DOI: http://dx.doi.org/10.5007/2175-7941.2019v36n1p158

Os desenvolvimentos da Mecânica Analítica que culminaram na elaboração de $F = ma$[+*]

Camila Maria Sitko[1]
Rede Estadual de Educação Básica do Paraná
Faculdade Guairacá
Guarapuava – PR

Resumo

A lei de Newton e $F = ma$ são princípios diferentes. Cerca de sessenta anos de desenvolvimentos conceituais e matemáticos foram necessários para que a Segunda Lei do Movimento fosse elaborada, em 1752-1776, pelas mãos de Leonhard Euler. Neste trabalho, são discutidos os principais desses fatores adjacentes à construção dessa lei, sem os quais não seria possível Euler, e nenhum outro, obter a Segunda Lei do Movimento, como a conhecemos hoje. Será discutido o que estava sendo feito na mecânica no início do século XVIII e que contribuiu para que bases conceituais fossem elaboradas para que então fosse possível a emergência da Segunda Lei do Movimento como um princípio geral da mecânica, como a busca pela generalização de princípios, a introdução da mecânica analítica, com novas técnicas e ferramentais matemáticos, o estudo de determinados tipos de problemas, a unificação de conceitos e a elaboração de bases alternativas para a mecânica, como os princípios variacionais. Essas realizações contribuíram para que a lei proposta por Newton fosse aperfeiçoada e ampliada por Euler para uma classe muito maior de problemas.

Palavras-chave: *Mecânica Analítica; $F = ma$; Segunda Lei do Movimento; Leonhard Euler; História da Mecânica.*

[+] The developments of Analytical Mechanics which culminated on the elaboration of F = ma

[*] *Recebido: dezembro de 2018.*
Aceito: abril de 2019.

[1] E-mail: camilasitko@yahoo.com.br

Abstract

Newton's law and $F = ma$ are different principles. About sixty years of conceptual and mathematical developments were necessary for the Second Law of Motion could be elaborated, around 1752 to 1776, by Leonhard Euler. In this research, we discuss the main factors referring to the construction of this law, which made possible for Euler, and no other, to obtain the Second Law of Motion, as we know it today. We also discuss what was being done in mechanics at early eighteenth century and how it contributed for the elaboration of the conceptual bases, thus making possible the emergence of the Second Law of Motion as a general principle of mechanics, such as the search for generalization of principles, the introduction of analytical mechanics, with new techniques and mathematical tools, the study of certain problems, the unification of concepts and the elaboration of alternative bases for mechanics, like the variational principles. These achievements contributed so that Euler could refine and extend Newton's Law to much larger degree of problems.

Keywords: *Analytical Mechanics; $F = ma$; Second Law of Motion; Leonhard Euler; History of Mechanics.*

I. Introdução

A lei $F = ma$ não é a lei de Newton, conforme se mostra em mostra Sitko (2019), e também defendido por Truesdell (1975), Maltese (1992) entre outros. Esse princípio foi elaborado por Leonhard Euler, em 1752, e seus aperfeiçoamentos foram feitos até o ano de 1776. Entre a elaboração dos *Princípios Matemáticos de Filosofia Natural* (ou *Principia*) por Newton em 1687, e o novo princípio de Euler, no período 1752-1776, houve mais de sessenta anos de desenvolvimentos conceituais e matemáticos.

Nestes estudos são discutidos os principais fatores adjacentes à construção dessa lei, ou seja, os desenvolvimentos conceituais mencionados sem os quais não seria possível Euler, e algum outro, obter a segunda lei do movimento, como é conhecida hoje. Ao mesmo tempo deseja-se mostrar, a partir dos argumentos aqui apresentados, que de fato, $F = ma$ não poderia ter sido escrita por Newton devido à falta dos conceitos e generalizações que foram utilizados para a elaboração do novo Princípio Fundamental da Mecânica no século XVIII. Este trabalho é recorte de uma pesquisa bibliográfica de tese de doutorado, baseado nas delimitações de pesquisa em História da Ciência, de acordo com Martins (2005) no qual foram utilizadas fontes históricas primárias e secundárias.

II. Busca por generalização

A mecânica do início do século XVIII estava inflada de princípios, leis e suposições *ad hoc*[2], de forma que a cada novo problema definido, novas formas de resolução precisavam ser elaboradas. Nesse período pós-newtoniano foram então necessários desenvolvimentos teóricos e matemáticos, não apenas no sentido de simbolismo, mas de grandezas e entidades (TRUESDELL, 1975), e desenvolvimentos não experimentais (no sentido de testabilidade), a fim de se definir as quantidades físicas e suas relações matemáticas e funcionais[3], visando à elaboração de uma teoria geral. Os novos estudos surgiram na medida em que os teóricos se deparavam com cada vez mais dificuldades na resolução de problemas particulares, os quais não interessavam, pois era apenas o ponto de partida para generalizações corretas.

Daí surge a Mecânica Analítica[4], cujo objetivo então era a generalização de princípios, para que estes pudessem resolver o maior número de problemas possíveis[5]. Devido a essa busca por generalização, a mecânica analítica definitivamente não foi proposta a partir de experimentos, mas a partir de teorias[6]. Truesdell defende (1975) que não se pode chamar esses desenvolvimentos de matemática pura, pois a experiência guiava constantemente os raciocínios; é a chamada mecânica racional. Truesdell argumenta que a história da mecânica não é nem experimental nem filosófica, mas sim uma mecânica matemática.

Alguns dos princípios elaborados no século XVIII com esse fim foram: o Princípio do Trabalho Virtual de d'Alembert; o Princípio da Mínima Ação, proposto por Maupertuis e também por Euler, a fim de explicar o movimento de um ponto material numa região com presença de forças. Tal princípio utilizava o cálculo de variações[7] e os funcionais[8] como conceito fundamental, e serviu de base para o que hoje conhecemos como Mecânica Analítica[9].

Assim, após os desenvolvimentos de Johann Bernoulli, Maupertuis, d'Alembert e Euler, outros cientistas, como Cauchy, por exemplo, foram responsáveis por estabelecer os

---

[2] Hipóteses *ad hoc* são aquelas que explicam um pequeno número de fenômenos, ou, às vezes, apenas um. Para um maior aprofundamento, ver Silva, 2017.

[3] As relações entre as grandezas passaram a ser vistas como funções matemáticas umas das outras.

[4] O desenvolvimento da mecânica nesse período envolveu a mecânica de partículas pontuais com Newton, até a de corpos contínuos, com Euler e Lagrange.

[5] Neste texto, o uso do termo "mecânica analítica" se refere à mecânica produzida no século XVIII, que possui ferramentais específicos, cuja base é paralela à newtoniana. O termo geral "mecânica" se refere à mecânica como um todo, englobando todas as interpretações desta.

[6] Em alguns casos, existiram experimentos posteriores aos desdobramentos teóricos.

[7] O cálculo das variações foi criado por Euler, em 1744, em seu *Methodus inveniendi lineas curvas máxime minimive proprietate gaudentes*. É uma espécie de generalização do cálculo diferencial para mais dimensões. Enquanto o cálculo diferencial utiliza funções, o cálculo variacional utiliza funcionais.

[8] Funcionais seriam uma generalização de funções: enquanto uma função liga um conjunto de pontos do domínio a um conjunto de pontos da imagem, um funcional liga um conjunto de funções de domínio a um conjunto de pontos de imagem.

[9] Diferentemente da base galileana, equivalente a $a=dv/dt$, utilizada na mecânica de Newton.

conhecimentos que temos hoje em mecânica. É importante frisar que Euler foi uma importante figura, mas não a final no desenvolvimento da Mecânica; Lagrange, Hamilton, Jacobi, embasaram seus estudos não em princípios contidos nos *Principia,* mas nos princípios variacionais e nos demais estudos eulerianos[10]: Laplace introduziu a função potencial e Lagrange as famosas equações canônicas do movimento, assim como contribuiu fortemente para o cálculo das variações ao introduzir o uso de coordenadas generalizadas, o método da lagrangeana, combinando o princípio do trabalho virtual de d'Alembert, estendendo este a um sistema de partículas; enfim, inaugurou "*uma nova era onde a identificação de invariância na física matemática se tornou fundamental*" (MAUGIN, 2014) e, assim, praticamente concluindo o desenvolvimento dos princípios de mecânica ao longo do século XVIII.

Dessa forma, percebe-se que por mais de um século, a Mecânica Analítica não se ancorou em princípios newtonianos. Cerca de cem anos após a publicação dos *Principia*, em 1788, surge a *Mécanique Analytique*, de Lagrange, uma obra que sintetiza toda a Mecânica Analítica, trazendo resumos sobre estática, dinâmica, fluidos, finalizando os desenvolvimentos da mecânica como hoje a conhecemos[11].

Deve-se deixar claro que esta parte da Mecânica Analítica apresentada aqui, elaborada a partir de funcionais e de cálculo das variações não é uma extensão da mecânica elaborada por Newton, no que diz respeito às suas bases fundamentais: são dois métodos diferentes de se abordar um problema dinâmico, mas que levam a resultados equivalentes. O que interessa nesses desenvolvimentos que visavam à generalização, a este trabalho, é que os conceitos e ferramentas elaborados durante a criação da Mecânica Analítica, que era uma alternativa à mecânica newtoniana, foram utilizados para colocar a lei de Newton na forma diferencial e ampliar seu campo de atuação.

Assim, parece que a Mecânica Analítica é totalmente independente dos modelos geométricos de Newton e de sua análise de forças. Entretanto, a justificação dos princípios gerais depende de Newton. Para Panza (2002, p. 26) há uma tensão entre a necessidade de eliminação dos modelos geométricos e sua necessidade de invocá-los. Portanto, o nascimento da Mecânica Analítica carrega também essa história de tensão entre os "*independentes dependentes*".

---

[10] Lagrange utilizou o *Methodus* de Euler (1744) como base de sua mecânica, ao formular os multiplicadores de Lagrange, que seria uma poderosa ferramenta na resolução de vários tipos de problemas.

[11] Entretanto, as pesquisas em Mecânica Analítica não pararam por ali e Hamilton escreveu um trabalho baseado na revisão de Laplace da mecânica newtoniana. Neste, Hamilton enuncia um novo princípio de mínima ação, dessa vez minimizando a integral da diferença entre energia cinética e potencial. Assim, reproduziu os resultados de Euler e Lagrange, podendo resolver uma classe maior ainda de problemas. Após a publicação do material, sua obra foi aperfeiçoada por Jacob Jacobi, resultando no desenvolvimento do conhecido formalismo de Hamilton-Jacobi, utilizado como base para a fundação da Mecânica Quântica. O desenvolvimento da dinâmica do século XIX deveu-se a Jacobi e a Hamilton, entretanto, só foi mostrada a significância do trabalho deste último com o surgimento da física quântica e de partículas. Os trabalhos desses dois só tiveram importância após as formulações de Einstein e os estudos cosmológicos, assim como a descoberta da expansão do universo por Hubble.

Dessa forma, como as novas construções do século XVIII interferiram na maneira como a segunda lei de Newton é compreendida e utilizada, pode-se dizer que as duas mecânicas têm relação, entretanto, não são a mesma coisa. Eventualmente, durante o texto, haverá esse desconforto em entender se elas são complementares ou paralelas, e de fato, ora aparecerão como um caso ora como outro. Isso é inevitável, entretanto, não é o objetivo deste trabalho discutir a respeito dessa relação ambígua.

III. Da mecânica de Newton à Mecânica Analítica

A chamada Revolução Científica é considerada, por muitos, finalizada com a redação dos *Principia*, e que após Newton, somente melhoramentos matemáticos foram feitos. Este trabalho tem a posição de discordar totalmente dessa visão, uma vez que ainda faltavam interpretações físicas, explicações de fenômenos e aplicações em uma nova matemática, mais abrangente e prática que o método de Newton[12]. Se observarmos os estudos produzidos por Newton até os desenvolvimentos de Euler, a partir do advento da Mecânica Analítica, pode-se ver que há relações muito mais complexas do que apenas mudança de formalismo matemático: era necessário um significado mecânico explicativo de toda essa reformulação, a fim de entender como esta era usada, e, além disso, como já foi comentado, essa nova mecânica não é advinda dos princípios apresentados por Newton: Euler e Lagrange proveram suas próprias bases, a partir de princípios variacionais, assim como reconstruíram conceitos.

A mecânica newtoniana passou por uma transformação e reformulação. Para Pulte (2001), foi Euler quem realmente captou a essência da filosofia matemática. Embora não aceitasse conceitos como o de força de Newton, Euler buscava escrever uma axiomatização newtoniana e ao mesmo tempo analítica da mecânica. Não foi apenas o formalismo diferencial que trouxe a mecânica como a conhecemos, mas também mudanças conceituais na Física (HEPBURN, 2007); por exemplo, se um diferencial é tomado como uma mudança infinitesimal no comprimento de certo segmento de arco, a definição ainda é, como pensava Newton, geométrica. Já se o formalismo for outro, como o analítico de Euler, chega-se à segunda lei, $F = ma$.

Foi isso que ocorreu com as tentativas de colocar a mecânica newtoniana em outro formato, como as feitas por Varignon, Bernoulli e Hermann; mudaram o formalismo, mas a concepção permanecia a mesma. Em sua *Mechanica Analytica*, de 1736, Euler cita Varignon, Wolff, e Hermann que já haviam escrito a segunda lei no formato moderno, porém ainda com uma visão geométrica (MALTESE, 1992). Em *Mechanica*, se dá os devidos créditos a Newton e a Hermann, entretanto, faz uma aplicação sistemática que anteriormente não havia sido feita por ninguém. Para Pulte (2001), essa obra marca o início da Mecânica Analítica, indo contra as ideias de que a Mecânica Analítica ignorava as fundações conceituais e metodológicas.

---

[12] Ver Sitko (2019).

Como afirma Panza (2002), o programa da Mecânica Analítica não poderia ser somente uma exposição newtoniana[13] em outra linguagem, mas uma ciência mais geral, em que os resultados de Newton são casos particulares. A Mecânica Analítica determina um pequeno número de princípios gerais e a partir deles determina as características dinâmicas do sistema, sobre o qual qualquer tipo de força atua. Ao mesmo tempo, essas equações eram tanto pontos de partida para provas dedutivas, quanto eram instrução para escrever equações de um sistema particular. Nessa situação, o movimento não era um objeto matemático, mas um objeto analítico, ou seja, uma relação funcional na forma analítica.

Entretanto, mesmo que não tenham sido a base para os estudos que se seguiram, deve ficar claro que praticamente todas as investigações em mecânica do século XVIII sofreram influência dos *Principia*, pois o paradigma newtoniano estava estabelecido. As reações aos *Principia* foram, principalmente, no sentido de trabalhar com o problema de três corpos e das perturbações no Sistema Solar que seria o de calcular com maior precisão o movimento de um sistema de corpos rígidos regidos pela gravitação universal, e também, o de desenvolver a mecânica para corpos deformáveis finitos. Nessa época, a análise do movimento de pontos materiais já era completa, assim como a determinação do centro de oscilação de um corpo rígido. Agora os estudos se focavam também no estudo das oscilações de sistemas flexíveis e na generalização do estudo de colisões para corpos não pontuais. Para este último caso, Maltese discorre a respeito da necessidade da elaboração de um princípio que descrevesse a variação do momento angular do corpo rígido (MALTESE, 1992).

IV. O que era necessário para a generalização de princípios

Para a generalização de princípios, era necessário superar problemas das bases newtonianas, como o da cinemática, uma vez que os problemas antes eram tratados com o sistema de coordenadas naturais, no qual era necessário encontrar um referencial dependente do contexto da situação mais natural possível. Além do mais, nessa base, problemas de três dimensões não eram possíveis de serem resolvidos. Também se fazia necessário estender a dinâmica newtoniana, uma vez que esses princípios e outros dos anos de 1740, só podiam ser aplicados a pontos materiais, ou seja, falhavam em descrever movimentos tanto contínuos como os fluidos (STAN, 2017).

Também era necessária a substituição do modelo geométrico por equações que descrevessem de maneira mais eficiente (analítica) o movimento de uma determinada situação, pois quando os casos são simples, as diferenças da abordagem analítica com relação à mecâ-

[13] Panza faz a leitura de Truesdell como se a matemática analítica fosse uma ferramenta para a exposição da mecânica, o que não era válido para Euler ou Bernoulli, pois estes utilizavam a matemática analítica para estabelecer os conceitos da mecânica racional (2002, p.3). Para Truesdell, a mecânica racional seria o entendimento de suas definições, e a mecânica analítica é o resultado do formalismo de Lagrange, mesmo que tenha havido, por exemplo, Euler anteriormente para que isso fosse concretizado, sobre o movimento de corpos ou sistemas de corpos.

nica newtoniana quase somem, entretanto, quanto mais complexos são os casos, mais esta última se torna limitada.

A concepção de força de Newton também não era bem aceita, como por exemplo, por d'Alembert que interpretava a ideia newtoniana de força como um conceito apenas cinemático, sem explicação dinâmica. Também, como já vimos anteriormente, a concepção ambígua de forças discretas e contínuas de Newton era um grande problema para a interpretação e método de resolução dos problemas. Além dessa concepção, havia ainda outras diferentes e as contradições das visões newtonianas, e assim, um novo conceito precisava ser formulado. Sua noção de corpo também era confusa algumas vezes. Era necessário então o esclarecimento de conceitos, como o de força, massa, a noção de inércia linear e inércia de rotação[14].

Além disso, era necessário um método que fornecesse condições de se resolver classes de problemas mais gerais, pois em Newton faltam os corpos rígidos, os corpos em interação, fluidos e deformáveis. Para esse tipo de resolução, era necessário também se compreender bem os conceitos de quantidade de movimento, ou agora momento linear, bem como um análogo rotacional, que seria posteriormente proposto por Euler, o momento angular.

V. Fatores que contribuíram para a construção do princípio fundamental da mecânica

Maltese apresenta (1992) algumas linhas evolutivas para a construção da segunda lei do movimento: uso do formalismo leibniziano; troca de notação geométrica para notação algébrica; o uso de funções como objetos analíticos; a expressão em coordenadas cartesianas ortogonais e o uso de derivadas parciais; superação da ambiguidade no conceito de força; os estudos das oscilações, corda vibrante e pêndulo; movimento dos fluidos; a introdução dos princípios variacionais; o reconhecimento da generalidade da lei para todos os casos de problemas mecânicos.

A seguir, serão comentados mais aprofundadamente cada uma dessas linhas evolutivas e como de fato elas contribuíram para o desenvolvimento do novo princípio por Euler.

V.1 Formato analítico (formalismo diferencial e integral leibniziano)

Para os matemáticos do século XVII, estabelecer uma formulação analítica independente da geométrica era uma tarefa muito difícil, pois não era o método usual. Um longo processo ocorreu até o cálculo leibniziano (formalismo diferencial) se apropriar da teoria do movimento (PANZA, 2002). De acordo com o historiador Michel Blay, podemos considerar o processo como dividido em três estágios: o primeiro estágio foi a tentativa de aplicar soluções diferenciais a problemas estritamente geométricos, feita por Jakob, Johann Bernoulli e também por Leibniz, mas como Blay discute (1992), não havia uma conceituação diferencial ainda. O segundo estágio é devido a Leibniz, que estabelece um princípio geral de proporção

[14] Esses conceitos aparecem vagamente na mecânica newtoniana, entretanto, não são oferecidas maneiras de medi-las e nem princípios que governem esse tipo de movimento.

entre *ds* e *vdt*. Nesse caso, as velocidades instantâneas são pensadas como pequenos segmentos percorridos em um determinado tempo. O terceiro estágio são as equações de movimento propostas por Varignon; ele podia comparar espaços, tempos, acelerações, comparando segmentos (PANZA, 2002).

Varignon apresentou à Academia de Ciências de Paris, no início do século XVIII, um trabalho intitulado *Das forças centrais, ou da gravidade necessária dos planetas para descreverem as órbitas que supostamente teriam* (*Des forces centrales, ou des pesanteurs nécessaires aux planètes pour leur faire décrire les orbes qu'on leur a supposées jusqu'ici,* 1703) no qual, a partir da lei de queda de corpos, pôde escrever a segunda lei do movimento na forma diferencial. Entretanto, ainda assim não era um princípio geral mecânico, todavia, um passo à frente no desenvolvimento da mecânica. Vale lembrar que, mesmo para ele, um newtoniano convicto, as bases para seu produto eram os trabalhos de Galileu e não Newton.

A abordagem de Varignon[15] (dos trabalhos entre 1698 e 1711) foi melhorada pelo tratamento de problemas mecânicos na escola leibniziana por Johann Bernoulli, e foi a base da *Mechanica* de Euler. Entretanto, as formulações de Varignon mediam quantidades mecânicas, segmentos de curvas infinitesimais, ou seja, quando se tratava de um problema um pouco mais difícil era impossível não recorrer à geometria utilizada por Newton para a resolução também.

Posteriormente a Varignon, muitos passaram a estudar os escritos newtonianos e a utilizar bases analíticas. Foi o caso de Johann Bernoulli considerado o primeiro a introduzir equações diferenciais para a resolução de problemas mecânicos. O uso de equações e do cálculo diferencial e integral oferece uma nova interpretação mecânica para as quantidades em questão (HEPBURN, 2007), muito além do que o método geométrico podia alcançar.

V.2 Coordenadas cartesianas

A superação de alguns problemas de mecânica também veio com a introdução de inovações conceituais por Euler, que foram o uso do sistema cartesiano externo ao sistema em três dimensões (no lugar das coordenadas naturais), o que o levou a perceber que a força estava relacionada com a segunda derivada da posição e também estendeu o estudo de trigonometria esférica para movimentos infinitesimais, a fim de relacionar dois referenciais em que um rotaciona com relação ao outro. Além disso, Truesdell afirma (1960) que o uso de coordenadas cartesianas tornava a soma vetorial muito simples, assim como nesse formato a compreensão do momento linear, do momento angular e da energia são imediatos, diferentemente do observado nos *Principia*. Foram esses detalhes que lhe permitiram lidar com o movimento do corpo rígido, fora do alcance da mecânica newtoniana. Aliado ao uso das coordenadas cartesianas, também foi possível decompor os movimentos nos seus eixos principais, o que ampliava o alcance de resolução destes.

---

[15] Sua formulação foi utilizada nas notas de rodapé da Edição de Genebra dos *Principia* (PANZA, 2002).

O uso de equações diferenciais e de coordenadas ortogonais representa um passo muito importante para o desenvolvimento da Mecânica Analítica; sem esses aparatos, vários problemas não podiam ser tratados, como por exemplo, os contínuos. Assim, conforme trata Maltese (1992) se não havia "capacidade" de resolução antes, então não se pode tratar esses desenvolvimentos sem substancialidade, como sendo apenas formalismos matemáticos.

V.3 Uso de funções

Outra importante mudança da mecânica de Newton para a de Euler e Lagrange foi o estabelecimento do conceito de função (HEPBURN, 2007). Estes últimos adotavam a função como elemento principal a fim de tratar da descrição do movimento. Nesse método, por exemplo, ao se introduzir uma equação para explicar um evento, ela dá a forma analítica da curva, e revela assim a natureza da curva.

O que ocorre então no século XVIII é uma reformulação da matemática como um todo: a função agora é uma abstração de quantidade, e não aplicação da matemática a um fenômeno físico. Funções não precisam ser distinguidas entre números e magnitudes, e estas últimas não precisam ser distinguidas de suas naturezas. A Mecânica Analítica, ao fazer uso de funções e equações, tornava mais fácil o transporte da estrutura de resolução de um problema a outro, ou seja, mais problemas poderiam ser resolvidos com um único método, e este ainda fornecia a física do sistema, em vez do uso de trajetórias. Para Guicciardini, a análise infinitesimal sofreu um processo de "de-geometrização", em que os objetos passaram a ser funções, o que mudou a matemática do século XVIII numa direção em desacordo com os preceitos de Newton[16] (2004). Assim, pode-se considerar que a análise matemática é uma formulação exclusiva do século XVIII (PANZA 2002).

V.4 Estudo das colisões e unificação do conceito de força

Anteriormente aos desenvolvimentos do século XVIII, a descrição do fenômeno de colisão era tratada como uma extensão do princípio da alavanca, relacionada ao equilíbrio do sistema. Seu estudo era puramente cinemático, limitando-se ao antes e ao depois da colisão. Leibniz, por exemplo, trabalhava com esse problema a partir do seu princípio da continuidade, no qual os corpos elásticos se deformam em um determinado intervalo de tempo durante a colisão. Para Leibniz, a força que atua em sistemas em equilíbrio é chamada de força morta[17]; é a mesma que atua no braço da alavanca quando o equilíbrio é desfeito; ou seja, é a força que

[16] Entretanto, essa "de-geometrização" foi um processo silencioso; após a segunda metade do século XVIII, os britânicos se viram isolados com seus métodos e linguagens. Essa nova imagem tem sua versão final no início do século XIX com Cauchy. Assim, até essa mesma data, trabalhos como os de Euler e Lagrange nem eram citados na Grã-Bretanha. Houve posteriormente o uso de equações diferenciais parciais, e depois, o desenvolvimento do cálculo das variações.

[17] A força morta pode ser entendida como energia potencial.

gera o movimento, $F = {}^{dp}/_{dt}$. Quando o corpo já se move, atua a *vis viva*[18], mv^2. Apresentamos essa visão para mostrar que, para que Leibniz encontrasse a segunda lei do movimento, bastaria a análise da força elástica, ou seja, a aplicação de $dv = adt$ ao problema, conforme descreve Maltese (1992); dessa forma, o dualismo dos conceitos de força desapareceria e o princípio geral emergiria. O que se quer afirmar aqui é que o princípio agora estava próximo de todos devido a construções conceituais; mas não estava na época de Newton.

Em 1724, a Academia de Paris ofereceu o prêmio anual para o melhor modo de tratamento das leis de comunicação do movimento. Colin MacLaurin ganhou com a defesa de corpos duros, colisão instantânea e conservação da quantidade de movimento; do outro lado estava Johann Bernoulli com um trabalho, não de menor nível, relacionando colisões elásticas e a conservação da *vis viva*[19] (MALTESE, 1992). Nas obras de Euler e também de Bernoulli a colisão é vista como uma força que pode atuar com continuidade e, é a partir dessa última interpretação que ocorre a unificação do conceito de força.

Não podemos imaginar o *Decouverte d'un noveau principe de Mécanique* sem essa unificação, e não podemos pensar nessa unificação sem a concepção contínua da matéria, devida a Leibniz (MALTESE, 1992, p. 199).

Para Maltese (1992), as duas concepções de força (discreta e contínua, ou seja, colisão e queda livre) permaneceram tanto tempo na mecânica devido às concepções de matéria que os cientistas tinham na época. E, aliás, tal disputa não se tratava apenas de uma questão de palavras, mas sim da relação entre a força e o movimento determinante para a elaboração e enunciação da segunda lei do movimento. Newton aparece como grande nome ao conceber a força como algo que altera o estado de movimento de um corpo, e não ao associá-la ao estado de movimento do corpo, ou seja, tratando esta como uma causa externa. Aliando esse conceito ao de matéria contínua, o caminho para a produção da lei fundamental do movimento tornava-se de fácil acesso.

Outra divergência de ideias que levou às mudanças nas concepções de matéria e de força foi a respeito da descrição de curvas: se a curva era contínua, relacionada a uma força contínua, ou se era uma curva poligonal, que estava relacionada com uma série de colisões; ou seja, foi um problema matemático que influenciou na descrição física do sistema. Assim, como se pode afirmar que os desenvolvimentos após Newton foram simplesmente formais? E essa nova conceituação de força, por acaso já existia no século XVII? Foram necessários os avanços conceituais aqui tratados para que uma forma nova e geral de descrever os movimentos emergisse.

[18] Pode ser entendida como uma espécie de energia cinética.

[19] Johann e Daniel Bernoulli adaptaram o método de Leibniz para resolver brilhantemente alguns problemas, entretanto, apenas os mais simples.

V.5 Estudo das oscilações, corda vibrante e pêndulo

Segundo Lagrange (MALTESE, 1992), os estudos das oscilações e dos centros de oscilações foram muito importantes para o desenvolvimento da Mecânica Analítica. Em 1638, Descartes desenvolve alguns estudos a respeito de pêndulo e oscilações; em 1673, Huygens escreve sua mais importante obra sobre o tema, *Horologium Oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*. A dinâmica do corpo rígido foi assim iniciada por Huygens[20] (1673) com a solução para o problema do pêndulo físico, válida para sistemas em torno de um eixo fixo (TRUESDELL, 1960). Entretanto, deve-se salientar que essa solução não era válida para todo sistema de um corpo rígido.

Mais tarde, após críticas ao material de Huygens, Jakob Bernoulli se interessou e estudou o problema do centro de oscilação e formulou sua própria teoria[21], propondo uma nova abordagem da mecânica a partir desse problema, utilizando o princípio da alavanca, a partir de hipóteses integrativas. Ou seja, em seu trabalho para se determinar o movimento de um sistema vinculado, era necessário introduzir forças que mantivessem esses vínculos, e, além disso, as acelerações (com sentido contrário) são equivalentes a forças estáticas. Também é importante lembrar que para a resolução de problemas de estática, não só o equilíbrio de forças é importante, como também o equilíbrio de momentos. Esse trabalho de Jakob é considerado por Truesdell o segundo mais importante para o desenvolvimento da mecânica, logo atrás dos *Principia* (MALTESE, 1992).

Para Truesdell (1968) os trabalhos de Jakob Bernoulli sobre o centro de oscilação também marcam a aparição do princípio do momento angular, que seria importante para a construção do princípio fundamental. Deve-se lembrar que isso ocorreu antes[22] dos *Principia*, não podendo assim essa extensão da mecânica ter sido derivada das leis de Newton (MALTESE, 1992).

Jakob Bernoulli também atuou em outras frentes, além das oscilações e, assim, publicou em 1697, a solução para o problema da queda mais rápida de um corpo, ou também conhecida como braquistrócona, a partir de um princípio variacional que varia a curva em um único ponto a partir de um sistema ortogonal de coordenadas, a fim de compará-las[23]. Posteriormente, Johann Bernoulli reescreveu esse material do irmão Jakob (1719), mas dessa vez explicitando equações gerais e propriedades para a base do cálculo variacional, o que era de extrema importância para Euler propor o novo princípio. Tal trabalho foi motivado pelos estudos de Brook Taylor em *Methodus incrementorum*, de 1715.

---

[20] Christiaan Huygens foi um nome muito presente também no estudo da colisão, e o diferencial de seu trabalho foi introduzir a relatividade dos movimentos e o centro de gravidade do sistema. Huygens se apoiava também no princípio de conservação de energia.

[21] Trabalho iniciado em 1686, aperfeiçoado até 1703, publicado em 1705.

[22] Exposição iniciada em 1686 e finalizada com o tratado completo em 1703.

[23] Algumas das considerações de Bernoulli não foram utilizadas por, ou foram diferentes das de Euler.

Taylor contribuiu na área ao analisar o movimento de uma corda vibrante e determinar, em seu *Methodus*, sua frequência de vibração do modo fundamental e a sua forma. D'Alembert e Daniel Bernoulli também se apoiaram nos resultados de Taylor para suas pesquisas, utilizando a análise da corda como uma extensão do centro de oscilações a sistemas flexíveis ao observar que todos os elementos da corda passam pelo ponto de equilíbrio simultaneamente, o que significa que o movimento é equivalente a um pêndulo simples. Assim, Taylor utilizou a segunda lei na forma analítica para obter a força em direção ao centro da corda. Foi a primeira vez que o princípio foi aplicado a um corpo contínuo, entretanto, este não reconheceu o resultado como uma equação diferencial e algumas partes do trabalho são confusas e errôneas (TRUESDELL, 1975). Dessa forma, Taylor esteve muito próximo de enunciar a lei do movimento, entretanto, como esse não era seu objetivo acabou por desviar-se do caminho (MALTESE, 1992).

Alguns anos após a publicação dos trabalhos de Taylor, Johann Bernoulli publicou sua análise da corda vibrante (1727) a partir do estudo da força restauradora de uma corda tensa de massa nula submetida a uma carga de *n* massas iguais e equidistantes entre si (TRUESDELL, 1975), cujo objetivo também era determinar o comprimento do pêndulo isócrono, o que foi feito com sucesso; os resultados obtidos foram similares aos de Taylor. Nesse trabalho, também Johann Bernoulli chega muito próximo à segunda lei do movimento na forma moderna; entretanto, seu objetivo era descrever o período do movimento harmônico e desviou-se, novamente, da rota para o princípio geral. Maltese salienta que se Bernoulli o tivesse feito, seria a partir da lei de queda livre e do princípio da energia cinética, e novamente, não a partir dos *Principia* (1992)[24].

Johann Bernoulli também publicou sua teoria[25] acerca do momento angular, em que faz uso de diferentes gravidades (diferentemente do tratamento de Jakob). Sua técnica de encontrar o centro de oscilação de um sistema consistia em reunir todas as massas em um único ponto; tal trabalho foi importante para a distinção entre massa e peso.

Mas somente em 1742 é que Johann faria uso de conceitos puramente dinâmicos, como aceleração angular, para escrever a relação entre momento de inércia e momento da força (torque) (MALTESE, 1992). Nesse ano, ele apresenta a primeira solução para o problema das oscilações de um sistema composto, *De pendulis multifilibus* (MALTESE, 1992); devido à generalidade do trabalho é que sua obra torna-se importante para o desenvolvimento da Mecânica Analítica. Para Truesdell (TRUESDELL, 1960) é na solução e redação das equações do movimento desses problemas que aparecem resquícios do que viríamos a chamar posteriormente de segunda lei do movimento (MALTESE, 1992). Esses estudos chamaram a

---

[24] As inovações que distinguem a abordagem de Euler daquela de Bernoulli são justamente as providas por Taylor. Apesar de Taylor ser inglês e trazer sua notação como newtoniana em seu trabalho, sua análise parecia-se muito mais com a continental. Entretanto, seria incorreto afirmar que os trabalhos de Euler foram uma extensão dos resultados de Taylor, apesar de Euler chegar a uma derivação similar à deste, já que havia diferenças conceituais entre os dois.

[25] 1714 em Acta Eruditorum e 1717 na Academia de Paris.

atenção de Euler que utilizou essa forma de generalização para sua teoria. Para Maltese (1992), Johann Bernoulli inclusive teve essa capacidade de generalização devido à clareza com que tratou grandezas como massa, peso e aceleração.

Um dos motivos pelos quais Johann Bernoulli não foi quem chegou ao princípio fundamental é que nessa mesma obra, em que utiliza os argumentos há pouco citados, descritos da metade em diante da obra, restringe-os às pequenas oscilações; não tivesse ocorrido tal restrição, talvez Johann tivesse alcançado o princípio antes de Euler.

Daniel Bernoulli também trabalhou, em 1733, com a natureza dos pequenos modos de vibração a fim de calcular as frequências destes. Tomou os problemas oscilantes como superposições de pequenas oscilações, ou também, assumiu que um movimento vibratório mais geral pode ser tomado como uma superposição de modos simples de vibração; entretanto, como não partia de equações diferenciais, a demonstração era impossível e nunca pôde justificar a hipótese.

Além disso, Daniel também trabalhou com o problema das cordas vibrantes. Em seu trabalho, comenta sobre a falta de princípios para se tratar problemas de corpos flexíveis. Daniel não utiliza condições estáticas para suas resoluções, assim como fez Johann, mas analisa a ação das forças em um determinado intervalo de tempo. Assim, pela primeira vez, faz aparecer os modos superiores de vibração na análise de um sistema de oscilações. Maltese concorda com as ideias de Truesdell ao afirmar que Daniel tenta chegar à solução de um problema que não era possível de ser resolvido com os princípios disponíveis (MALTESE, 1992); podemos nos questionar então a respeito do que Daniel buscava de novidade, uma vez que a defesa tradicional apresentada nos manuais de Física é que a mecânica já havia sido toda desenvolvida. É óbvio que desenvolvimentos conceituais eram necessários para a superação desses problemas mecânicos.

Euler generalizou todos os resultados de Daniel Bernoulli, mesmo utilizando um princípio diferente. Durante o estudo do oscilador harmônico, Euler passou a integrar as equações ordinárias, o que facilitou muito a solução para o problema das vibrações. As pesquisas sobre o centro de oscilação tiveram fim em 1735 com a apresentação da obra de Euler (*De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexibilium methodus nova et facilis*, publicada em 1740) que reduzia os problemas à determinação do movimento de oscilação de pêndulos simples, para o caso de corpos rígidos; e para o caso de corpos flexíveis. O essencial seria determinar previamente a forma da curva descrita durante o movimento para então determinar a resolução (MALTESE, 1992). Euler utilizava séries para a obtenção dos resultados, mas nesse caso, para barras elásticas. Além disso, Euler não somente utiliza o método da condição de pêndulo, como também adota a estática para o problema, sempre buscando o equilíbrio para a análise do sistema. Esses desenvolvimentos de Daniel Bernoulli e Euler foram de grande importância para o estabelecimento dos princípios gerais da mecânica.

Assim, a partir das pesquisas com relação ao centro de oscilação que ocorreram paralelas à mecânica newtoniana, surgiram o princípio de d'Alembert, o do momento angular e o da conservação de energia cinética. Com a análise do movimento de sistemas flexíveis também surgiu a análise fenomenológica do movimento.

V.6 Movimento de fluidos

Juntamente aos problemas da corda vibrante, outra classe de problemas influenciou Euler para que este focasse sua atenção para a generalidade do método, que seria a respeito da análise do movimento de fluidos de Johann Bernoulli de 1742. Euler chamou tais métodos de "novos e genuínos" (MALTESE, 1992). A partir dos fluidos, Euler percebe que o movimento pode ser decomposto entre um movimento de rotação e um de translação. Esse conhecimento foi importante para que Euler pudesse tratar o problema dos corpos celestes como corpos extensos que necessitavam de um análogo angular que regesse seu movimento de rotação.

Em 1727, Daniel Bernoulli foi o primeiro a aplicar corretamente o princípio da conservação da quantidade de movimento a um meio contínuo, assim como posteriormente, analisar a velocidade do fluido em movimento. O resultado dessa análise é a equação que hoje conhecemos como equação de Bernoulli; entretanto, as ideias que hoje utilizamos não são as mesmas que levaram Daniel a propô-la.

Em 1739, Johann Bernoulli introduziu as equações gerais da hidráulica, em sua obra *Hydraulica*[26]*,* e fez uso do princípio de que a força aceleradora é igual à massa vezes a aceleração (TRUESDELL, 1975); foi o primeiro a determinar o movimento de um corpo deformável mediante o equilíbrio de forças (TRUESDELL, 1975). Não se pode dizer que foi simplesmente a aplicação do "princípio newtoniano", pois foi observado que era necessário levar em conta a ação do fluido sobre si mesmo. Todavia, Bernoulli, mesmo tendo as relações suficientes, não escreveu as equações de movimento, limitando-se a integrações do problema em questão. Nesse trabalho, Johann Bernoulli já utilizava o sistema de coordenadas cartesianas retangulares.

Em *Hydraulica*, Johann Bernoulli introduz a grandeza "*gurges*" (ou "vórtices") para descrever a porção de fluido que se encontra na região de transição entre uma alta e uma baixa velocidade a fim de calcular o gradiente de velocidade nessas microrregiões, e assim, a força resultante em cada uma delas, Johann Bernoulli obtém uma equação diferencial, que seria, segundo Truesdell, *"um progresso na mecânica dos contínuos*" (1955 *apud* MALTESE, 1992, p. 171). Euler elogia o método de Bernoulli e o utiliza para aplicá-lo a casos mais gerais, além disso, retira o uso incômodo dos "*gurges*". Para Truesdell, Euler tomou o cerne do método de Johann dos elementos infinitesimais e o aplicou aos contínuos. Maltese comenta a respeito de que para nós esse método parece óbvio, mas que foram necessárias seis décadas de desenvolvimentos conceituais para que fosse estabelecido; para a História da Ciência, o mais fácil foi considerar que a ideia já era aquela descrita por Newton (MALTESE, 1992, p. 176). Na segunda parte da *Hydraulica*, enviada a Euler em 1740, Bernoulli afirma que sua teoria

---

[26] Publicada em 1742, mas lida por Euler em 1739.

pode ser descrita por dois princípios, um hidrostático e um hidráulico; sobre eles Euler construiu sua teoria de fluidos.

V.7 Condição de pêndulo e equilíbrio: equações diferenciais

Em 1743, Johann Bernoulli e d'Alembert obtiveram as primeiras equações diferenciais para sistemas com mais de duas massas que foram utilizadas na resolução de problemas de mecânica de corpos, no problema da vibração de uma barra com cargas, por Daniel Bernoulli, Euler e Johann Bernoulli, assim como no problema de uma corda com carga no momento em que, a análise até então disponível, não era suficiente para dar conta de problemas de corpos finitos. Nesses problemas, independentemente, os cientistas aplicaram a "condição de pêndulo" e o equilíbrio dos momentos das forças para as oscilações do corpo.

O problema exposto por d'Alembert para a corda com carga é o *Traité de Dynamique* (1743), o primeiro a fornecer uma regra geral para a obtenção de equações de movimento para corpos vinculados, obra que, trata o mesmo problema de Johann Bernoulli afirmando poder expressar toda a mecânica através de três princípios: inércia, decomposição de forças e o princípio que hoje conhecemos como "princípio de d'Alembert" (MALTESE, 1992). A diferença para com Bernoulli é que d'Alembert expressava explicitamente a evolução temporal do sistema, e também trabalhou com o caso limite para uma distribuição contínua, retomando a condição de pêndulo de Daniel Bernoulli. Para o caso em que o equilíbrio não fosse mantido, d'Alembert escreveu a equação diferencial do movimento da corda, a primeira, segundo Truesdell (1960) para meios contínuos. Ao oferecer a equação para além da condição de pêndulo, que restringia as soluções, d'Alembert também contribui significativamente para o desenvolvimento da mecânica[27]. Seu princípio não era suficiente para resolver os problemas gerais da dinâmica, entretanto, como admitia outros princípios abriu caminho para resoluções da mecânica, além de ser o primeiro a expressar o movimento em derivadas parciais, utilizando um posicionamento bem diferente do pensamento newtoniano, visto que d'Alembert tinha um pensamento contrário aos princípios e ideias metafísicas newtonianas[28] (TRUESDELL, 1960).

V.8 Princípios variacionais

Em 1744, Euler escreve *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes*, sua primeira sistematização do cálculo das variações, estabelecendo assim um novo ramo de análise na mecânica a partir da formulação do problema variacional de ma-

---

[27] A ideia de que d'Alembert tentou reduzir a dinâmica à estática é uma ideia errônea, que, segundo Dias (2006, p. 207), pode ter sido disseminada pelo que Truesdell chama de princípio da aceleração reversa; o que d'Alembert fez foi separar equações entre equações de movimento e equações de vínculo.

[28] Embora tivesse um pensamento contrário aos princípios e ideias metafísicas newtonianos, em 1746, d'Alembert derivou a equação linear de onda para pequenas vibrações em uma corda utilizando a abordagem newtoniana.

neira geral, identificando padrões de soluções em forma de equações, e oferecendo uma técnica de derivá-las (FRASER, 1994, p. 103). Seu objetivo é mostrar que resultados já conhecidos podem ser obtidos de uma condição de máximo ou mínimo de uma função. Euler procura um novo ferramental matemático que o permita introduzir um princípio que esteja de acordo com os resultados obtidos por Newton, e que possa ser um princípio geral variacional (MARONNE & PANZA, 2014). Os resultados de Euler nesse assunto foram essenciais para a generalização da formulação do Princípio da Mínima Ação por Lagrange, que marcam de fato a origem da Mecânica Analítica.

A possibilidade de expressar movimentos e condições de equilíbrio de sistemas gerais somente surgiu com a mecânica fundada sob princípios não newtonianos, conhecidos como princípios variacionais. Assim, os problemas eram tratados como casos particulares do "*problema de equilíbrio de um sistema mecânico e do problema de movimento de um sistema mecânico*" (PANZA, 2003), através de sistemas adequados de equações.

VI. Rumo ao princípio fundamental

Em 1744, Euler escreveu dois trabalhos, entre os quais pode-se notar uma grande evolução conceitual euleriana rumo ao princípio fundamental. No primeiro (publicado em 1751), Euler lamenta-se por, mesmo tendo trabalhado bastante, ainda não obter princípios gerais para a descrição dos movimentos, pois os problemas tratados por ele e por Daniel puderam ser reduzidos à estática (MALTESE, 1992), e assim, não foi necessária a busca por princípios novos e gerais; nesse trabalho, Euler resolve problemas particulares, assim como utiliza princípios especiais e a conservação da quantidade de movimento, porém sem enunciar um princípio geral.

No segundo trabalho (também publicado em 1751), pode-se dizer que foi o passo decisivo para o surgimento da segunda lei do movimento ao utilizar a teoria de oscilações para vibrações de extensão finita e as coordenadas cartesianas ortogonais. O que Euler fez, na verdade, foi tomar um sistema de $n + 1$ pontos materiais, levando ao limite do infinito o número de partículas, generalizando assim o sistema para uma corda com peso. Truesdell argumenta (1960, p. 223 *apud* MALTESE 1992, p. 159, nota 322) que, ainda nessa data, Euler não tinha total conhecimento do método que estava produzindo, pois a parte discreta do problema estava completa, no entanto a parte contínua ainda era somente uma mudança de formalismo.

A partir do momento em que foram enunciadas as equações do movimento, foi possível desenvolver a teoria das pequenas vibrações. A equação mais famosa desse período foi a de d'Alembert para pequenas oscilações da corda vibrante, de 1747 (MALTESE, 1992); não somente isso, mas é uma das primeiras vezes, segundo Maltese (1992), em que a segunda lei aparece como princípio geral, capaz de fornecer as equações de movimento do sistema. Paralelamente, d'Alembert tratou a força atuante sobre o elemento comparando-a à força de gravidade de queda livre, salientando o caráter dinâmico dessa última. Entretanto, este limitou-se a condições não necessárias. Esses avanços de d'Alembert foram muito importantes para que

Euler compreendesse as potencialidades da segunda lei para corpos contínuos, conforme trata Truesdell (1960).

Outro importante trabalho nessa área é devido a Euler, publicado em 1748, *De propagatione pulsuum per medium elasticum,* que trabalhou com o mecanismo de propagação do som no ar. Esse "*trabalho deu pela primeira vez a solução geral do problema das pequenas oscilações de pontos materiais*" (MALTESE, 1992), de modo que ofereceu a solução como uma superposição de oscilações simples; esses modos simples são tratados como soluções particulares das equações gerais do movimento. Euler posteriormente defendeu que somente o uso das equações diferenciais já oferecia por si só um enunciado completo. O que faltava a Euler nesse momento era somente a consciência da generalidade da segunda lei (MALTESE, 1992), que chegaria com os estudos relacionados à gravitação universal.

Esses resultados são alcançados no artigo de 1752, onde $F = ma$ é escrita pela primeira vez; contudo ainda não se pode afirmar que foi o resultado conclusivo para a enunciação da segunda lei do movimento como hoje é conhecida, pois também se trouxe o caso rotacional à tona. A formulação definitiva do momento angular por Euler e a consciência de dois princípios fundamentais independentes ocorreria somente em 1776 (MALTESE, 1992), na obra *Nova methodus motum corporum rigidorum degerminandi*.

VII. Considerações finais

Por volta da metade do século XVIII, muitos autores estavam trabalhando com problemas similares aos aqui tratados, e assim, torna-se difícil comentar a respeito de cada um dos trabalhos desenvolvimentos nesse período, assim como Panza também discute (2002) que ocorre com o impreciso nascimento da Mecânica Analítica. Dessa forma, aqui elencamos apenas alguns dos principais trabalhos e nomes que compreendemos terem feito contribuições diretas ao trabalho de Euler.

Por fim, após essa exposição, é possível notar que de fato, a lei proposta por Newton não poderia ter o mesmo significado que o princípio proposto por Euler ($F = ma$), uma vez que muitos conceitos, como os que aqui foram discutidos, ainda não eram conhecidos, e nem haviam sido elaborados em 1687. O que se desejou mostrar com este material é a ciência como construção de conceitos por um corpo de cientistas através de tentativas e erros, parcerias em um longo período, diferentemente da imagem simplista que permeia, de maneira geral, o Ensino de Ciências.

Agradecimentos

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Referências bibliográficas

BERNOULLI, J. 1697. Solutio problematum fraternorum, peculiari programmate cal. Jan. 1697 Groningae, nec non Actorum Lips. mense Jun. & Dez. 1696, & Fev. 1697 propositorum: una cum propositione reciproca aliorum. **Acta eruditorum**, p. 211-217. Também em sua Opera Omnia (1744), p. 768-778.

BERNOULLI, J. Demonstration generale du centre de balancement ou d'oscillation tireé de la nature du levier. **Mem. Acad. Roy. Sci. Paris**, 4. Ed. 1703 (1705), p. 78-84. Também em: Opera Mathematica Varia, v. 2, p. 930-936.

BERNOULLI, J. Meditatio de natura centri oscillationis. **Mem. Acad. Roy. Sci. Paris**, p. 218, 1714.

BERNOULLI, J. Remarques sur ce qu'on a donn6 jusqu'ici de solutions des Problames sur les Isoperimetres, avec une nouvelle methode courte & facile de lês resoudre sans calcul, laquelle s'étend aussi à d'autres problêmes qui ont rapport à ceux-là. **Mémoires de l'Académie Royale des Sciences**, 1718 (data de apresentação), p. 100-138, 1719.

BERNOULLI, J. Theoremata selecta pro conservatione virium vivarum demonstranda excerpta ex epistolis datis ad filium Danielem. **Comm. Acad. Sci. Petrop**., v. 2, p. 200-207. 1727 (data de apresentação), 1729.

BERNOULLI, J. **Hydraulica nunc primum detecta ad demonstrata directe ex fundamentis pure mechanicis**, 1742a.

BLAY, M. **La naissance de la mechanique analytique.** La science du mouvement au tournat des XVIIème et XVIIIème siècle, PUF, Paris. 1992.

D'ALEMBERT, J. **Traité de dynamique**, Paris: David, 1743.

DIAS, P. M. C. F = ma?!! O nascimento da lei dinâmica. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 28, n. 2, p. 205-234, 2006.

EULER, L. Mechanica sive motus scientia analytice exposita. **Opera Omnia**, série II, v. 1 e 2, 1736.

EULER, L. De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexibilium methodus nova et facilis. **Comm. Acad. Sci. Petrop**., 1735 (data de apresentação), v. 7, p. 99-122, 1740.

EULER, L. **Methodus inveniendi lineas curvas maxime minimive proprietate gaudentes.** Lausanæ et Genevæ: M. M. Bousquet et Soc., 1744.

EULER, L. De propagatione pulsuum per medium elasticum. **Novi Comm. Acad. Sci. Petrop**, 1747/48 (data de apresentação), v. 1, p. 67-105, 1750.

EULER, L. De motu corporum flexibilium. **Comm. Acad. Sci. Petrop**., 1744 (data de apresentação), v.14, p. 182-196, 1751a.

EULER, L. De motu corporum flexibilium. **Opusculi**, 1744 (data de apresentação), v. 3, 1751b, p. 88-165, 1751b.

EULER, L. Nova methodus motum corporum rigidorum degerminandi. **Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae**, v. 20, p. 208-238, 1776.

FRASER, C. G. The Origins of Euler's Variational Calculus. **Arch. Hist. Exact Sci**., v. 47, n. 103, 1994.

GUICCIARDINI, N. Dot-Age: Newton's mathematical legacy in the eighteenth century. **Early Science and Medicine**. Newtonianism: Mathematical and 'Experimental', v. 9, n. 3, p. 218-256, 2004.

HEPBURN, B. S. **Equilibirum and explanation in 18th century mechanics.** Faculty of arts and sciences, University of Pittsburgh, 2007. 134f.

LAGRANGE, J. L. 1. ed: 1788. **Mécanique Analytique**. Paris, Edição nova e revisada, 1811.

MALTESE, G. **La storia di "F = ma".** La seconda legge del moto nel XVIII secolo. Biblioteca di nuncius, Firenze, 1992.

MARONNE, S.; PANZA, M. Euler, Reader of Newton: Mechanics and Algebraic Analysis. **Advances in Historical Studies**, v. 3, n. 1, p. 12-21, 2014.

MARTINS, L. P. História da Ciência: objetos, métodos e problemas. **Ciência & Educação**, v. 11, n. 2, p. 305-317, 2005.

MAUGIN, G. A. **Continuum Mechanics through the Eighteenth and Nineteenth Centuries.** Historical perspectives from John Bernoulli (1727) to Ernst Hellinger (1914). Springer Internacional Publishing Switzerland, 2014.

NEWTON, I. **Princípios Matemáticos de Filosofia Natural**. Livro I. 3. ed.: 1726. Tradução: Trieste S. F. Ricci, Leonardo G. Brunet, Sônia T. Ghering e Maria Helena C. Celia. 1. ed. São Paulo: Nova Stella Editora, 1990.

PANZA, M. Mathematisation of the Science of Motion and the Birth of Analytical Mechanics: A Historiographical Note. In: CERRAI, P.; FREGUGLIA, P.; PELLEGRINI, C. (Eds). **The Application of Mathematics to the Sciences of Nature**. Springer, Boston, MA, 2002.

PANZA, M. The Origins of Analytical Mechanics in 18th century. H. N. Jahnke. **A History of Analysis**, American Mathematical Society and London Mathematical Society, p. 137-153, 2003.

PULTE, H. Order of Nature and Orders of Science. In: LEFÈVRE W. (Eds). **Between Leibniz, Newton, and Kant**. Boston Studies in the Philosophy and History of Science, v. 220. Springer, Dordrecht, 2001.

SILVA, M. R. Paul Thagard e a inferência da melhor explicação. **Cognitio**, São Paulo, v. 18, n. 1, p. 125-134, jan./jun. 2017.

SITKO, C. M. Why Newton's Second Law is not F = ma. **Acta Scientiae**, v. 21, n. 1, p. 83-94, 2019.

STAN, M. Euler, Newton, and Foundations for Mechanics. In: SMEENK, C.; SCHLIESSER, E. (Eds.). **The Oxford Handbook of Newton**. Oxford University Press, p. 1-22, 2017.

TAYLOR, B. **Methodus incrementorum directa & inversa**. Londres, 1715.

TRUESDELL, C. **Rational fluid mechanics 1687-1765**. Leonhardi Euleri Opera Omnia, serie II, v. 12, parte I, p. I-CXXV, 1955.

TRUESDELL, C. A Program toward Rediscovering the Rational Mechanics of the Age of Reason. **Archive for History of Exact Sciences**, v.1, n. 1, p. 1-36, ago. 1960.

TRUESDELL, C. **Essays in the History of Mechanics**. Springer-Verlag. Berlin Heidelberg, New York, 1968.

TRUESDELL, C. **Ensayos de historia de la mecânica.** Tradução: Juan Carlos Navascues Howard, Enrique Tierno Perez-Relaño. Madrid: Editorial Tecnos, 1975.

VARIGNON, P. Des forces centrales, ou des pesanteurs nécessaires aux planètes pour leur faire décrire les orbes qu'on leur a supposées jusqu'ici. **Mem. Acad. Roy. Sci. Paris,** 1700 (data de apresentação), p. 218-237, 1703.

Direito autoral e licença de uso: Este artigo está licenciado sob uma Licença Creative Commons.