

FRENAGEM DE UM PROJÉTIL EM UM MEIO FLUIDO: “QUAL SERIA A DISTÂNCIA, DENTRO DA ÁGUA, PERCORRIDA POR UM PROJÉTIL CALIBRE .50 COM MASSA DE 50 G E VELOCIDADE DE 850 M/S?”⁺*

Fernando Lang da Silveira
Instituto de Física – UFRGS
Porto Alegre – RS

Resumo

Desenvolve-se um modelo simples para a frenagem que um projétil com velocidade inicial de centenas de metros por segundo sofre na água. O modelo envolve conhecimentos de mecânica de fluidos e de matemática ao nível de alunos de Física Geral. Evidências empíricas que corroboram as previsões contraintuitivas do modelo são apresentadas.

Palavras-chave: *Mecânica de fluidos. Projétil. Frenagem pela água.*

Abstract

A simple model is developed, for the stopping that a projectile with initial speed of hundreds of meters per second undergoes in the water. The model involves knowledge of Fluid Mechanics and Mathematics, at the student level from General Physics

⁺ The stopping of a projectile in a fluid medium: “What is the distance traversed, into the water, by a .50 caliber bullet having a mass of 50 g and initial speed of 850 m/s?”

^{*} *Recebido: julho de 2012.
Aceito: outubro de 2012.*

course. Empirical evidences which corroborate the counterintuitive predictions of the model are presented.

Keywords: *Fluid Mechanics. Projectile. Stopping by water.*

I. Introdução

O objetivo deste artigo é desenvolver um modelo para a frenagem de um projétil em um meio fluido. Tratamos mais especificamente da frenagem de um projétil que se desloca inicialmente com velocidade de centenas de metro por segundo na água, objetivando estimar o seu *poder de penetração* no fluido. A motivação para o estudo se deu em função de uma pergunta, postada no sítio *Pergunte* do CREF-IFUFRGS, com o seguinte teor:

Qual seria a distância, dentro da água, percorrida por um projétil calibre .50 com massa de 50 g e velocidade de 850 m/s?

(<http://www.if.ufrgs.br/cref/?area=questions&id=290>). Acesso em: 12 jul. 2012)

São apresentadas a seguir evidências empíricas que corroboram as previsões advindas do modelo proposto.

II. Modelo para a frenagem de um projétil em um fluido

Quando um corpo se movimenta em relação a um fluido, esse corpo sofre uma *força de arrasto viscoso* e uma *força de arrasto inercial (inertial drag force)*. O *número de Reynolds* (R_e) é um número adimensional, que estima a razão entre a *força de arrasto inercial* (proporcional ao quadrado da velocidade em relação ao fluido) e a *força de arrasto viscoso* (proporcional à velocidade em relação ao fluido)^[1], dado por

$$R_e = \frac{\rho \cdot v \cdot L}{\mu}, \quad (1)$$

onde v é a velocidade do corpo em relação ao fluido, L é a dimensão característica do corpo, ρ é a densidade do fluido e μ é o coeficiente de viscosidade do fluido.

A densidade da água a 20° C é $1,0 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ e o coeficiente de viscosidade é $1,0 \times 10^{-3} \text{ kg/m.s}$. A densidade do ar na mesma temperatura e na pressão de 1 atm é $1,2 \text{ kg/m}^3$ e o coeficiente de viscosidade é $2,0 \times 10^{-5} \text{ kg/m.s}$. A dimensão característica de projéteis de arma de fogo é 10^{-2} m e a velocidade é da ordem de

10² m/s. Portanto, o *número de Reynolds* resulta em 10⁶ para a água e 10⁵ para o ar, indicando que a *força de arrasto inercial* é várias ordens de grandeza maior do que a *força de arrasto viscoso* em ambos os fluidos. Mesmo que a velocidade do projétil se reduza em duas ordens de grandeza, ainda assim pode-se considerar que a resistência do fluido à qual é submetido o projétil é preponderantemente inercial.

A *força de arrasto inercial*^[2] sobre um corpo em um meio fluido tem sentido oposto ao da velocidade do corpo em relação ao fluido, sendo o seu módulo dado por

$$|F_{Arrasto}| = \frac{1}{2} C \cdot \rho \cdot A \cdot v^2, \quad (2)$$

onde C é um coeficiente adimensional que depende da forma do corpo¹ e A é a área da seção do corpo perpendicular à direção do movimento em relação ao fluido. Se o corpo é um projétil que tem forma cônica ou esférica, então o coeficiente C é aproximadamente 0,5.

O módulo da aceleração do projétil devida à *força de arrasto inercial* é, então,

$$|a| = \frac{|F_{Arrasto}|}{m_p} = \frac{\rho \cdot \pi \cdot D^2 \cdot v^2}{16 \cdot m_p}, \quad (3)$$

onde m_p é a massa do projétil e D é o diâmetro (calibre) do projétil.

A questão postada no sítio *Pergunte* se refere a uma arma poderosa, de grande calibre, possivelmente o fuzil M82, calibre .50² ou 13 mm, cujo projétil tem massa de 50 g, sendo disparado a 850 m/s (<http://en.wikipedia.org/wiki/Barrett_M82>. Acesso em: 18 jul. 2012). Um exemplo de um projétil com pequeno calibre, .177 ou 4,5 mm, é o da pistola de ar comprimido GAMO P-800 que tem massa de apenas 0,5 g, sendo disparado com velocidade de 105 m/s (<http://www.gamo.co.uk/p_800.htm> Acesso em: 18 jul. 12).

De acordo com a expressão (3), pode-se calcular a aceleração inicial na água para os projéteis de 13 mm e de 4,5 mm, encontrando-se, respectivamente, 4,8 x 10⁵ m/s² e 8,8 x 10⁴ m/s². Vê-se, portanto, que a velocidade dos dois projéteis precisa se reduzir por cerca de duas ordens de grandeza para que a aceleração de-

¹ De fato, o coeficiente C depende também do *número de Reynolds*. Para valores altos, como os calculados para os projéteis de armas de fogo na água, ele é aproximadamente constante.

² Calibre .50 deve ser entendido como 0,50 polegadas, ou seja, 0,50 . 2,54 cm = 1,3 cm ou 13 mm.

vida à *força de arrasto inercial* na água seja comparável à aceleração da gravidade. Dessa forma, ao considerar a frenagem do projétil pela água, pode-se desprezar os efeitos da gravidade, e considerar que a sua aceleração seja apenas aquela devida à *força de arrasto inercial*.

Imaginemos agora que um projétil tenha ingressado na água com velocidade inicial v_0 . Como $a = dv/dt$, tem-se que a velocidade do projétil deve satisfazer o seguinte problema de valor inicial:

$$a = \frac{d}{dt}v = -k \cdot v^2, \quad v(0) = v_0, \quad (4)$$

onde, da equação (3),

$$k = \frac{\rho \cdot \pi D^2}{16 \cdot m_{\text{Projétil}}}. \quad (5)$$

A velocidade v do projétil em função do tempo t é, portanto,

$$v = \left[k \cdot t + v_0^{-1} \right]^{-1}, \quad (6)$$

de onde pode-se escrever, para o deslocamento ΔX em função do tempo, como segue:

$$\Delta X = \frac{\ln \left[k \cdot t \cdot v_0 + 1 \right]}{k}. \quad (7)$$

Consideremos agora que, após um intervalo de tempo t_α , a velocidade do projétil esteja reduzida por um *fator de atenuação* α ($0 < \alpha \leq 1$), isto é, tal que

$$v(t_\alpha) = \alpha \cdot v_0. \quad (8)$$

Substituindo essa condição em (6), obtém-se que

$$t_\alpha = \frac{1 - \alpha}{k \cdot v_0 \cdot \alpha}, \quad (9)$$

que, substituído no lugar de t em (7), fornece o deslocamento do projétil para que a sua velocidade inicial seja reduzida pelo fator α , como segue:

$$\Delta X_\alpha = \Delta X(t_\alpha) = -\frac{\ln \alpha}{k} \quad (10)$$

ou ainda

$$\alpha = e^{-k \cdot \Delta X_\alpha}. \quad (11)$$

Assim, fica demonstrado que o *fator de atenuação* da velocidade do projétil decai exponencialmente com o deslocamento através do fluido.

Decorre de (10) que, se a velocidade sofrer uma redução de uma ordem de grandeza ($\alpha = 0,1$), então seu deslocamento no fluido é

$$\Delta X_{0,1} = -\frac{\ln 0,1}{k} \cong \frac{2,30}{k} \quad (12)$$

e, para uma redução em duas ordens de grandeza na velocidade ($\alpha = 0,01$), o seu deslocamento vale

$$\Delta X_{0,01} = -\frac{\ln 0,01}{k} \cong \frac{4,61}{k}. \quad (13)$$

Nas próximas seções, apresentaremos algumas evidências empíricas a favor do modelo para a frenagem de projéteis em água.

III. Frenagem na água de um projétil da .380 ACP

Um projétil da .380 ACP – *Automatic Colt Pistol* – tem tipicamente a massa de 6,2 g e calibre 9 mm, sendo disparado a 290 m/s. A expressão (5) para o projétil na água resulta em $k = 2,57 \text{ m}^{-1}$. De acordo a expressão (12), encontra-se um deslocamento na água de 0,89 m para que a velocidade do projétil se reduza a 29 m/s. A expressão (13) resulta em um deslocamento de 1,8 m para que a velocidade seja quase nula (apenas 2,9 m/s).

A expressão (4) resulta em que o projétil, ao ingressar na água a 290 m/s, sofre uma aceleração cujo módulo é $2,2 \times 10^5 \text{ m/s}^2$, sendo, portanto, exercida sobre ele pelo fluido uma força de $1,3 \times 10^3 \text{ N}$ ou 130 kgf. Dividindo-se a força pela área da seção transversal do projétil resulta em uma pressão de cerca de 210 atm sobre a parte frontal do projétil. Se o projétil é do tipo *hollow-point bullet* (projétil de ponta oca que se “expande” ao atingir um alvo), ou *silver point* (ponteira de prata oca), ele será deformado, “expandido” devido a essa grande pressão exercida pela água.

O vídeo intitulado “*Expansão do projétil .380 ACP*” mostra um disparo realizado contra um alvo constituído por um saco de supermercado suspenso e cheio de água (<<http://www.youtube.com/watch?v=ihsxTDVW1Zs>>. Acesso em: 18 jul. 2012). O disparo foi realizado com munição contendo um projétil tipo *silver point* e, para grande surpresa do seu realizador (surpresa tão grande que o levou a postar o vídeo no *Youtube*), o projétil se esmagou, “expandiu”, ao encontrar a água. Uma parede de madeira por trás do alvo mostra um leve sinal do projétil que atingiu já esmagado e, portanto, com baixa velocidade. O comentário do autor do

vídeo é o seguinte: “*A expansão me surpreendeu. Não pensava que a Silver Point se deformaria tanto*”.

IV. Frenagem na água de um projétil do fuzil M82

O fuzil M82 é uma arma de longo alcance, calibre .50 ou 13 mm, disparando um projétil com massa de 50 g a cerca de 850 m/s. De acordo com a expressão (5), para a água, resulta $k = 0,71 \text{ m}^{-1}$. De acordo a expressão (12), encontra-se um deslocamento na água de 3,3 m para que a velocidade do projétil se reduza a 85 m/s. A expressão (13) resulta em um deslocamento de 6,5 m para que a velocidade seja quase nula (apenas 8,5 m/s).

Os *Mythbusters* testaram em uma piscina, com um fuzil .50, o poder de penetração do projétil na água (<<http://www.youtube.com/watch?v=yvSTuLjRm8>>. Acesso em: 12 jul. 2012) disparando-o contra uma alvo submerso. Surpreendentemente para os realizadores do teste, o projétil foi encontrado a alguns metros do ponto do disparo no fundo da piscina, fragmentado. A fragmentação do projétil é consequência de a força exercida sobre ele pela água ser enorme. A aceleração inicial do projétil que se movimenta a 850 m/s na água resulta pela expressão (3) em $4,8 \times 10^5 \text{ m/s}^2$ e, portanto, como sua massa é 50 g, em uma força de $2,4 \times 10^4 \text{ N}$ ou 2400 kgf; dividindo-se essa força pela área da seção transversal do projétil estima-se uma pressão de mais de 1800 atm exercida sobre a parte frontal do projétil. Ora, com tal pressão ocorre a “expansão” e fragmentação do projétil, diminuindo drasticamente a penetração na água.

V. Experimentos com projéteis da GAMO P-800

A pistola de ar comprimido GAMO P-800, calibre 4,5 mm, dispara projéteis de 0,5 g a 105 m/s. Diversos disparos foram realizados contra um alvo de *massa de modelar*, medindo-se a penetração no material. Esta resultou ser aproximadamente 4,5 cm.

A expressão (5) para tais projéteis na água resulta em $k = 9,8 \text{ m}^{-1}$. Portanto, pela expressão (12) encontra-se que, ao se deslocar 24 cm na água, a velocidade do projétil já se reduziu a 10% da velocidade inicial, sendo cerca de apenas 10 m/s. A energia cinética do projétil, então, resulta ser apenas 1% da energia cinética inicial.

A penetração no alvo de *massa de modelar* foi medida submergindo-se o alvo em água. Quando por cima do alvo havia uma lâmina de água com 18 cm de espessura, o projétil penetrou apenas 3 mm no alvo; nesta situação, resulta da expressão (11) que o valor da velocidade do projétil ao atingir o alvo é 19% do valor inicial (cerca de 20 m/s) e a sua energia cinética apenas 5% da energia cinética inicial. A redução drástica da penetração do projétil na *massa de modelar* (de 4,5 cm para 3 mm) está relacionada à grande perda de energia cinética acontecida ao longo do deslocamento de 18 cm através da água.

Quando o experimento foi repetido, tendo a lâmina de água 24 cm de espessura, o projétil tocou o alvo sem penetrá-lo perceptivelmente, consequência de que a energia cinética do projétil já era quase nula.

As observações dos testes experimentais, bem como as interpretações dos resultados expostos nos dois vídeos indicados nas seções anteriores, corroboram o modelo para a frenagem do projétil.

VI. Fator de atenuação para a energia cinética

Se a expressão (11) é elevada ao quadrado, fornece, então, o *fator de atenuação para a energia cinética* (α^2) do projétil. A Fig. 1 apresenta, para os três projéteis estudados nas seções anteriores, o gráfico de α^2 contra o deslocamento do projétil na água.

O gráfico da Fig. 1 demonstra que, em um deslocamento de apenas 1,0 m na água, os projéteis têm suas energias cinéticas reduzidas substancialmente. Mesmo o projétil .50 já reduziu sua energia cinética a cerca de 20% do valor inicial (caso não sofra deformações, pois, então, a atenuação será maior ainda), enquanto os outros dois projéteis já se encontram praticamente parados!

VII. Conclusão

De um modo geral, ao apresentar aos alunos das Engenharias e da Física, bem como aos colegas,³ as conclusões do modelo para a frenagem do projétil, eles manifestaram surpresa³ com os pequenos deslocamentos necessários para ocorrer o

³ Um colega assim se manifestou: *É mesmo incrível a freada. Aqui no Vale do Paraíba é costume usar a expressão “varada n’água”, pra falar em esforço inútil. Pelo jeito dá pra falar também em “disparada na água”...*

estancamento dos projéteis na água⁴. Tais resultados são contraintuitivos, pois nossa experiência é de que a água é “macia”, pouco resistente aos movimentos que usualmente observamos. O vídeo dos *Mythbusters* disponível na *web* constitui-se, segundo os relatos de alunos⁵, em um pequeno trecho de um programa no qual foi testada a resistência que a água oferece aos projéteis de diversas armas de fogo, tendo como motivação o inusitado e contraintuitivo do tema.

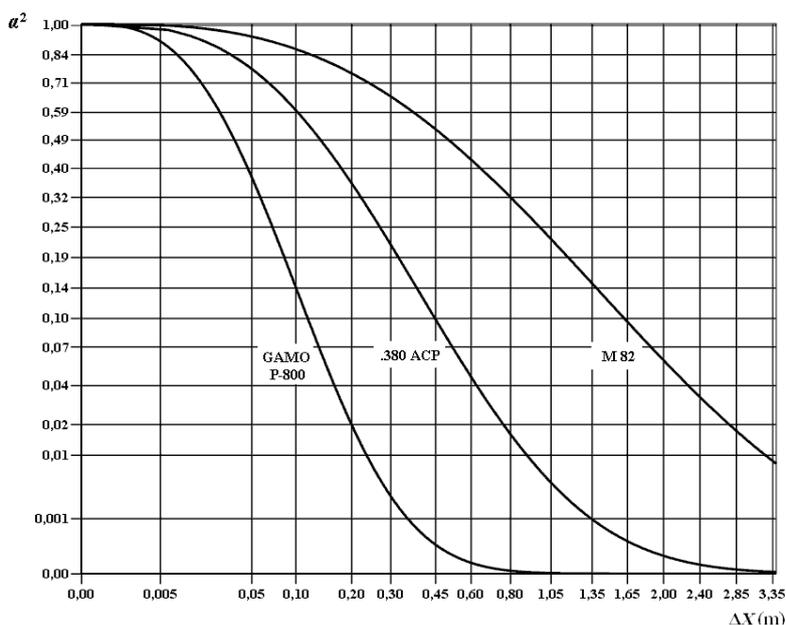


Fig. 1 – Fator de atenuação da energia cinética do projétil em função do deslocamento na água.

⁴ Eu mesmo fiquei surpreso com as pequenas distâncias de penetração na água e lembrei que, em 1974, estando em Rondônia no Projeto Rondon, ao visitar na selva um igarapé, com profundidade de alguns metros e águas cristalinas, fui incitado pelo guia a fazer disparos com um rifle Mossberg 142-A, calibre .22 ou 5,5 mm, contra os tucunaráes (peixes muito apreciados na região), com o objetivo de levar o jantar para casa. Não sabia, na época, que os peixes estavam protegidos, pois em menos de um metro de água o projétil .22 (se não sofrer deformação!) já teve sua energia cinética reduzida a 1% da energia inicial.

⁵ A indicação do vídeo foi realizada de maneira independente, por dois alunos após terem acesso aos cálculos apresentados na segunda seção deste artigo.

Acreditamos que a discussão desse assunto constitui-se em uma interessante e motivadora aplicação de conhecimentos de mecânica de fluidos, envolvendo uma matemática acessível a alunos em nível de Física Geral. Experimentos com pistolas e carabinas de ar comprimido podem ser facilmente realizados, servindo como teste empírico para o modelo desenvolvido. Uma pesquisa na *web*, possivelmente, indicará outros materiais com informações potencialmente interessantes para o aprofundamento do tema.

Agradecimento

Agradeço à profa. Maria Cristina Varriale, do IM-UFRGS, e aos árbitros do CBEF, pelas sugestões apresentadas, todas importantes para a versão final do trabalho.

Referências

[¹] BATCHELOR, G. K. **An introduction to fluid dynamics**. Cambridge: Cambridge University Press, 2002.

[²] AGUIAR, C.E.; RUBINI, G. A aerodinâmica da bola de futebol. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 26, p. 297, 2004.