

O experimento virtual da dupla fenda ao nível de ensino médio (Parte I): uma análise clássica do comportamento corpuscular e ondulatório, e o desenvolvimento de um software computacional⁺

*Danilo Cardoso Ferreira*¹

Instituto Federal do Paraná – IFPR

Jacarezinho – PR

*Moacir Pereira de Souza Filho*²

Universidade Estadual Paulista – UNESP

Presidente Prudente – SP

Resumo

Nosso trabalho analisa o experimento virtual da dupla fenda e está dividido em duas partes: a Parte I (o presente artigo) tratará da análise clássica do comportamento (corpuscular e ondulatório) e a Parte II (trabalho futuro) abordará o comportamento quântico da luz (fótons). Inicialmente, analisaremos uma metralhadora, que dispara balas (corpúsculos) em uma parede com dois orifícios separados por uma longa distância, tendo ao fundo um anteparo no qual será possível verificar a chegada dos projéteis. Neste caso, nada de estranho ocorre e a probabilidade de chegada de uma partícula ao passar pelos dois orifícios é a simples soma das probabilidades dos projéteis passar por cada orifício separadamente. Mostraremos isso numa análise de probabilidades simples ao nível do ensino médio. Em seguida, analisaremos o comportamento ondulatório (ondas de água, por exemplo) do experimento da dupla fenda. Para isso, inicialmente, faremos uma breve revisão do conceito de interferência (construtiva e destrutiva) com o auxílio de experimentos virtuais. A análise mostra que as somas das intensidades com os dois orifícios abertos difere de um fator de interferência. Finalmente, para finalizar esta parte do trabalho, vamos ilustrar

⁺ The virtual double-slit experiment to High School level (Part I): behavior classical analysis (with bullets and waves) and development of computational software

* *Recebido: outubro de 2015.
Aceito: março de 2016.*

¹ E-mail: danilo.ferreira@ifpr.edu.br

² E-mail: moacir@fct.unesp.br

este artigo com um software desenvolvido por um grupo de alunos para realização do experimento virtual da dupla fenda com corpúsculos.

Palavras-chave: *Experimento virtual; Experimento da dupla fenda; Ensino Médio.*

Abstract

This paper analyses the double-slit virtual experiment and it is composed of two parts: part I covers the classical theory (with bullets and waves), and part II covers the interference with electrons or photons. Firstly, we have analyzed the same experiment that shoots a stream of bullets. In front of the gun, we have a wall that has two holes in it, just big enough to let a bullet through. Beyond the wall, there is a backstop (say a thick wall of wood) which will absorb the bullets when they hit it. In this case, the probabilities just add together. The effect with both holes open is the sum of the effects with each holes open alone. We will show it for high school level. Next, we have analyzed a same experiment with water waves. The intensity observed when both holes are open is certainly not the sum of the intensity of the wave from hole 1 (which we find by measuring when hole 2 is blocked off) and the intensity of the waveform hole 2 (seen when hole 1 is blocked). Finally, we have shown a software developed by students about double-slit experiment with bullets.

Keywords: *Virtual experiment; Double-slit experiment; High School level.*

I. Introdução

Este trabalho completo (Partes I e II) se apoia na sequência proposta por Feynman e colaboradores (FEYNMAN *et. al.*, 1963, 2008), e amplamente utilizada na literatura (DICKE; WITTKKE, 1961; COHEN-TANNOUDJI *et. al.*, 1977; GASIOROWICZ, 1979; LOPES, 1992; MERBACHER, 1997; PESSOA Jr., 2003; NUSSENZVEIG, 1998; MAHON, 2011) para abordar o comportamento quântico de partículas atômicas e subatômicas através da análise do experimento da dupla fenda com partículas clássicas, ondas clássicas e fótons. Para apoiar didaticamente nossa proposta, utilizamos experimentos virtuais como objeto educacional digital para o ensino da dualidade onda-partícula no contexto do ensino médio, como sugerido no PNL D 2015 (BRASIL, 2014).

Este trabalho pretende mostrar que os fenômenos cotidianos representam uma experiência limitada da natureza, pois as partículas, objetos e ondas que observamos, se movem muito

devagar (em relação à velocidade da luz). Em escalas muito pequenas, como é o caso da Mecânica Quântica, o comportamento da natureza se distancia da nossa intuição e, os *elétrons* e *fótons* se comportam de maneira “misteriosa”, que parece ser algo intrínseco ao próprio micro-mundo.

Feynman *et. al.* (1963, 2008) sintetizam a importância do experimento da dupla fenda no seguinte trecho:

Selecionamos o fenômeno que é impossível, absolutamente impossível, de explicar em qualquer maneira tradicional e que tem a mecânica quântica em seu âmago. Na verdade, ele contém o único mistério. Não fazemos o mistério desaparecer ao “explicar” como ele funciona. Vamos simplesmente dizer como ele funciona. Ao dizer como ele atua, teremos falado sobre a peculiaridade básica de toda a mecânica quântica.

Inicialmente realizamos uma revisão bibliográfica do experimento da dupla fenda com partículas clássicas³. Nas pesquisas que empreendemos⁴, não encontramos experimentos virtuais da dupla fenda que utilizavam partículas. Sendo assim, esta seria a única parte do trabalho que ficaria sem um experimento virtual. Entretanto, no decorrer da aplicação deste trabalho, um grupo de estudantes do ensino médio desenvolveu um experimento virtual específico que justamente utiliza partículas clássicas, ou seja, o software desenvolvido por eles, utiliza uma metralhadora que dispara balas contra uma parede constituída por dois orifícios, tendo ao fundo uma outra parede, em que se pode detectar a chegada destes projéteis. Nesta primeira etapa, aproveitamos para fazer uma análise probabilística, mostrando que o resultado com os dois orifícios abertos, coincide com a soma das probabilidades dos orifícios abertos, individualmente.

Posteriormente, prosseguimos nossa pesquisa bibliográfica para o experimento com ondas clássicas. Diferentemente da escassez em experimentos virtuais com partículas, encontramos com facilidade simuladores com ondas. Só para se ter uma ideia, apenas no site do PHET encontramos oito⁵ experimentos virtuais relacionados às ondas. Nesta segunda etapa, desenvolvemos uma estratégia para que o aluno possa adquirir o conhecimento necessário à compreensão do conceito de interferência de ondas, pois acreditamos no potencial didático dos experimentos virtuais (FERREIRA; SOUZA FILHO; 2015). Não mostramos diretamente uma ima-

³ Nomenclatura utilizada por Nussenzveig (1998).

⁴ PHET. Disponível em: <http://phet.colorado.edu/pt_BR/>. Acesso em: 18 fev. /2015; General Physics Java Applets. Disponível em: <<http://surendranath.tripod.com/Applets.html>>. Acesso em: 18 fev. 2015; Física Animada. Disponível em: <<http://www.fisicanimada.net.br/>>. Acesso em: 18 fev. 2015; <http://www.cafequantico.com.br/>. Acesso em: 18 mar. 2016; Disponível em: <<http://repositorio.unesp.br/handle/11449/102017>>. Acesso em: 18 mar. 2016.

⁵ Os oito experimentos encontrados em https://phet.colorado.edu/pt_BR/simulations/category/physics/sound-and-waves (Visualizado em 22/09/2015) são: i) Modos normais; ii) Interferência de ondas; iii) – Pinças ópticas e aplicações; iv) Ondas de rádio e campos eletromagnéticos; v) Fourier: Criando ondas; vi) Som; vii) Onda em corda e viii) Micro-ondas.

gem de *interferência construtiva e destrutiva*. Pelo contrário, possibilitamos ao estudante desenvolver a referida imagem utilizando para isso uma simulação computacional. Assim, o experimento virtual, nesta etapa, pode ser empregado como recurso de apoio para desenvolver conceitos como *interferência construtiva e destrutiva*.

Passamos, então, para a análise do experimento da dupla fenda com ondas. Assim, uma frente de onda ao passar por uma parede contendo dois orifícios separados por uma longa distância⁶, formam duas frentes de ondas distintas. No anteparo colocado, logo a seguir, podemos detectar as interferências destas ondas, que apresentam regiões em que as ondas se reforçam mutuamente e regiões em que elas se cancelam, ou, em outras palavras, interferências construtivas e destrutivas, respectivamente. A análise nos mostra que a somatória das intensidades individuais (uma aberta e outra obstruída) difere ligeiramente da intensidade quando as duas fendas estão abertas, de um fator de interferência. Demonstramos matematicamente e estatisticamente, de maneira simplificada, o que acabamos de explicitar.

Para encerrar esta primeira parte do artigo, apresentamos um software desenvolvido por um grupo de alunos do ensino médio que nos permitiu trabalhar com o experimento clássico da dupla fenda com corpúsculos. Apesar de considerarmos que o aspecto visual do aplicativo possa ser melhorado com a ajuda de um designer gráfico, ele nos permite simular e compreender as regiões prováveis em que os projéteis atingirão o anteparo, nas diversas situações.

II. O Experimento da Dupla Fenda com Partículas

O primeiro arranjo experimental é o da dupla fenda com partículas, mostrado na Fig. 1, e que é descrito por Feynman *et. al.* (1963; 2008), da seguinte forma:

Temos uma metralhadora que atira uma sequência de projéteis. Não é uma boa metralhadora, pois atira os projéteis em uma varredura de ângulo muito amplo, como mostrado na figura⁷. Na frente da metralhadora existe uma parede (feita com uma placa blindada) que tem dois orifícios que são suficientemente grandes para deixar passar um projétil. Após a parede existe um anteparo (digamos uma parede grossa de madeira) que vai “absorver” os projéteis que o atingirem. Na frente da parede

⁶ A longa distância entre as fendas serve para produzir duas difrações na mesma onda, uma na fenda 1 e outra na fenda 2. Estas ondas possuem todas as características físicas idênticas, como frequência, intensidade, energia e comprimento de onda. Quando as duas ondas difratadas se encontram (após passar pelas fendas) elas se interferem. Mas esta interferência deve ocorrer perto do absorvedor que mostrará a figura de interferência e isto ocorre devido a longa distância entre as fendas. No caso da luz proveniente de uma fonte que incide num anteparo contendo duas fendas com larguras da ordem de $1\ \mu\text{m}$, as distâncias d entre as fendas devem estar separadas por dezenas ou centenas de μm . Ainda para poder visualizar a figura de interferência, a distância entre o plano das fendas e a tela ou anteparo deverá ser muito maior do que a distância d entre as fendas (da ordem de metros), de modo que as linhas que saem de cada fenda sejam praticamente paralelas ao atingirem um determinado ponto P no anteparo. Para mais detalhes, o leitor pode consultar Young e Freedman (2009, p. 88).

⁷ Ver Fig. 1.

temos um objeto que vamos chamar de um “detector” de projéteis, que poderia ser uma caixa de areia.

É necessário destacar as seguintes condições idealizadas para a realização adequada do experimento: i) As balas são indestrutíveis, ou seja, sempre chegam ao detector⁸ inteiras e nunca uma fração de projétil; ii) Todos os projéteis têm a mesma velocidade e a mesma energia; iii) A metralhadora produz uma rajada de disparos lenta, de tal forma que seja possível, a cada disparo, verificar se chegou ao detector um projétil, ou não, devido ao fato do projétil ter seu movimento bloqueado na parede blindada. Estas três considerações nos permitem constatar que nunca chegará, por exemplo, dois projéteis ao mesmo tempo na caixa de areia e, quando chega algo no detector, tem que ser uma bala inteira, ou seja, nunca encontraremos na caixa de areia, pedaços de chumbo de um projétil. Esta afirmação pode parecer simples e desnecessária. Entretanto, quando formos utilizar a luz no experimento da dupla fenda, será necessário revisar e contrastar estas assertivas com os resultados encontrados entre fótons e projéteis de uma metralhadora.

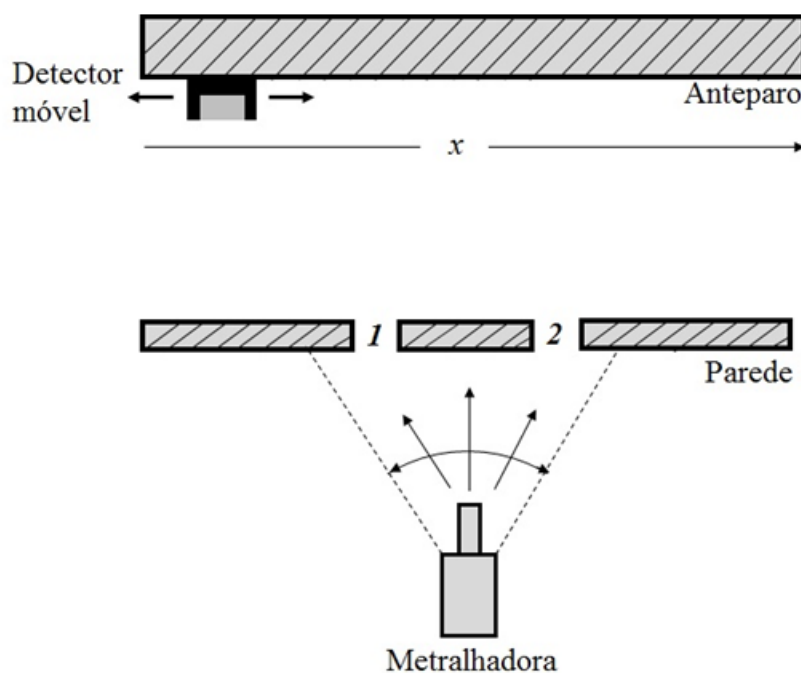


Fig. 1 – Experimento da dupla fenda proposto por Feynman e colaboradores usando projéteis (secção transversal).

O detector de projéteis se comporta como uma caixa de areia, que pode se mover de um lado a outro ao longo da direção x representada na Figura 1. A função da caixa de areia é parar o projétil e detectar em quais locais no anteparo, ao longo da direção x , chegam mais balas, isto é, a função do detector é medir a probabilidade de chegada de um projétil em função

⁸ O detector móvel pode ser uma caixa de areia que pode se mover no eixo x .

da posição x . Sendo assim, por mais que o experimento apresente uma construção clássica, e seja avaliado de tal forma, o conceito de probabilidade começa a ser inserido nesta etapa. Desta forma, Feynman *et. al.* (1963, 2008) enfatizam a importância da probabilidade:

Primeiro, você deve perceber que devemos falar de probabilidade, porque não podemos definitivamente dizer aonde um determinado projétil irá. Um projétil que atinja um orifício e por acaso acerte sua beirada pode ser refletido e ir parar em algum lugar qualquer. Por “probabilidade” queremos dizer a chance que um projétil tem de chegar no detector e que podemos medir e contar o número que chega num certo intervalo de tempo como uma fração do número total que atinge o anteparo durante esse mesmo tempo. Ou, se assumimos que a metralhadora atira com uma taxa uniforme durante a medição, então a probabilidade que queremos é apenas proporcional ao número de projéteis que chega no medidor num certo intervalo de tempo padrão.

Levando em consideração as três condições idealizadas e o aparato da Fig. 1, pode-se perguntar, depois de um período de tempo da realização do experimento, qual a probabilidade em função da distância x de um projétil, que passou pelas fendas, chegar no anteparo (Fig. 2a) quando: i) a fenda 2 está fechada e a fenda 1 está aberta? (Fig. 2b) ii) a fenda 1 está fechada e a fenda 2 está aberta? (Fig. 2c) e iii) as duas fendas estão abertas? (Fig. 2d). A resposta aparece na Fig. 2, que ilustra as possibilidades descritas anteriormente:

O triângulo AOB revela a região com maior densidade de projéteis que atravessa a fenda 1 e chega no anteparo sobre o segmento AB. Conseqüentemente, a região contida no segmento AB possui maior probabilidade de chegada de projéteis. Conforme a caixa de areia se move sobre o eixo x , durante a realização do experimento, percebe-se que poucos projéteis que atravessaram a fenda 1 foram encontrados na extremidade oposta e distante do segmento AB. Isto se deve ao fato de existir uma pequena probabilidade das balas ricochetear na fenda 1 e, conseqüentemente, serem encontradas em qualquer ponto do eixo x . Contudo, a probabilidade de encontrar projéteis fora da região compreendida pelo segmento AB diminui exponencialmente, ou seja, temos mais dificuldades de encontrar projéteis na medida em que nos afastamos do segmento AB, devido ao fato destes eventos serem esporádicos⁹. Após esta análise, podemos intuir o gráfico de probabilidade P_I que é uma curva com seu máximo na projeção da ponta da metralhadora até o anteparo passando pela fenda 1 na parede, ou seja, segmento AB.

⁹ As linhas tracejadas que partem do ponto A em direção ao gráfico b da figura 2 e as linhas que partem do ponto B em direção ao mesmo gráfico, nos permitem inferir a região de maior probabilidade na chegada dos projéteis. O mesmo vale para as linhas tracejadas que partem do ponto C em direção ao gráfico c da figura 2 e do ponto D em direção ao mesmo gráfico. Conseqüentemente, o gráfico d é uma sobreposição do gráfico b e c.

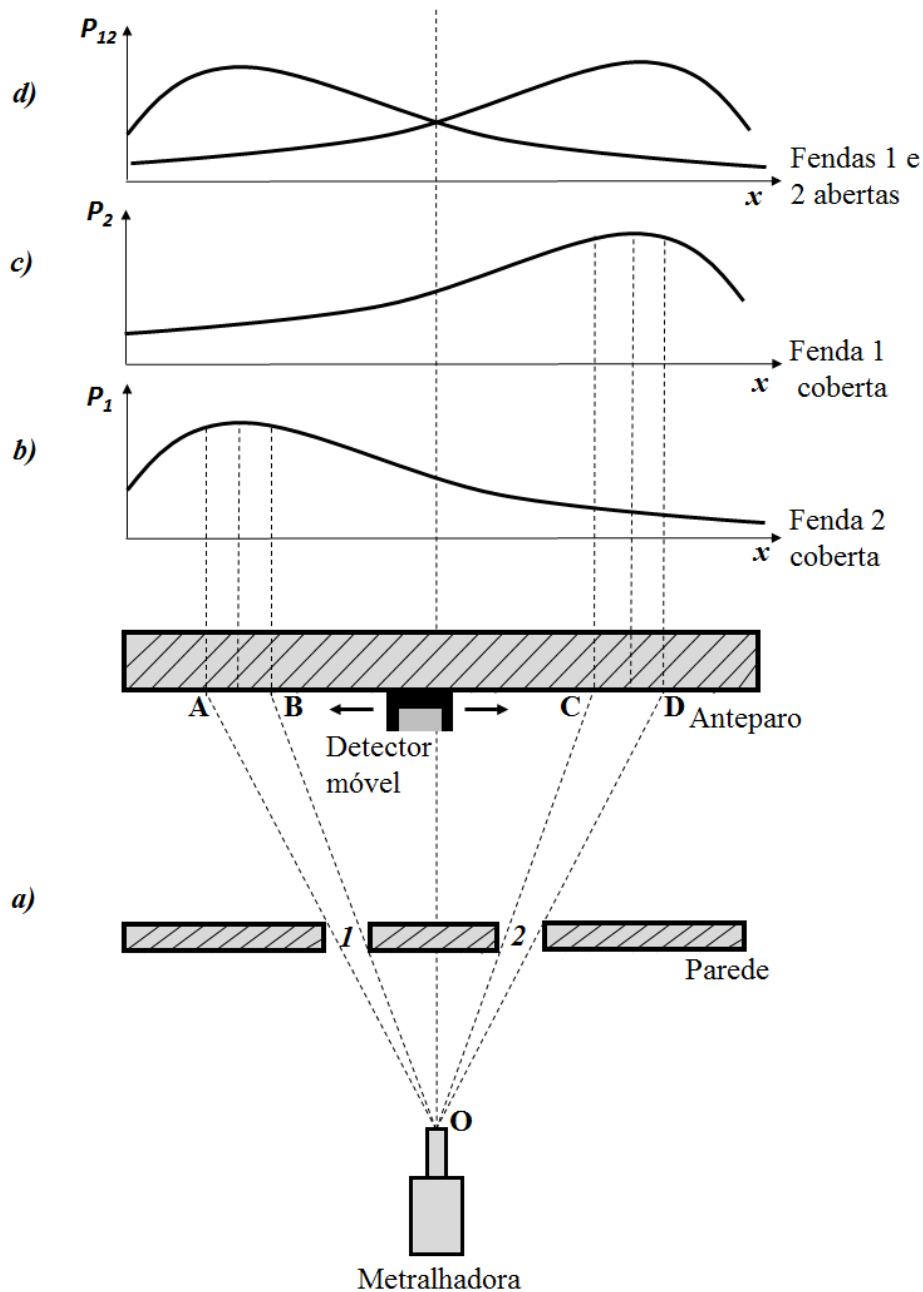


Fig. 2 – Experimento da dupla fenda com partículas¹⁰.

Quando a fenda 1 é fechada e a fenda 2 é aberta, a análise é semelhante a que acabamos de realizar para encontrar o resultado para a probabilidade P_2 . O resultado na Fig. 2c, mostra o gráfico de probabilidade P_2 que é simétrico a curva P_1 mas, com seu máximo na linha reta entre a metralhadora e o orifício 2, isto é, o segmento CD. O triângulo COD mostra a região na qual

¹⁰ Mostra: a) o aparato experimental; b) a probabilidade $P_1(x)$ quando a fenda 1 está aberta e a fenda 2 está fechada; c) a probabilidade $P_2(x)$ quando a fenda 1 está fechada e a fenda 2 está aberta; d) a probabilidade $P_{12}(x)$ quando a fenda 1 e a fenda 2 estão abertas.

há maior densidade de projéteis, que atravessam a fenda 2 e chegam no anteparo sobre o segmento CD, quando a fenda 1 está fechada.

Quando as duas fendas estão abertas, temos o gráfico de P_{12} , mostrado na Fig. 2d, que é a combinação das curvas P_1 e P_2 . Na literatura, normalmente (FEYNMAN *et. al.*, 1963, 2008; LOPES, 1992) este resultado é ampliado como na Fig. 3 devido às finalidades didáticas que residem na demonstração de que:

$$P_{12}(x) = P_1(x) + P_2(x) \quad (1)$$

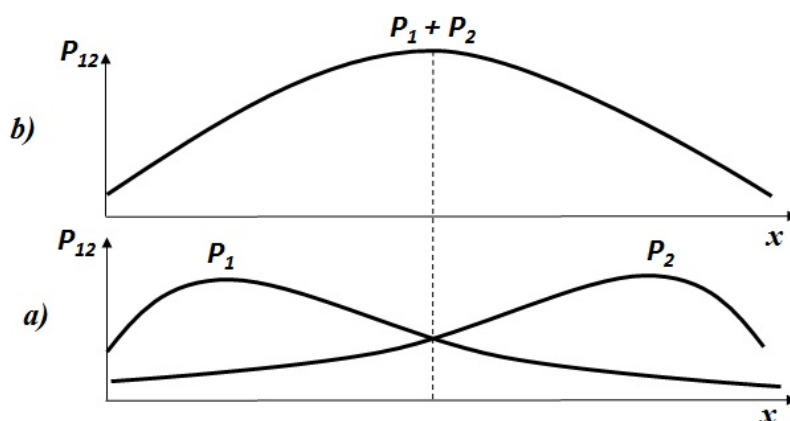


Fig. 3 – Probabilidades com as duas fendas abertas. a) probabilidades P_1 e P_2 separadamente. b) a soma de $P_1 + P_2$.

O resultado na expressão 1 mostra que a combinação das curvas P_1 e P_2 significa a simples soma das probabilidades para cada orifício aberto separadamente. Caso o objetivo fosse encontrar o resultado mostrado na expressão 1, sem necessidade de conhecer os gráficos de P_1 e P_2 , poderíamos realizar a seguinte análise: como as balas atravessam a fenda 1 (que denominaremos *evento A*) ou atravessam a fenda 2 (que denominaremos *evento B*), segundo o teorema da probabilidade da união de dois eventos (IEZZI e HAZZAN, 1985; LIMA *et. al.*, 2006) mutuamente excludentes $A \cap B = \emptyset$, isto é, os eventos A e B não ocorrem simultaneamente¹¹ temos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \quad (2)$$

O resultado na expressão 2 pode ser entendido da seguinte forma: se dois eventos A e B são mutuamente excludentes, isso significa que não existe a probabilidade deles ocorrerem ao mesmo tempo (é impossível que um único projétil atravessasse as fendas 1 e 2 ao mesmo tempo. Como a metralhadora é lenta, apenas uma bala é disparada por vez). Sendo assim, a intersecção entre os eventos A e B nunca pode ocorrer, isto é, $A \cap B = \emptyset$. Como ocorre apenas o evento A (atravessar a fenda 1) ou o evento B (atravessar a fenda 2), simbolicamente, podemos escrever

¹¹ O termo simultaneidade usado neste contexto refere-se a teoria de probabilidades e restringe-se apenas a dois eventos ocorrendo ao mesmo tempo. Diferentemente do princípio da simultaneidade da relatividade especial.

$P(A \cup B)$. Esta probabilidade pode ser rescrita como a probabilidade de ocorrer o evento A , mas não ocorrer o evento B , $P(A - B)$, ou, ocorrer o evento B :

$$P(A \cup B) = P[(A - B) \cup P(B)] \quad (3)$$

Como $A - B$ e B são mutuamente excludentes, podemos separar numa soma de probabilidades:

$$P(A \cup B) = P(A - B) + P(B) \quad (4)$$

A probabilidade $A - B$ pode ser reescrita como a probabilidade de ocorrer apenas o evento A , $P(A)$, menos a probabilidade de ocorrer o evento A simultaneamente ao evento B , ou seja, $P(A \cap B)$, desta forma:

$$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) \quad (5)$$

Substituindo a expressão (5) na expressão (4) e rearranjando os termos, teremos:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (6)$$

Entretanto, a probabilidade $P(A \cap B) = 0$, o que faz a expressão (6) se reduzir a expressão (2), $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, que substituindo as letras que representam os eventos, pelo número que representa a fenda a qual o projétil atravessou, isto é, fazendo $P(A) = P_1(x)$, $P(B) = P_2(x)$ e $P(A \cup B) = P_{12}(x)$ o resultado se reduz a expressão (1) encontrada quando intuímos os gráficos de probabilidade.

III. Interferências construtivas e destrutivas com auxílio de experimentos virtuais

Nesta seção vamos expor a superposição de ondas e as condições de interferência construtiva e destrutiva. Neste momento, usamos o primeiro experimento virtual denominado *Onda em Corda* disponível no sítio eletrônico do PHET¹² para mostrar visualmente de forma dinâmica, o benefício que o uso da atividade experimental simulada pode proporcionar ao aprendizado (FERREIRA; SOUZA FILHO, 2015), quando tratamos da superposição de ondas em uma corda. Em seguida mostramos o experimento da dupla fenda com ondas, descrito por Feynman *et. al.* (1963; 2008), e nossa proposta de como os alunos podem construir uma imagem de interferência.

Inicialmente, discutimos a interferência de ondas unidimensionais. De forma simplificada, Calçada e Sampaio (2001) definem:

Quando duas (ou mais) ondas atingem simultaneamente um dado ponto de um meio no qual se propagam, esse ponto sofre um efeito resultante da “soma” dos efeitos que cada onda produziria isoladamente no ponto. A esse fenômeno dá-se o nome de interferência. A interferência é um fenômeno localizado, ficando restrito ao local onde ocorre a superposição das ondas. Vale o denominado princípio da independência das

¹² PHET, disponível em: <http://phet.colorado.edu/pt_BR/>. Acesso em: 18 fev. 2015.

ondas: nos demais pontos do meio em que não há superposição, os efeitos produzidos por uma onda ocorrem como se a outra não existisse.

Para mostrar a interferência unidimensional de ondas, utilizamos o experimento virtual denominado *Onda em Corda* (ver Fig. 4a). Quando apresentado o experimento virtual, podemos solicitar aos alunos que explorem todos os seus recursos. No caso específico deste aplicativo, ele se inicia com uma dica de uso “*Agite a Chave Inglesa!*”. Aparece, neste momento, as primeiras vantagens do experimento virtual: ele não quebra, é rápido, não consome material e pode ser reiniciado a qualquer momento do início, ou de onde parou (FERREIRA; SOUZA FILHO, 2015).

Por estabelecer as condições ideais, entendemos: diminuir o *amortecimento* a um valor nulo no botão amortecimento do aplicativo. Provocando um pulso, na função *pulse*, temos três condições que poderão provocar ou não o retorno do pulso: i) Extremidade Fixa; ii) Extremidade Solta; e iii) Infinita. As duas primeiras possibilidades retornam o pulso para sua origem com a seguinte distinção: na extremidade fixa, o pulso retorna invertido devido à colisão com a parede. Já na extremidade solta, o pulso retorna com a mesma orientação que foi gerado. A terceira opção, o pulso não retorna por não haver nenhum meio refletor.

A primeira situação que pretendemos provocar é uma *interferência construtiva*. Para tanto, além de reduzirmos o amortecimento a zero, alteramos o valor da amplitude para o valor máximo, isto é, 100. Escolhemos a extremidade solta e provocamos o primeiro pulso. Usamos a função *pare* para interromper o experimento e provocamos o segundo pulso, entretanto, com amplitude 50. Continuamos o experimento solicitando a função *sig*. A Fig. 4a mostra o resultado destas condições iniciais solicitadas no *Onda em Corda*.

Os seguintes dados foram coletados do simulador: $a_1 \approx 9\text{cm}$, e, $a_2 \approx 18\text{cm}$. Calçada e Sampaio (2001) afirmam que observaremos no momento da interferência a “soma” dos efeitos que cada onda produziria isoladamente. Portanto, espera-se que encontremos uma onda com amplitude de 27 cm, pois $a = a_1 + a_2 \approx 9\text{cm} + 18\text{cm} = 27\text{cm}$. Munidos destas informações podemos verificar o que acontece na superposição dos dois pulsos que aparecem Figura 4b. Aproximadamente, encontramos um valor próximo de 27 cm. Demonstrando a seguinte relação nas situações que ocorrem *interferência construtiva*: $a = a_1 + a_2$, onde a grandeza a é denominada *amplitude resultante*. Mostramos assim que, pode-se chegar a uma relação matemática entre as amplitudes, utilizando o recurso de atividade experimental simulada. A discussão para interferência destrutiva é similar ao que foi discutido para a interferência construtiva.

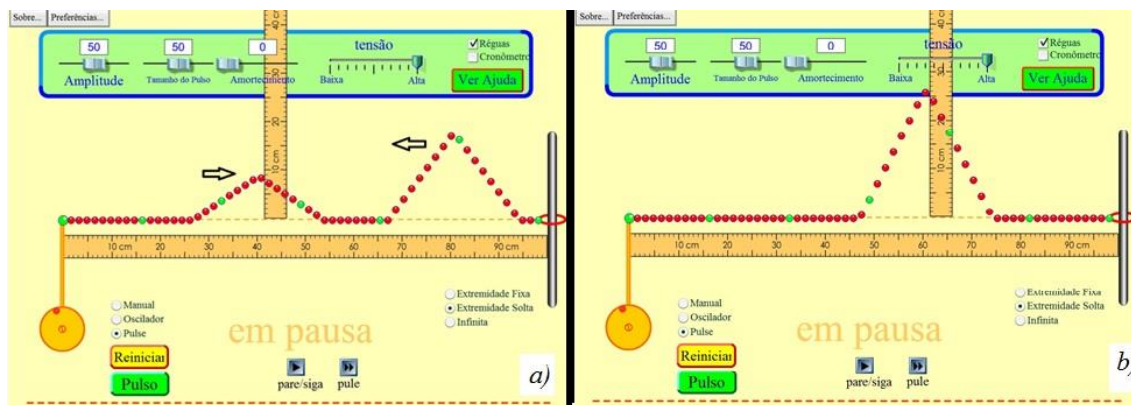


Fig. 4 – Experimento virtual Onda em corda¹³.

IV. Experimento da Dupla Fenda com Ondas

IV.1 Análise do experimento

Após o estudo da interferência construtiva e destrutiva, mostramos a descrição de Feynman *et. al.* (1963; 2008) para o experimento da dupla fenda com ondas, que é muito parecido com o experimento da dupla fenda com partículas, mas com as seguintes alterações: 1) trocamos a metralhadora por uma “fonte de ondas”; 2) projéteis são substituídos pelas ondas de água; 3) o anteparo agora é um absorvedor para que não haja reflexão das ondas e 4) o detector lê o quadrado da altura da onda real (amplitude da onda), ou seja, o aparelho realiza a leitura da intensidade da onda.

Diferentemente do aparato da dupla fenda com partículas, que medimos a probabilidade em função de x chegada de projéteis, quando usamos o experimento da dupla fenda com ondas, já não faz sentido medir a probabilidade de chegada da onda no absorvedor, pois esta probabilidade é 100%, devido ao fato de que a onda não é um ente físico localizado. A característica da onda difratada nas fendas que sofre variação é a amplitude com a qual a onda chega ao absorvedor, que varia conforme mudamos a posição x do detector. Além das características já destacadas, precisamos considerar que: i) a parede, no aparato do experimento da dupla fenda com ondas, não reflete a onda que nela chega e; ii) o diâmetro da fenda é da mesma ordem de grandeza que o comprimento de onda λ , da onda que é produzida pela fonte.

O aparato proposto por Feynman *et. al.* (1963; 2008) aparece na Fig. 5. Quando se fecha a fenda 2 e é deixado apenas a fenda 1 aberta, o trem de ondas que chega na parede sofre difração apenas das ondas que passam pela fenda 1, como mostrado na Fig. 5a. A intensidade máxima do trem de ondas que difrata na fenda 1 está sobre a linha que liga o centro da fenda 1 ao ponto L . Este ponto no anteparo recebe a onda com maior amplitude. Conforme o detector

¹³ a) Dois pulsos a_1 e a_2 são mostrados na figura com suas respectivas orientações (as setas de orientação do movimento do pulso e as representações das amplitudes por a_1 e a_2 são nossas). b) Experimento virtual Onda em corda. Superposição dos dois pulsos. O valor da amplitude resultante é aproximadamente 27 cm.

se move sobre o eixo x , percebe-se que a amplitude das ondas que chegam ao absorvedor diminui exponencialmente, à medida que o detector se afasta do ponto L . Este resultado aparece na Fig. 5b, que mostra a intensidade da onda em função de x .

Quando a fenda 2 está aberta e a fenda 1 está fechada, a análise é análoga a anterior. A resposta é mostrada na Fig. 5c, que é uma curva simétrica à curva da Fig. 5b, mas com o máximo de intensidade da onda difratada na fenda 2, sobre o ponto M do absorvedor, que corresponde a linha reta que sai do centro da fenda 2 e chega ao absorvedor. Se o detector variar sua posição x , as ondas diminuem suas intensidades conforme se afastam do ponto M .

IV.2 Construção gráfica das intensidades das ondas difratadas

Para visualizar a interferência das ondas quando as duas fendas estão abertas, pode-se utilizar um experimento virtual¹⁴. Entretanto, o resultado pode ser encontrado por meio de um simples exercício, que propomos na Fig. 6:

Supondo a fonte de ondas ideal, e que, as fendas 1 e 2 tem as mesmas dimensões e estão a mesma distância do centro da fonte de ondas, podemos afirmar que as ondas difratadas nas fendas 1 e 2 possuem amplitudes iguais. A Figura 6a mostra a onda que é produzida por uma fonte de ondas. Representamos cristas de onda por linhas contínuas e vales por linhas tracejadas. Na seção III deste trabalho foi possível mostrar, com auxílio do experimento virtual “*Onda em corda*”, a superposição de ondas e as interferências construtiva e destrutiva.

A parte de baixo Fig. 6b mostra as frentes de ondas esféricas provenientes de um experimento da dupla fenda. As linhas cheias representam as cristas das ondas, enquanto as linhas tracejadas representam os vales. Quando temos o encontro de duas cristas ou dois vales (representados pelas bolinhas preenchidas) temos a ocorrência da interferência construtiva, representando um ponto de máximo no gráfico acima da Figura 6b. Por outro lado, no encontro de uma crista e de um vale (representados pelas bolinhas vazias) temos, no gráfico citado, um ponto de mínimo. A intensidade diminui do centro para as extremidades devido ao princípio de Huygens¹⁵. O gráfico de intensidade das ondas difratadas no experimento da dupla fenda, quando as fendas 1 e 2 estão abertas, é denominado *gráfico de interferência*.

¹⁴ Por exemplo, o simulador interferência de ondas que pode ser encontrado no endereço eletrônico do PHET.

¹⁵ Cada ponto de uma frente de onda comporta-se como fonte de “pequenas” ondas secundárias, que se propagam em todas as direções, com velocidade igual à da onda principal. Após um intervalo de tempo Δt , a nova posição da frente de onda é a envoltória das frentes das ondas secundárias. Por “envoltória das frentes das ondas secundárias” entende-se a superfície que tangencia as frentes de ondas secundárias.

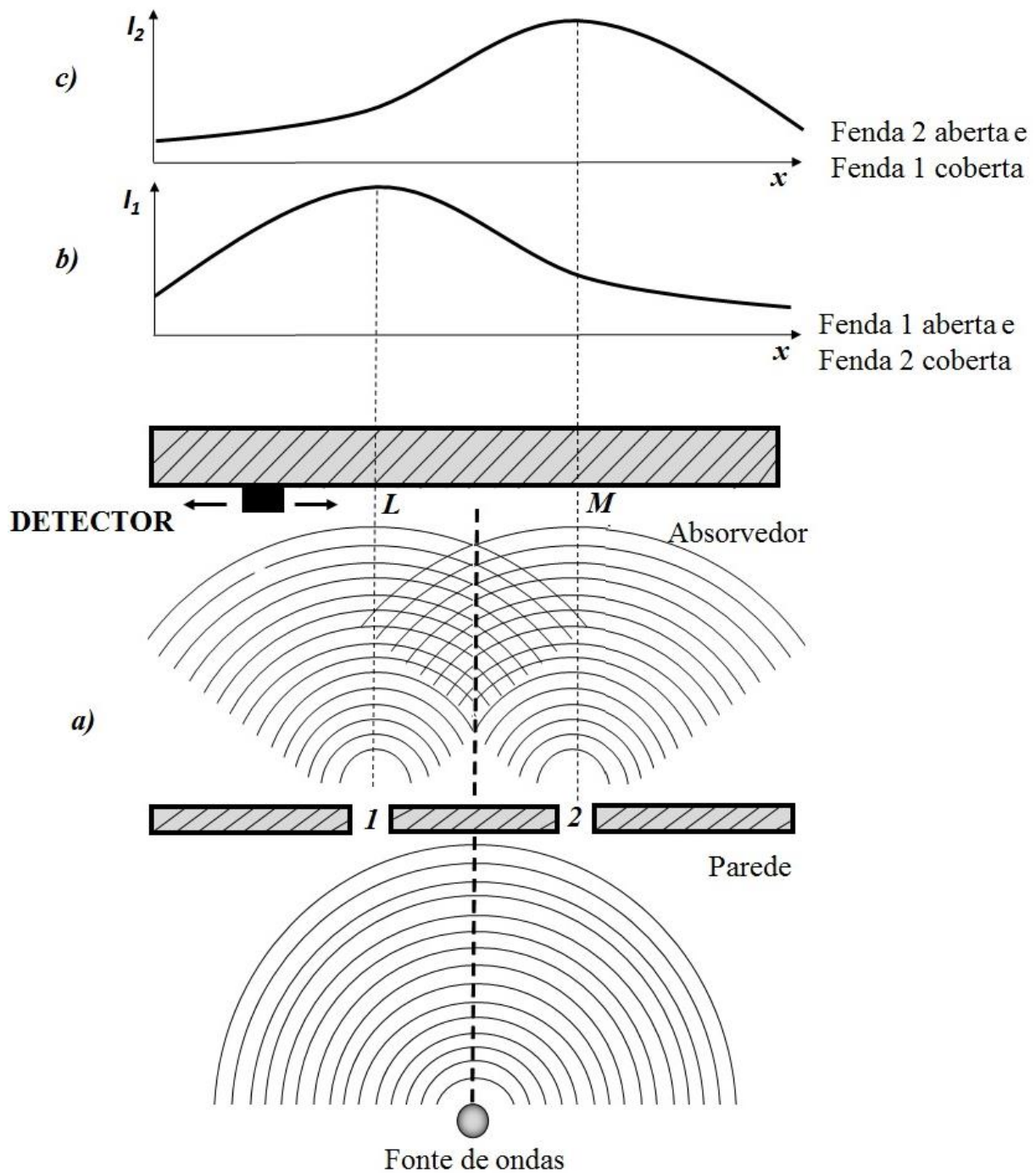


Fig. 5 – Experimento da dupla fenda com ondas¹⁶.

¹⁶ Mostra: a) o aparato experimental; b) a intensidade $I_1(x)$ quando a fenda 1 está aberta e a fenda 2 está fechada; c) a intensidade $I_2(x)$ quando a fenda 1 está fechada e a fenda 2 está aberta.

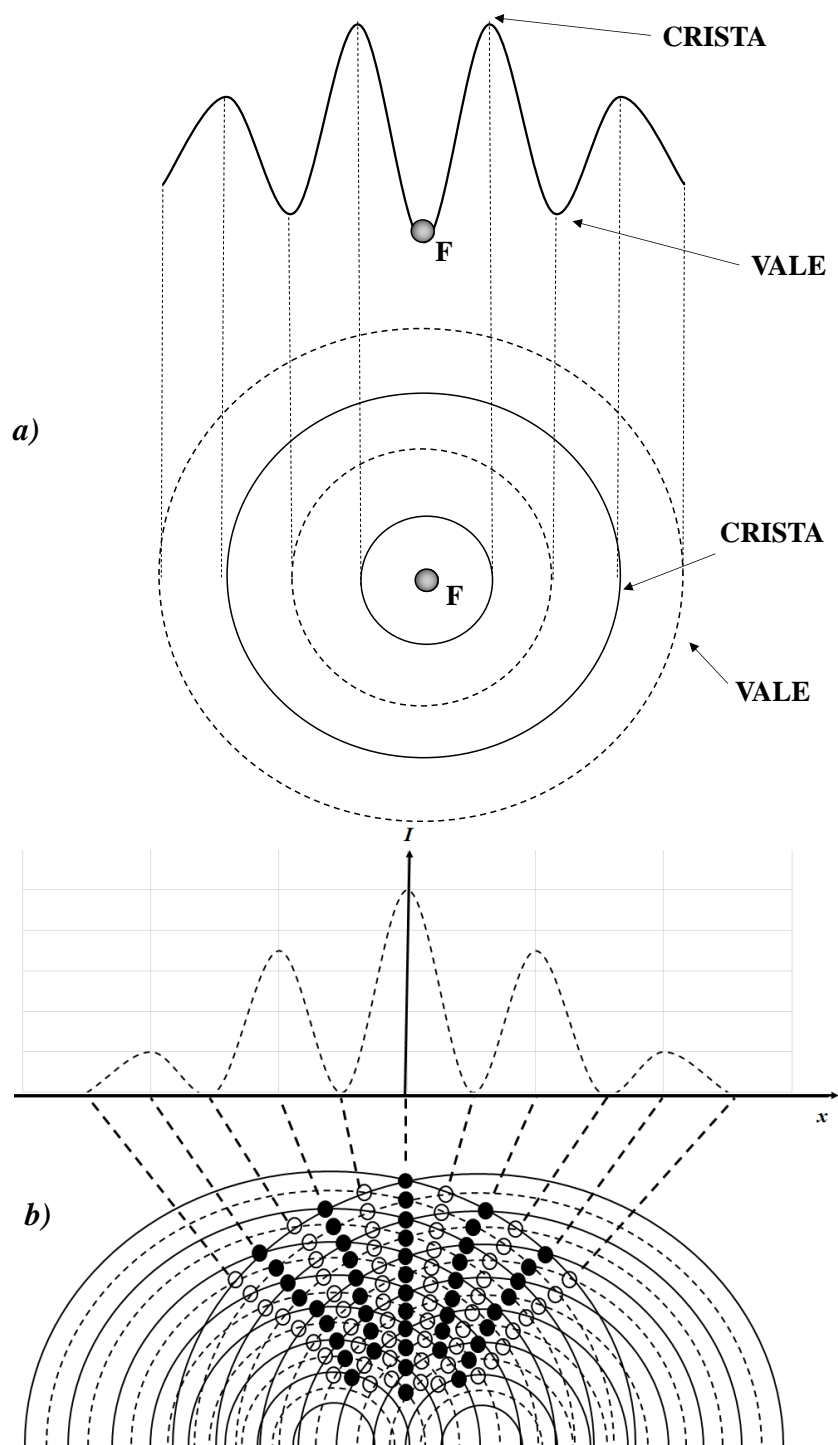


Fig. 6 – Interferência entre duas ondas difratadas nas fendas 1 e 2¹⁷.

¹⁷ a) Interferência bidimensional. Vista lateral na parte superior da figura e vista de cima na parte inferior. F é uma fonte de ondas igual a de Feynman et. al. (1963; 2008) (representamos cristas por linhas contínuas e vales por linhas tracejadas). b) I é a intensidade da onda. O valor mínimo de intensidade está sobre a ordenada x (representamos cristas por linhas contínuas e vales por linhas tracejadas).

IV.3 – Análise matemática das intensidades

A intensidade de uma onda é proporcional ao quadrado da amplitude, à velocidade da onda e ao quadrado da frequência. No caso do experimento da dupla fenda, as frequências das ondas difratadas nas fendas 1 e 2 são iguais (devido ao fato das frentes de onda que chegam nas fendas 1 e 2 terem sido excitadas pela mesma fonte de ondas e as fendas serem equidistantes e com mesmo diâmetro). Sendo assim, podemos dizer que $I(x) = |y(x, t)|^2$, onde $y(x, t)$ é uma equação de onda do tipo $y(x, t) = A \cos(kx - \omega t + \delta)$, onde: A é a amplitude da onda, k é o número de onda, ω é a frequência angular e δ é uma constante de fase. A equação de onda pode ser escrita em notação complexa tomando-se sua parte real:

$$y(x, t) = \text{Re}[Ae^{i(kx - \omega t + \delta)}] \quad (7)$$

lembrando as fórmulas de Euler¹⁸:

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \cos\theta + i \cdot \text{sen}\theta \\ e^{-i\theta} &= \cos\theta - i \cdot \text{sen}\theta \end{aligned} \quad (8)$$

fazendo $\beta = kx - \omega t + \delta$ e comparando com as fórmulas de Euler, podemos retornar na equação de onda:

$$y(x, t) = \text{Re}[Ae^{i\beta}] = \text{Re}[A \cdot (\cos\beta + i \cdot \text{sen}\beta)] = A \cdot \cos\beta = A \cos(kx - \omega t + \delta) \quad (9)$$

utilizando a seguinte simplificação,

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= kx + \delta_1 \\ \varphi_2 &= kx + \delta_2 \end{aligned} \quad (10)$$

substituindo a amplitude pela altura da onda e, considerando que frequência não muda, podemos reescrever a expressão (7) para as ondas difratadas na fenda 1, $y_1(x, t)$ e na fenda 2 $y_2(x, t)$:

$$\begin{aligned} y_1(x, t) &= \text{Re}[h_1 e^{i(\varphi_1 - \omega t)}] \\ y_2(x, t) &= \text{Re}[h_2 e^{i(\varphi_2 - \omega t)}] \end{aligned} \quad (11)$$

Retornando ao fato de que $I(x) = |y(x, t)|^2$ e lembrando que as duas fendas estão abertas, como foi mostrado na seção 3, quando duas ondas se encontram (superposição de ondas) podem ocorrer ou interferência construtiva ou interferência destrutiva. Para analisarmos esta situação, matematicamente, devemos somar algebricamente suas amplitudes, isto é, somar as expressões em (11):

$$I_{12}(x) = \left| |h_1| e^{i\varphi_1} e^{-i\omega t} + |h_2| e^{i\varphi_2} e^{-i\omega t} \right|^2 = \left| |h_1| e^{i\varphi_1} + |h_2| e^{i\varphi_2} \right|^2 \cdot \underbrace{|e^{-i\omega t}|^2}_1 \quad (12)$$

¹⁸ Tradicionalmente não se usa o número de Euler no ensino médio. Entretanto, esta abordagem não é tão incomum, como mostra Lima *et. al.* (2001).

Na expressão (12) separamos o argumento de cada número complexo e utilizamos o fato de que um número complexo multiplicado pelo seu complexo conjugado é um número real. Daí temos que: $|e^{-i\omega t}|^2 = e^{-i\omega t} e^{i\omega t} = e^0 = 1$. A expressão (12) fica:

$$\begin{aligned} I_{12}(x) &= (|h_1|e^{-i\varphi_1} + |h_2|e^{-i\varphi_2})(|h_1|e^{i\varphi_1} + |h_2|e^{i\varphi_2}) \\ &= |h_1|^2 \underbrace{e^{-i\varphi_1} e^{i\varphi_1}}_1 + |h_1||h_2|e^{-i\varphi_1} e^{i\varphi_2} + |h_1||h_2|e^{i\varphi_1} e^{-i\varphi_2} + |h_2|^2 \underbrace{e^{-i\varphi_2} e^{i\varphi_2}}_1 \\ &= |h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_1||h_2|e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} + |h_1||h_2|e^{-i(\varphi_2-\varphi_1)} \\ &= |h_1|^2 + |h_2|^2 + |h_1||h_2|[e^{i(\varphi_2-\varphi_1)} + e^{-i(\varphi_2-\varphi_1)}] \end{aligned} \quad (13)$$

Utilizando as formulas de Euler (8) no último membro da expressão 13, temos:

$$e^{i\delta} + e^{-i\delta} = \cos\delta + i \cdot \text{sen}\delta + \cos\delta - i \cdot \text{sen}\delta = 2\cos\delta \quad (14)$$

Com a substituição $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$, a expressão (13) fica:

$$I_{12}(x) = |h_1|^2 + |h_2|^2 + 2|h_1||h_2| \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \quad (15)$$

O termo $\delta = \varphi_2 - \varphi_1$ é denominado *diferença de fase* entre as ondas difratadas nas fendas 1 e 2. Podemos escrever a equação (15) em termos apenas de intensidades, recorrendo ao fato da proporcionalidade entre a intensidade e a amplitude ao quadrado:

$$\begin{aligned} I_1(x) &= |h_1|^2 \\ I_2(x) &= |h_2|^2 \end{aligned} \quad (16)$$

Substituindo (16) em (15) temos:

$$\begin{aligned} I_{12}(x) &= \underbrace{|h_1|^2}_{I_1} + \underbrace{|h_2|^2}_{I_2} + 2 \frac{|h_1||h_2|}{\sqrt{I_1 I_2}} \cos\delta \\ I_{12}(x) &= I_1(x) + I_2(x) + 2\sqrt{I_1(x)I_2(x)} \cos\delta \end{aligned} \quad (17)$$

Comparando o resultado na expressão (17) com o resultado da expressão (1), $P_{12}(x) = P_1(x) + P_2(x)$, podemos constatar que a diferença, entre realizar o experimento da dupla fenda com partículas clássicas (projéteis) e realizar o experimento da dupla fenda com ondas clássicas (ondas de água) é o termo de interferência

$$2\sqrt{I_1(x)I_2(x)} \cos\delta \quad (18)$$

Se o termo de interferência (18) não existisse, as equações (1) e (11) seriam similares. A única diferença seria que, para partículas, estaria sendo medida a probabilidade em função de x , enquanto para ondas, a intensidade em função de x .

A expressão (17) justifica a forma da curva da Fig. 6b. Como o termo trigonométrico pode variar de $[-1, 1]$ a intensidade $I_{12}(x)$ pode assumir valores nulos (interferência destrutiva) e valores máximos (interferência construtiva). O termo de interferência provoca as oscilações mostradas na Fig. 6b e, como consequência, temos uma curva muito diferente daquela mostrada para partículas Fig. 3b.

V. Experimento virtual da dupla fenda com projéteis (desenvolvido pelos alunos)

Um grupo de alunos de um curso integrado (ensino médio e informática), do Instituto Federal do Paraná, desenvolveu um software¹⁹ utilizando uma linguagem de programação que permite visualizar e entender o comportamento do experimento da dupla fenda com projéteis. A Fig. 7 representa a tela deste software:

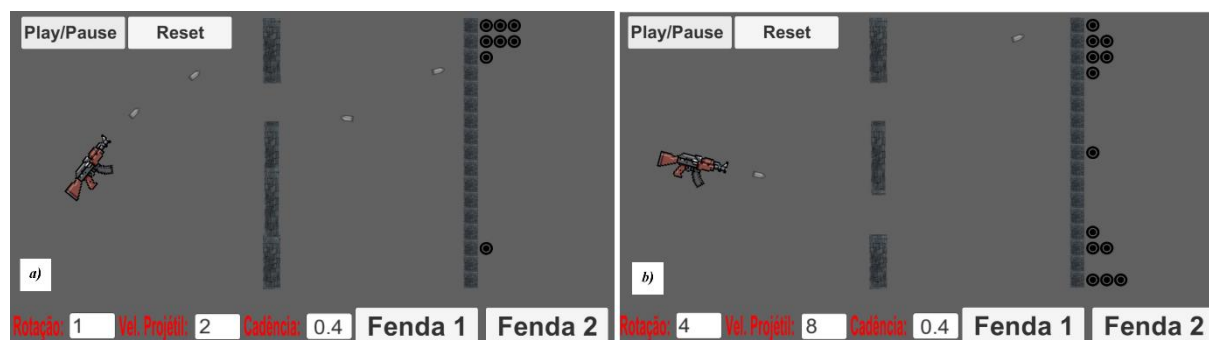


Fig. 7 – Experimento virtual da dupla fenda com partículas desenvolvido por um grupo de alunos do ensino médio. a) fenda 2 está coberta b) as duas fendas estão abertas.

Podemos observar que o experimento virtual possui cinco botões fixos e três funções variáveis. O botão “Play” inicia o experimento virtual com as condições e parâmetros iniciais que podem ser modificados, digitando os valores que usuário desejar. O botão “Pause” interrompe o experimento, mas não muda nenhuma condição inicial e nem o resultado já produzido. Apertando novamente o botão “Play” o experimento volta a funcionar do ponto em que parou. O botão “Reset” reinicia o experimento desde o início, com as condições iniciais *Rotação: 1*, *Vel. Projétil: 2*, *Cadência: 0,4* e as duas fendas abertas. O botão “Reset” apaga os resultados encontrados no lado direito do simulador.

As funções variáveis são: i) Rotação que pode variar de 0 até 25. Com uma rotação 0 a metralhadora não gira sobre o eixo e, conseqüentemente, dispara em linha reta. O alvo que os projéteis atingirão depende exclusivamente para onde a metralhadora está apontada. Por exemplo, se o experimento estava com rotação igual 2 e o botão “Pause” foi acionado quando a metralhadora estava posicionada aproximadamente na linha reta da fenda 1, todos os projéteis atravessarão a fenda 1 e atingirão o anteparo. Se o valor da rotação for mudado para 25 a metralhadora fica descontrolada, atirando em todas as direções; ii) A função “Velocidade do Pro-

¹⁹ O trabalho foi solicitado na turma da 4ª série do curso integrado do ensino médio com informática no primeiro semestre do ano de 2015. Esta turma possuía um total de 18 (dezoito) alunos. A sala foi dividida em 6 (seis) grupos de 3 (três) alunos. Propusemos como trabalho, que os alunos (em grupos) construíssem uma simulação referente ao experimento da dupla fenda com partículas, uma vez que os alunos possuíam habilidades com programação computacional. Um grupo de alunos desenvolveu um software (que merece destaque) capaz de realizar as funcionalidades discutidas nesta seção. Os demais grupos também desenvolveram outros simuladores, no entanto, não os abordaremos aqui.

jétil” pode variar de 0 a 25. Se escolhermos velocidade nula, nenhum projétil saia da metralhadora. Caso utilizemos o parâmetro da velocidade máxima, ou seja, o valor de 25, os projéteis são ejetados com uma velocidade muito alta e o acompanhamento da evolução do experimento fica prejudicado e, iii) a função cadência também varia de 0 a 25. Quanto menor for a cadência maior será a quantidade de projéteis disparados pela metralhadora. Conseqüentemente, a função cadência com valor nulo, ejeta inúmeros projéteis de uma única vez.

Podemos verificar que existem os botões “Fenda 1” e “Fenda 2”. Quando pressionamos o botão “Fenda 1”, a fenda superior é tampada ou coberta (ver Fig. 7a). Do mesmo modo, quando acionamos o botão “Fenda 2”, a fenda inferior é obstruída. Conforme as balas chegam no anteparo, aparece um ponto na linha reta imaginária que une a saída da metralhadora ao local do anteparo que foi atingido. Se mais de uma bala chegar no mesmo lugar do anteparo, aparecerá um ponto para cada bala (ver Fig. 7b). Por fim, as balas podem ricochetear na parede e voltar para trás ou, os projéteis podem colidir com a extremidade da fenda, ricochetear e chegar em algum lugar aleatório do anteparo.

As limitações deste simulador são: i) as curvas de probabilidades não ficam exatamente iguais ao esperado, ou seja, a resposta para o experimento é aproximada, fazendo-se necessário ressaltar a resposta na Fig. 2; ii) no parâmetro “cadência” nula não deveria sair nenhuma bala da metralhadora; iii) apenas a função rotação aparece qual valor máximo pode ser atribuído a grandeza e ; iv) não há unidades para a velocidade do projétil. Essas limitações poderiam ser contornadas se o grupo tivesse mais tempo para refazer a programação.

No entanto, o experimento é bastante versátil. É possível controlar a rotação da metralhadora, a velocidade dos projéteis, a cadência do fenômeno. Pode-se ainda cobrir a fenda 2 e deixar a fenda 1 aberta ou, realizar o contrário liberando a fenda 2 e cobrindo a fenda 1. Não há uma caixa de areia, mas a probabilidade é medida quando uma bala toca o anteparo, acumula um ponto preto como na Fig. 7. Nos lugares que há maior densidade de projéteis, há maior acúmulo de pontos pretos. Depois de um tempo, se uma das fendas estiverem abertas ou as duas estiverem abertas, formam-se as imagens de probabilidade da Fig. 2. Há também os efeitos de ricocheteio dos projéteis, produzindo alguns pontos aleatórios.

VI. Conclusão

Com o conteúdo exposto neste trabalho podemos realizar quatro considerações que distinguem os resultados encontrados com experimento da dupla fenda entre partículas (corpúsculos) clássicas e ondas clássicas:

(i) *Primeiro*: quando tratamos de corpúsculos devemos analisar a *probabilidade* em função de x . Se estamos realizando o experimento da dupla fenda com ondas, devemos analisar a *intensidade* em função do x .

(ii) *Segundo*: quando as duas fendas estão abertas, se trabalhamos com corpúsculos, estes chegam um a um no anteparo. Se trabalhamos com ondas, a onda chega em todo o anteparo em intensidades diferentes.

(iii) *Terceiro*: Quando uma das fendas está fechada, por exemplo a fenda 2, os resultados encontrados com partículas e ondas são análogos, mas não idênticos. O que distingue estes resultados são a localização da máxima probabilidade para partículas (Fig. 2b) quando comparados com a máxima intensidade das ondas (Fig. 5b). Além disso, se uma das fendas está fechada, quando estamos fazendo a experiência com partículas, a probabilidade de encontrar projéteis apenas pode diminuir (comparar as Fig. 3a e 3b). Quando uma das fendas está fechada, mas o experimento está sendo realizado com ondas, a intensidade pode tanto diminuir quanto aumentar (comparar Fig. 5b e 5c com a Fig. 6b).

(iv) *Quarto*: quando as duas fendas estão abertas, se estamos trabalhando com partículas teremos: $P_{12}(x) = P_1(x) + P_2(x)$. Mas quando estamos trabalhando com ondas, o resultado é: $I_{12}(x) = I_1(x) + I_2(x) + 2\sqrt{I_1(x)I_2(x)}\cos\delta$. Estes resultados são distintos pelo fator de interferência $2\sqrt{I_1(x)I_2(x)}$.

Esta primeira parte do trabalho foi motivadora, a ponto de um grupo de alunos do ensino médio com curso de informática desenvolver um software sobre o experimento da dupla fenda com partículas clássicas (projéteis).

Na segunda parte deste trabalho, mostraremos o experimento da dupla fenda com *fótons* e, discutiremos os resultados encontrados, mostrando algumas interpretações filosóficas ao nível do ensino médio.

Agradecimentos

Os autores agradecem à *Sociedade Brasileira de Física, SBF*, e à *Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, CAPES*, pela bolsa de Mestrado e por subsidiar o *Mestrado Nacional Profissional em Ensino de Física, MNPEF*.

Referências

BRASIL. **PNLD 2015 - Física**: Ensino Médio. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2014.

CALÇADA, C. S.; SAMPAIO, J. L. **Física Clássica**: Óptica e Ondas. 2. ed. São Paulo: Atual, 2001.

COHEN-TANNOUDJI C.; DIU, B.; LALOË, F. **Quantum Mechanics**. vol. I, John Wiley & Sons, New York, 1977. v. 1.

DICKE, R.H.; WITTKE, J.P. **Introduction to Quantum Mechanics**. Massachusetts: Addison-Wesley Company, Inc, 1961.

FERREIRA, D. C.; SOUZA FILHO, M. P. Uma proposta de metodologia do uso de experimentos virtuais no ensino de física. In: Congresso Brasileiro de Educação, São Paulo, FC/UNESP-Bauru, 2015. **Anais...**

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **The Feynman Lectures on Physics**. Massachusetts: Addison-Wesley Company, Inc., 1963. v. 1.

FEYNMAN, R. P.; LEIGHTON, R. B.; SANDS, M. **Lições de Física de Feynman: Mecânica Quântica**. Porto Alegre: Bookman, 2008. v. 3.

GASIOROWICZ, S. **Física Quântica**. Rio de Janeiro: Guanabara Dois, 1979.

IEZZI, G.; HAZZAN, S. **Fundamentos da matemática elementar: combinatória e probabilidade**. 5. ed. São Paulo: Atual, 1985.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2001. v. 1.

LIMA, E. L.; CARVALHO, P. C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A. C. **A matemática do ensino médio**. 6. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2006. v. 2.

LOPES, J. L. **Do átomo pré-socrático às partículas elementares: a estrutura quântica da matéria**, Rio de Janeiro: UFRJ, 1992.

MAHON, J. R. P. **Mecânica Quântica: desenvolvimento contemporâneo com aplicações**. Rio de Janeiro, LTC, 2011.

MERZBACHER, E. **Quantum Mechanics**. New York: John Wiley & Sons, 1997.

NUSSENZVEIG, H. M. **Física Básica: Ótica, Relatividade e Física Quântica**. São Paulo: Blucher, 1998. v. 4.

PESSOA Jr., O. **Conceitos de Física Quântica**. São Paulo: Livraria da Física, 2003. v. 1.

YOUNG, H. D.; FREEDMAN, R. A. **Física IV: Ótica e Física Moderna**. v. 4, 12. ed. São Paulo: Addison Wesley, 2009.