias (linha tracejada) com rotação horária, condição favorável, porém com o dobro da velocidade angular do caso frontal. Naturalmente, observa-se um desvio maior comparado ao caso anterior, pois a rotação é mais intensa. A última trajetória foi a colisão oblíqua com rotação no sentido anti-horário (linha pontilhada), grande o suficiente para fazer o disco retornar ou voltar. Com esse caso, é inquestionável que a rotação do objeto, dependendo do sentido e do grau de rotação, pode alterar totalmente a trajetória esperada após a colisão. Além do mais, o objeto sofreu a mesma deformação na direção y nas três trajetórias, resultado natural dos parâmetros elásticos serem os mesmos.

Por último, outro modo de analisar a variação de v_x , além do mostrado nas Fig. 2 e 3, é visto na Fig. 8, onde fizemos $\frac{v_{x_f}}{v_{x_i}}$ (razão entre a velocidade

final e inicial da componente x) em função da velocidade angular inicial. Percebe-se o quanto que a bola se torna mais rápida ou lenta na direção do gol influenciada por ω_i . Três situações são apresentadas: $v_{x_i} = 0$ (linha pontilhada) em destaque no gráfico, 10 (linha tracejada) e 100 (linha contínua).

Observamos que, quanto maior for v_{x_i} , menor é a variação de v_x , ou seja, com valores altos de v_{x_i} , é necessária elevada rotação para que v_{x_f} seja significativamente maior. No entanto, qualquer valor de rotação muda v_x , mesmo que em pequena escala. Os últimos dados confirmam a existência do sentido favorável de ω_i para $v_{x_f} > v_{x_i}$. Do contrário, v_x diminuirá. Para ilustrar, sabemos que $v_{x_i} = 10$ (caso da Fig. 8) e $\omega_i = -50$, rotação favorável, v_x aumenta cerca de 25% e, para $\omega_i = -100$, o ganho é de 65%.

IV. Conclusão

Neste trabalho, estudamos numericamente a colisão dissipativa com rotação de um disco em um plano, a fim de avaliar um lance decisivo em partidas de futebol: o chute dado ao gol no qual a bola toca o solo antes de chegar ao goleiro. Para isso, modelamos a força na colisão entre uma esfera e um plano com termos semelhante à lei de Hooke, fornecendo o caráter elástico, e termos dissipativos proporcionais às ve-

locidades, para a dissipação. Por simplicidade, a rotação foi feita em torno apenas de um eixo paralelo ao plano de colisão; assim, o problema se torna bidimensional. Vale notar que, em colisões reais, o eixo de rotação não é, necessariamente, paralelo ao plano. Entretanto, ainda devem ocorrer desvios de trajetória e mudanças na velocidade de translação, segundo foi apurado aqui. Assim, integramos a equação de movimento durante a colisão. Os resultados dos eventos e o bom comportamento das conversões de energia determinam que as modelagens e as integrações realizadas são satisfatórias.

Comprovamos o que, intuitivamente, é palpável: a bola de futebol apresentando rotação no momento em que toca o chão sofre alterações na sua trajetória final e, dependendo do sentido de rotação, até aumenta sua velocidade tangencial ao plano. Observamos que a condição para a bola aumentar de velocidade é que a força de atrito entre a bola e o chão tenha o mesmo sentido do deslocamento do centro de massa. Outro ponto diz respeito à intensidade da rotação também influenciar decisivamente o resultado final (trajetória e v_x). Para o caso em que a força de atrito tem sentido contrário ao deslocamento do centro de massa e a rotação é suficientemente alta, a bola interrompe sua trajetória e retorna em sentido contrário ao original.

Visualizamos as conversões de energias entre os graus de liberdade do disco. Isso é crucial, pois são medidas difíceis de realizar experimentalmente e permitem melhor compreender o que de fato ocorre fisicamente com objetos macroscópicos nesse tipo de evento. Notamos que as energias cinéticas da bola, primeiramente, são convertidas, em grande parte, em energia potencial e, somente após o acúmulo de energia nas deformações, o objeto readquire energia de movimento proveniente da energia acumulada. Percebemos que, apesar de os processos de colisão geralmente serem bastante rápidos, existe uma sequência de fatos. A ideia de processo quase instantâneo pode fazer com que não notemos isso.

Destacamos que, neste estudo, observa-se a força de atrito tanto atuar como força dissipativa (o que sempre é verdade) como, também, *força motora*, pois o atrito é responsável pela conversão da energia cinética de rotação em energia cinética de translação. Logo, a bola, ao quicar no chão com certa rotação, ganha velocidade na direção do gol. O atrito, geralmente, é conhecido entre os estudantes e até na literatura meramente como força dissipativa. Apresentamos, aqui, um bom exemplo de uma característica do atrito pouco conhecida.

Agradecimentos

Os autores agradecem, pelo suporte parcial desta pesquisa, à UFPA e à FAPESPA. Também, somos gratos aos professores A. G. Martins e H. F. Mota, por boas

discussões e interesse neste trabalho. Os avaliadores deram importantes contribuições para a melhoria do texto e apresentação do trabalho.

Referências

¹ AGUIAR, C. E.; RUBINI, G. A aerodinâmica da bola de futebol. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 26, n. 4, p. 297-306, 2004.

² GOMES, M. A. F.; PARTELI, E. J. R. A Física nos esportes. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 23, n. 1, mar. 2001.

³ RAMPINELLI M.; FERRACIOLI, L. Estudo do fenômeno de colisões através da modelagem computacional quantitativa. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 23, n. 1, p. 93-122, abr. 2006.

⁴ SENA DOS ANJOS, A. J. As novas tecnologias e o uso dos recursos telemáticos na educação científica: a simulação computacional na educação em Física. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, Florianópolis, v. 25, n. 3, p. 569-600, dez. 2008.

⁵ CAMILETTI, G.; FERRACIOLI, L. A utilização da modelagem computacional quantitativa no aprendizado exploratório de Física. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 18, n. 2, p. 214-228, ago. 2001.

⁶ SYMON, K. R. **Mecânica**, Rio de Janeiro: Campus Editora, 1982, 5 ed.

⁷ HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, S. **Física 3**. 5 ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 2004.

⁸ SILBERT L. E. *et al.* Granular flow down an inclined plane: Bagnold scaling and rheology **Phys. Rev. E**, v. 64, 051302, 2001.

⁹ JOHNSON, K. L. **Contact Mechanics**, Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

¹⁰ Neste artigo adotamos a convenção usual, tanto de livros textos de ensino médio quanto de graduação, para os sentidos de rotação do disco: $\omega > 0$ rotação anti-horária e $\omega < 0$ rotação horária.

¹¹ CALDAS, H.; SALTIEL, E. Sentido das Forças de Atrito e Movimento – I. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 21, n. 3, set. 1999.

¹² CALDAS, H.; SALTIEL, E. Sentido das Forças de Atrito e Movimento – II uma análise dos livros utilizados no ensino superior brasileiro. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, São Paulo, v. 21, n. 4, dez. 1999.