

Contextualização e tradução do artigo “Demonstração dos teoremas relativos às ações Eletrodinâmicas”, escrito por J. Bertrand^{+,*}

João Paulo Martins de Castro Chaib¹

Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Timóteo – MG

Resumo

J. Bertrand costuma ser conhecido por suas contribuições para a mecânica e para a matemática, mas pouco se sabe sobre sua predileção para a eletrodinâmica. Assim, de maneira inédita, apresentamos a contextualização e a tradução comentada, do francês para o português, do artigo “Demonstração dos teoremas relativos às ações eletrodinâmicas”. Nesse artigo, Bertrand deduz catorze teoremas fundamentais da eletrodinâmica. Entre outros pontos, tece considerações a respeito da validade da 3ª lei de Newton na eletrodinâmica, deduz a Força de Ampère de apenas dois fatos experimentais – diminuindo o número dos casos de equilíbrio necessários de quatro para dois – obtém o teorema equivalente ao divergente do campo magnético (uma das equações de Maxwell), faz considerações sobre o potencial eletrodinâmico, e deduz a relação entre um dipolo magnético e um circuito fechado plano.

Palavras-chave: *Bertrand; Eletrodinâmica; Teoremas; 3ª Lei de Newton; Ampère; História da Ciência.*

Abstract

J. Bertrand is known for his contributions to mechanics and mathematics, but little is known about his predilection for electrodynamics. So, in an unprecedented way, we present the

⁺ Contextualization and translation of the article "Demonstration of the theorems related to electrodynamic actions", written by J. Bertrand

^{*} *Recebido: agosto de 2018.
Aceito: janeiro de 2019.*

¹ E-mail: jopachaib@gmail.com

contextualization and commented translation, from French to Portuguese, of the article “Demonstration of the theorems relative to the electrodynamic actions”. In this article, Bertrand deduces fourteen fundamental electrodynamic theorems. Among other points, he discusses the validity of Newton's 3rd law in electrodynamics, he deduces Ampère's force from only two experimental facts – by reducing the number of necessary cases of equilibrium from four to two – obtains the equivalent theorem of the divergent of the magnetic field (one of Maxwell's equations), makes considerations about the electrodynamic potential, and deduces the relation between a magnetic dipole and a plane closed circuit.

Keywords: *Bertrand; Electrodynamics; Theorems; Newton's 3rd Law; Ampère; History of Science.*

I. Introdução

J. Bertrand (1822-1900) costuma ser reconhecido por suas contribuições para a mecânica e para a matemática. Inclusive, encontra-se traduzido por Santos *et al.* (2010) o artigo “Teorema relativo ao movimento de um ponto atraído para um centro fixo”. Nesse artigo, o catedrático francês mostra que uma força central deve ser proporcional ao inverso do quadrado ou diretamente proporcional à simples potência da distância para que um sistema apresente órbitas fechadas. Por outro lado, não são conhecidas suas contribuições para a teoria eletrodinâmica, talvez por tê-las apresentado dentro da perspectiva da eletrodinâmica de Ampère.

Nesse aspecto, apesar de se associar o nome de A. -M. Ampère (1775-1836) à denominação dada para a unidade de intensidade de corrente elétrica, seus trabalhos e seus debates não são conhecidos ou são distorcidos (CHAIB; ASSIS, 2007a). A atribuição a Ampère da autoria da equação de Maxwell denominada “lei de Ampère”(!), assim como a atribuição a Biot e Savart da formulação da expressão para o campo magnético devido a um elemento de corrente, são os erros mais constantes nos livros didáticos². Pelo contrário, veremos através do trabalho de Bertrand, que as expressões mais fundamentais da eletrodinâmica têm sua origem na teoria desenvolvida por Ampère.

Felizmente, com o objetivo de enriquecer o material sobre esse tema, atualmente vê-se o desenvolvimento de trabalhos de história e ensino de física em torno da Eletrodinâmica de Ampère e as discussões que a envolvem. Por exemplo, Braga *et al.* (2012) exploram no ensino de física o debate entre Biot e Ampère para a interpretação do experimento de Oersted. Já Dias e Dias (2015), usando de notação da época fundamentados em Chaib (2009), apresentaram um resumo dos cálculos principais desenvolvidos por Ampère relacionados aos casos

² No entanto, ainda nos é um mistério a origem das denominações que induzem a essas autorias mal atribuídas.

de equilíbrio. Recentemente dos Santos e Gardelli (2017) usam da configuração específica da força entre o fio condutor retilíneo infinito e uma espira condutora para ilustrar a equivalência do resultado integrado e levantar o debate sobre o ensino da (correta) Força de Ampère nos ambientes formais.

No entanto, existe a carência de materiais que permitam a exposição sucinta e rigorosa dos principais resultados obtidos por Ampère e, ao mesmo tempo, levante o principal debate ao redor desta teoria, a saber: a validade da terceira lei de Newton na interação entre elementos de correntes. Para dar conta exatamente desses pontos existe o trabalho em duas partes de J. Bertrand, “Demonstração dos teoremas relativos às ações eletrodinâmicas” (BERTRAND, 1874a,b). Este artigo viera justamente para dar um novo fôlego a essas questões à época, e “trazer simplificações notáveis a essas teorias tornadas clássicas” sem perder o ponto de vista epistemológico. Para isso, usa de apenas um caso de equilíbrio obtido por Ampère e da validade da terceira lei de Newton para enunciar os oito primeiros teoremas, e mais outro caso de equilíbrio para a dedução dos demais.

Sendo assim, a contextualização – relacionando com a forma moderna – e a tradução comentada do original em francês desse artigo, tanto atende o objetivo de aumentar o número de fontes primárias em língua portuguesa – cuja importância para o desenvolvimento do ensino da física (em nível superior, neste caso) e o estudo de sua epistemologia está bem destacado por Batista *et al.* (2015) e Fonseca *et al.* (2017) – como traz elementos virtualmente desconhecidos para se discutir e deduzir as relações fundamentais da eletrodinâmica.

II. J. Bertrand

Joseph Louis François Bertrand nasceu em Paris em 11 de março de 1822. Vale a pena notar que três meses após o nascimento de Bertrand, em 10 de junho, Ampère leria seu trabalho à Academia de Ciências (Ampère, 1822), apresentando a forma final para a expressão da força entre elementos de corrente. Para além dessa coincidência histórica, chamam atenção algumas semelhanças na formação infantil de ambos, que em tenra idade já dominavam o latim e despertaram o interesse em matemática.

Tendo falecido o seu pai, Alexandre Bertrand (1795-1831), o jovem Bertrand acabou por morar com Jean-Marie Duhamel (1797-1872), professor da Escola Politécnica. E com 11 anos de idade, lhe foi permitido assistir as aulas dessa Instituição. Sendo assim, em 1838, Bertrand se graduou em bacharel em artes e bacharel em ciência, e aos dezesseis anos recebeu seu doutorado em ciência ao defender o conjunto de teses “Sobre a teoria dos fenômenos termomecânicos; Seguido de: Sobre a distribuição da eletricidade na superfície dos corpos; Seguido de: Sobre a atração dos esferoides”, revelando suas áreas de interesse. Já em 1839 publicou um trabalho intitulado “Nota sobre alguns pontos da teoria da eletricidade” (BERTRAND, 1839). E, igual ao fundador da eletrodinâmica, em 1856 tornou-se membro da Academia de Ciências como matemático. Foi professor de física geral e de matemática no *Collège de Fran-*

ce, ocupando o lugar de Biot, e publicou diversos trabalhos científicos em física, matemática e também sobre a história da academia de ciências e de seus membros entre 1666 e 1793.



Fig. 1 – Joseph Bertrand, foto extraída de (A. F. Joseph Bertrand).

Em 1873, publicou o artigo “Teorema relativo ao movimento de um ponto atraído para um centro fixo” já citado anteriormente (Bertrand, 1873). Tornou-se secretário perpétuo em 1874, ano em que publicou o artigo “Demonstração dos teoremas relativos às ações eletrodinâmicas”. Em 1890, publicou suas notas de aula “Lições sobre a teoria matemática da eletricidade” (BERTRAND, 1890), na qual deixou explícita sua opção pela eletrodinâmica de Ampère e as interações diretas. Bertrand faleceu em 1900, com um grande reconhecimento acadêmico.

III. A Força de Ampère e Bertrand

Pouco se sabe que, na verdade, foi Ampère quem cunhou o nome, definiu as grandezas elementares, e fundou o estudo da eletrodinâmica – os efeitos devidos à interação entre correntes elétricas – sendo que em 1826 publicou o livro “Teoria dos Fenômenos Eletrodinâmicos Deduzida Unicamente da Experiência” (o *Théorie*) considerado por Williams (1981) como o *Principia* da eletrodinâmica. Entre outros assuntos, nele encontramos os quatro casos de equilíbrio sugeridos por Ampère para encontrar a expressão para sua força entre elementos de correntes, a saber, na forma moderna e no sistema internacional de unidades (S. I.):

$$\begin{aligned} d^2 \vec{F}_{I ds \rightarrow I' ds'} &= -\frac{\mu_0}{4\pi} I I' \frac{\hat{r}}{r^2} [2 (\vec{ds} \cdot \vec{ds}') - 3 (\hat{r} \cdot \vec{ds}) (\hat{r} \cdot \vec{ds}')] \\ &= -d^2 \vec{F}_{I' ds' \rightarrow I ds} \end{aligned} \quad (1)$$

Nesta equação, \hat{r} denota o versor da distância r que parte do ponto médio do elemento de corrente $I ds$ até o ponto médio do elemento $I' ds'$ (no escopo do texto escreveremos as grandezas vetoriais em negrito).

A análise dos passos de Ampère que culminaram na publicação do *Théorie* encontra-se em (ASSIS; CHAIB, 2011).

Apesar da obra magna de Ampère (1826) ter sua segunda reimpressão apenas em 1883 (Ampère, 1883), e primeira tradução completa apenas em 2009 (CHAIB, 2009), suas teorias se difundiram na Europa, constando inclusive, em diversos livros didáticos da segunda metade do século XIX (VERDET, 1868). Mas não faltavam aqueles que, descontentes com as consequências físicas e epistemológicas da teoria de Ampère, tentavam substituí-las por outras teorias, mesmo que estas violassem a terceira lei de Newton em sua forma elementar, tal como Grassmann (1845) e Reynard (1870).

Desta maneira, também era comum observar textos de cientistas defendendo a força de Ampère. Entre eles se encontrava J. C. Maxwell (1831-1879) o qual afirmou que, entre as teorias propostas até então, a de Ampère era “sem dúvidas a melhor, uma vez que é a única que faz as forças sobre os dois elementos não só iguais e opostas, mas ao longo da reta que as une” (MAXWELL, 1873, art. 527, p. 161). Igualmente, dentro do mesmo período, Bertrand escreveu que:

As leis descobertas por Ampère mantêm-se na ciência como uma base sólida e incontestável sobre a qual se apoiam com confiança os mesmos que tentam substituí-las por outras. É, com efeito, pelo acordo completo dos princípios propostos com os de Ampère — em todo o caso onde a verificação é realizável — que se acredita poder justificar as teorias novas. Os belos teoremas de nosso ilustre compatriota, portanto, mantêm hoje — como há cinquenta anos — a parte mais importante da teoria matemática dos fenômenos eletrodinâmicos (BERTRAND, 1874a, p. 297).

Esta é, na verdade, a abertura do trabalho “Demonstração dos teoremas relativos às ações eletrodinâmicas”, o qual aparece traduzido pela primeira vez neste artigo.

IV. Discussão de alguns teoremas

A. Origem dos Casos de Equilíbrio

Na época de Bertrand, boa parte da comunidade que se debruçava sobre os assuntos da eletrodinâmica conhecia os principais casos de equilíbrio desenvolvidos por Ampère. No entanto, hoje em dia esses experimentos são desconhecidos para a quase totalidade da comunidade científica. Assim, como Bertrand usa de dois casos de equilíbrio para a dedução de seus teoremas e mais um para ratificar suas hipóteses, é importante ao menos contextualizá-los.

Em 1820, ao contrário de seus conterrâneos, Ampère tanto reconheceu imediatamente o resultado do experimento de Oersted como foi além, e logo inferiu a possibilidade de que os fenômenos de forças atribuídos às partículas magnéticas eram, de fato, fenômenos de interação entre correntes elétricas (CHAIB; ASSIS, 2007b). Sendo assim, iniciou um programa teórico e experimental que incluiu simular todos os fenômenos magnéticos (interações ímã –

ímã) e eletromagnéticos (interações ímã – corrente elétrica) apenas de maneira eletrodinâmica (interações corrente-corrente). Ao mesmo tempo, buscou uma expressão matemática para modelar essa interação.

Por outro lado, a forma mais comum de se encontrar uma expressão matemática para a relação entre grandezas era o *método da interpolação*, que segundo Biot, acaba por ser “uma espécie de adivinhação” (BIOT, 1821, p. 233). Esse método consiste em realizar diversas medidas variando os valores dos parâmetros de entrada e, para cada medida, adquirir um valor de saída. Assim, com os pontos obtidos, tenta-se identificar a função mais provável dentro das variadas funções que se encaixam nos dados coletados, cujo comportamento estabeleceria uma relação coerente entre os parâmetros e sua evolução.

Isso foi um grande problema para Ampère. Como matemático tinha dificuldade de acesso aos laboratórios de física e os financiamentos que lhes dizem respeito – tanto que pagou do seu próprio bolso pela quase totalidade dos experimentos eletrodinâmicos que realizou (BLONDEL, 1982, p. 103 e 131) – ao mesmo tempo em que os experimentos careciam de sensibilidade para obter um número significativo de dados.

Assim, Ampère acabou por desenvolver o método dos casos de equilíbrio (ASSIS; CHAIB, 2011, p. 97) e (HOFMANN, 1987). Este, felizmente, era possível de ser aplicado, e ao mesmo tempo fornecia um resultado mais geral e confiante que o outro método citado. Desta forma, uma vez que se monte um circuito puramente eletrodinâmico com partes móveis, este método,

[...] consiste em constatar, pela experiência, que as partes móveis dos condutores permanecem, em certos casos exatamente em equilíbrio entre forças iguais, ou entre torques iguais qualquer que seja, além disso, a forma da parte móvel, e de procurar diretamente, com a ajuda do cálculo, qual deve ser o valor da ação mútua entre duas porções infinitamente pequenas, para que o equilíbrio seja efetivamente independente da forma da parte móvel (Ampère, 1822, p. 400).

Ou seja, era necessária apenas **uma única medida** – a constatação do estado de equilíbrio – para se extrair uma relação geral. Desta maneira, Ampère teve de encontrar os experimentos corretos; enunciar as leis gerais que estes experimentos induzem (tal como as leis de Kepler); e daí deduzir a expressão para a força entre elementos de correntes. Assim, “teve de fazer sozinho todo o trabalho de Tycho Brahe, Kepler e Newton” (TRICKER, 1965, p. 36).

Ampère acabou por desenvolver diversos casos de equilíbrio. Na forma final de sua pesquisa, o fundador da eletrodinâmica deixou como sugestão em sua obra magna quatro experimentos de equilíbrio para deduzir a expressão da força entre elementos de correntes na seguinte ordem (ASSIS; CHAIB, 2011):

1. O caso de equilíbrio das correntes antiparalelas;
2. O caso de equilíbrio do fio sinuoso;
3. O caso de equilíbrio da não existência de força tangencial;
4. O caso de equilíbrio da lei da semelhança.

Do primeiro caso deduz-se que correntes em sentidos opostos exercem forças opostas sobre um terceiro circuito. Do segundo caso, deduz-se que os elementos de corrente podem ser tratados como grandezas vetoriais. Do terceiro caso deduz-se que a força resultante de um circuito fechado sobre um elemento de corrente é perpendicular a este elemento. Do quarto, uma vez que a forma elementar da força deve ser proporcional às dimensões lineares dos circuitos e inversamente proporcional à distância, ambos devem estar elevados ao mesmo fator de potência.

B. O Teorema I

Bertrand inicia suas deduções a partir do caso de equilíbrio da não existência de força tangencial, Fig. 2. Para entender o caso de equilíbrio, a Fig. 3 mostra um esquema tal como visto de cima para melhor compreensão.

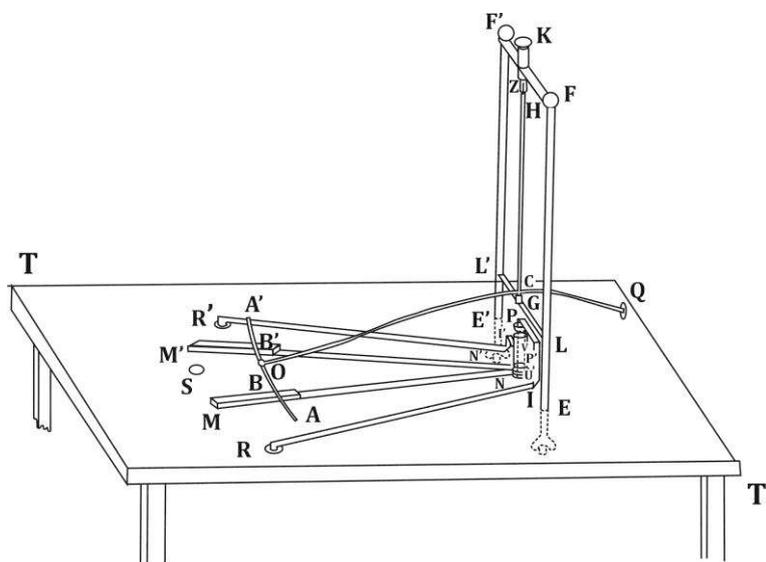


Fig. 2 – Representação de Ampère (1826) do caso de equilíbrio da não existência de força tangencial, melhorada por Chaib (2009).

O experimento consiste em um circuito fechado de maneira que a corrente elétrica de intensidade i passa pelos pontos RCB O B' GR 'S. Pela forma de construção do circuito, a porção RCG'R'S equivale a um circuito fechado com a pilha ocupando o mesmo caminho. O trecho BOB' consiste um condutor móvel em forma de arco de círculo com centro em GC. Esta parte móvel está solta, suas extremidades se encontram flutuando sobre o mercúrio que preenche as cavidades M e M'. Ainda, a haste presa em O e suspensa pelo fio ZP (Fig. 2) contrabalança o peso do arco pelo contrapeso em Q. As setas e as linhas ilustram o percurso da corrente elétrica i .

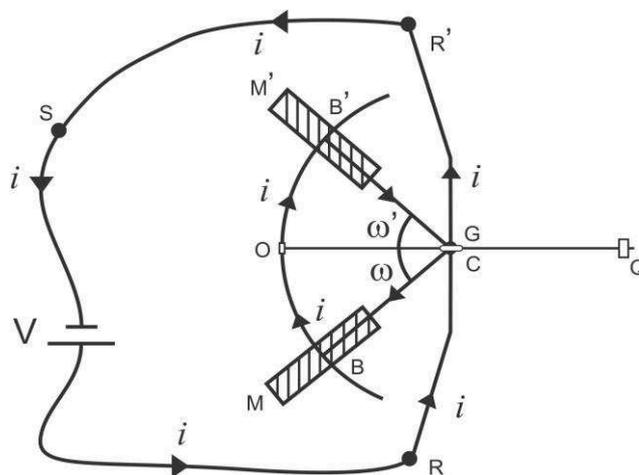


Fig. 3 – Esquema visto de cima por Assis e Chaib (2015).

O resultado experimental mostra que mesmo com a corrente i ligada o arco móvel permanece em equilíbrio quando está posicionado com seu centro em GC. Por outro lado, ao dispor o arco em uma posição descentralizada de GC, ele se movimenta ao ligar a corrente, deslizando sobre o mercúrio. Uma vez que este movimento ocorre apenas quando o centro do arco está fora de GC, e o arco móvel pode assumir diferentes tamanhos, isto implica que qualquer fração do arco não sente nenhuma força tangencial resultante do circuito fechado RCG'R'S.

Este experimento acabou por prover o resultado fundamental da eletrodinâmica que tem de ser satisfeito por qualquer teoria (seja de Grasmann, Reynard ou Maxwell), e que Bertrand enuncia como o primeiro de seus teoremas, a saber:

Teorema I – *A ação de uma corrente fechada sobre um elemento de corrente é sempre normal ao elemento atraído.*

Este caso, inclusive, foi o único caso de equilíbrio que teve tradução para o inglês na mesma época de sua concepção (AMPÈRE, 1825). Outro ponto a se destacar aqui, consiste em que Bertrand usa o verbo “atrair” e os termos atrator/atraído, para qualificar os elementos e circuitos interagentes. Isto se dá possivelmente para deixar claro que considera que a interação fundamental entre os elementos se dá através de repulsões e atrações, e não de torques. Isto se repetirá por todo o seu texto.

C. A Terceira Lei de Newton e os Teoremas II e III

Ao contrário de como está no texto de Bertrand, usaremos de notação moderna para analisar os teoremas deduzidos matematicamente. Assim, o leitor poderá usar a discussão desenvolvida aqui para estudar a dedução na tradução. Dito isto, enunciaremos o segundo teorema da seguinte forma:

Teorema II – Ao admitir com Ampère que a ação entre dois elementos ds e ds' , com intensidades i e i' , esteja direcionada seguindo a reta que lhes une e que possua a forma $T i i' ds ds'$, se terá:

$$T = \varphi(r) \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} . \quad (2)$$

Onde $\varphi(r)$ denota uma função da distância r entre os pontos médios dos elementos ds e ds' , cada um pertencente, respectivamente, a um arco de circuito s e s' .

Para a dedução deste teorema, tal como consta em seu enunciado, assumiremos que a expressão para a força entre os elementos de corrente ids e $i'ds'$ terá de ser proporcional ao produto dessas grandezas com uma função $T = T\hat{r}$. Esta última condição faz com que a força entre os elementos de corrente esteja conforme a terceira lei de Newton (ou seja, ao longo da reta que os une). Assim,

$$d^2 \vec{F} = (i ds i' ds' T) \hat{r} . \quad (3)$$

A variável r acaba por ser uma função que pode ser parametrizada em função dos arcos, $r(s, s')$. Denotando por θ e θ' , respectivamente, os ângulos que os elementos ds e ds' fazem com a direção \hat{r} , e por ε o ângulo dos elementos entre si, temos que T é uma função $T(r, \varepsilon, \theta, \theta')$.

Além do mais, como demonstrado com notação moderna em Chaib (2018, p. 61-62), usando do produto escalar temos que:

$$\cos \theta = \frac{\partial r}{\partial s} ; \quad \cos \theta' = -\frac{\partial r}{\partial s'} ; \quad \cos \varepsilon = -\frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} - r \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} . \quad (4)$$

Ao mesmo tempo, por conta da força estar ao longo de \hat{r} , o módulo da projeção da força elementar ao longo de ds' corresponde à componente $d^2 F \cos \theta'$. Assim, ao considerar a ação do circuito fechado s sobre um elemento ds' , o resultado do caso de equilíbrio da não existência de força tangencial (o teorema I) nos diz que a resultante das contribuições da força ao longo de ds' é nula, de tal forma que:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_s d^2 F \cos \theta' = \oint_s (i ds i' ds' T) \frac{\partial r}{\partial s'} \Rightarrow \\ 0 &= \oint_s T \frac{\partial r}{\partial s'} ds . \end{aligned} \quad (5)$$

Se esta integral é nula qualquer que seja o caminho fechado s , isto implica que existe uma função Φ tal que:

$$T \frac{\partial r}{\partial s'} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} . \quad (6)$$

Como T não depende de $\partial^2 r / \partial s^2$, a função Φ deve depender de r e $\partial r / \partial s'$, mas não de $\partial r / \partial s$. Assim, ao fazer $\rho' = \partial r / \partial s'$, temos a função $\Phi(r, \rho')$, então, da equação (6),

$$\begin{aligned}
T \cdot \rho' &= \frac{\partial \Phi}{\partial s} \Rightarrow \\
T \cdot \rho' &= \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{\partial \Phi}{\partial \rho'} \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} \Rightarrow \\
T &= \frac{1}{\rho'} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{1}{\rho'} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho'} \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} .
\end{aligned} \tag{7}$$

Veja-se que, por sua vez, a força do circuito fechado s' sobre o elemento ds também deve ser perpendicular a este elemento, o que gera uma simetria necessária com relação a s e s' na função T . Desta maneira, se $\rho = \partial r / \partial s$, e $\Theta = \Theta(r, \rho)$,

$$\frac{1}{\rho'} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho'} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} , \tag{8}$$

o que obriga este produto ser independente de $\partial r / \partial s$ e de $\partial r / \partial s'$, dependendo apenas de r . Por isso,

$$\frac{1}{\rho'} \frac{\partial \Phi}{\partial \rho'} = \varphi(r) . \tag{9}$$

Assim, integrando em ρ' ,

$$\Phi = \varphi(r) \frac{\rho'^2}{2} + \psi(r) . \tag{10}$$

Substituindo a equação (10) na equação (7), reescrevendo ρ' como a derivada parcial, e aplicando a condição de contorno (ver na tradução, implicando em $\partial \psi / \partial r \equiv 0$) chega-se na equação (2).

Indo um pouco além, para deixar de uma maneira comparável à equação (1), substituiremos a equação (2) em (3); aplicaremos as devidas transformações (CHAIB, 2018),

$$d^2 \vec{F} = -i i' \frac{\hat{r}}{r} \left[\varphi(r) (d\vec{s} \cdot d\vec{s}') - \left(\varphi(r) - \frac{r}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) (\hat{r} \cdot d\vec{s}) (\hat{r} \cdot d\vec{s}') \right] . \tag{11}$$

Desta notação é fácil observar que:

Teorema III – *A ação de um elemento ds de intensidade i , sobre um elemento ds' de intensidade i' , pode ser substituída pela ação de três elementos dx , dy , dz de mesma intensidade i , orientados paralelamente aos eixos de coordenadas X , Y , Z e iguais às projeções de ds sobre esses eixos.*

Ou seja, a força de um elemento de corrente ids sobre $i'ds'$ ser equivalente à soma vetorial das forças de três elementos de corrente distintos idx , idy , e idz sobre $i'ds'$, acaba por ser uma **consequência direta do teorema I mais a 3ª lei de Newton!**

Por outro lado, o teorema III foi uma consequência enunciada por Ampère de forma independente, obtida experimentalmente com o caso de equilíbrio do fio sinuoso. Nele, Ampère observou que uma corrente sinuosa iniciando no ponto R e terminando em S, exercerá a mesma força que um fio retilíneo que inicia e termina sobre os mesmos pontos.

Disto, Bertrand desenvolve a linha de raciocínio seguinte (BERTRAND, 1874a, p. 301). Imaginemos que Ampère fizera os mesmos passos de Bertrand de maneira que — por meio do teorema I e assumindo a ação e reação ao longo da reta que une os elementos interagentes — deduzisse o teorema III. E na sequência, para testar este teorema, concebesse e realizasse o experimento do caso de equilíbrio do fio sinuoso. Ao confirmar o resultado, isto não seria um forte argumento “*em favor da hipótese que a conduziu? A ordem nas quais as verdades são descobertas e o momento no qual foram assinaladas sua dependência mútua mudam em qualquer coisa as suas probabilidades*”?

D. A “Diretriz” para os demais teoremas

Para auxiliar na dedução dos demais teoremas, a partir do teorema IV, Bertrand lança mão de uma ferramenta matemática desenvolvida por Ampère, a reta denotada aqui por G e denominada como *diretriz* (ASSIS; CHAIB, 2011, p. 177-183). Por outro lado, Bertrand deduz as propriedades dessa reta de uma maneira mais simplificada e intuitiva que Ampère. Aqui apresentaremos em notação moderna, e com um pouco mais de detalhe para comparar com expressões mais familiares na física.

Em primeiro lugar vamos expressar as componentes x , y e z da força de um circuito fechado s com intensidade de corrente i sobre o elemento de corrente $i'ds'$ da seguinte forma:

$$\begin{cases} dF_x = i i' X ds' = dF_{x1} + dF_{x2} , \\ dF_y = i i' Y ds' = dF_{y1} + dF_{y2} , \\ dF_z = i i' Z ds' = dF_{z1} + dF_{z2} . \end{cases} \quad (12)$$

As funções X , Y e Z denotam implicitamente as integrais fechadas sobre o circuito s da função T nas respectivas direções das forças.

Do teorema III temos que o elemento ds' pode ser decomposto em suas componentes ao longo de cada um dos três eixos cartesianos. Do teorema I, a força do circuito fechado será perpendicular para cada componente. Assim, temos que a força sobre o elemento dx' terá componentes dF_{y1} e dF_{z1} da força resultante, de tal forma que:

$$dF_{y1} = i i' R_1 dx' \quad \text{e} \quad dF_{z1} = i i' Q_1 dx' .$$

(13a)

Analogamente, para as componentes sobre dy' e dz' , temos:

$$dF_{x1} = i i' R_2 dy' \quad \text{e} \quad dF_{z2} = i i' P_1 dy' . \quad (13b)$$

E,

$$dF_{x2} = i i' Q_2 dz' \quad \text{e} \quad dF_{y2} = i i' P_2 dz' . \quad (13c)$$

Veja-se que os termos $R_1, R_2, P_1, P_2, Q_1, Q_2$, denotam integrais fechadas a serem descobertas mais adiante. Assim, substituindo os resultados acima em (12),

$$\begin{cases} X ds' = R_2 dy' + Q_2 dz' , \\ Y ds' = R_1 dx' + P_2 dz' , \\ Z ds' = Q_1 dx' + P_1 dy' . \end{cases} \quad (14)$$

Realizando os produtos,

$$(X ds') \frac{\partial x}{\partial s'} , \quad (Y ds') \frac{\partial y}{\partial s'} \quad \text{e} \quad (Z ds') \frac{\partial z}{\partial s'} , \quad (15)$$

e efetuando a sua soma, encontramos

$$X dx' + Y dy' + Z dz' = (P_2 + P_1) dy' \frac{\partial z}{\partial s'} + (Q_2 + Q_1) dz' \frac{\partial x}{\partial s'} + (R_2 + R_1) dx' \frac{\partial y}{\partial s'} . \quad (16)$$

A expressão na esquerda da equação (16) corresponde à componente da força ao longo do elemento ds' . Porém, por conta do teorema I, sabemos que seu valor é nulo. Isto implica que os termos da direita,

$$P_2 = -P_1 = G_x \quad , \quad Q_1 = -Q_2 = G_y \quad \text{e} \quad R_2 = -R_1 = G_z . \quad (17)$$

Desta maneira, usando das equações (12) e (17), chegamos que

$$\begin{cases} dF_x = i i' (G_z dy' - G_y dz') , \\ dF_y = i i' (G_x dz' - G_z dx') , \\ dF_z = i i' (G_y dx' - G_x dy') . \end{cases} \quad (18)$$

E, tomando o valor

$$G = \sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2} , \quad (19a)$$

ao denotar por α o ângulo entre o elemento ds' e a reta G , o módulo da força será

$$dF = i i' ds' G \text{ sen}(\alpha) . \quad (19b)$$

Ou seja, Bertrand chega de uma maneira mais sintética ao resultado de Ampère, a saber: A força de um circuito fechado s sobre um elemento de corrente $i' ds'$ será perpendicular ao plano definido por este elemento e a *reta diretriz* G .

Na sequência, para encontrar as expressões para G_x , G_y e G_z , Bertrand usa de um artifício perspicaz. Começaremos por reescrever T a partir da equação (2):

$$\begin{aligned} \vec{T} = T\hat{r} &= \left[\varphi(r) \frac{\partial^2 r}{\partial s \partial s'} + \frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial s'} \right] \hat{r} = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{\partial r}{\partial s'}} \frac{\partial}{\partial s} \left[\varphi(r) \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 \right] \hat{r} . \end{aligned} \quad (20)$$

Por sua vez, para encontrar o módulo da força do circuito s atuando ao longo do eixo y ,

$$\begin{aligned} i i' ds' \oint_s \vec{T} \cdot \hat{y} ds &= \\ &= i i' ds' \oint_s \frac{y' - y}{r} \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{\partial r}{\partial s'}} \frac{\partial}{\partial s} \left[\varphi(r) \left(\frac{\partial r}{\partial s'} \right)^2 \right] ds . \end{aligned} \quad (21)$$

Agora, o ponto crucial está em lembrar que o termo $\partial r / \partial s'$ denota um cosseno do ângulo entre \hat{r} e o elemento ds' . Assim, como este elemento pode ser decomposto nas direções cartesianas, ao tomar a força de s sobre um elemento dz' , por exemplo, e observando a segunda expressão em (13c), e lembrando (17), temos:

$$G_x = \oint_s \frac{y - y'}{z - z'} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} \left[\varphi(r) \left(\frac{z - z'}{r} \right)^2 \right] ds . \quad (22)$$

Integrando por partes, e desenvolvendo o mesmo procedimento sobre os demais elementos dx' e dy' encontramos:

$$\begin{cases} G_x = \oint_s \frac{\varphi(r)}{2r^2} [(y - y') dz - (z - z') dy] , \\ G_y = \oint_s \frac{\varphi(r)}{2r^2} [(z - z') dx - (x - x') dz] , \\ G_z = \oint_s \frac{\varphi(r)}{2r^2} [(x - x') dy - (y - y') dx] . \end{cases} \quad (23)$$

Além do mais, ao derivar (23), encontra-se

$$\begin{cases} \frac{\partial G_x}{\partial x'} = \oint_s [(y - y') dz - (z - z') dy] \frac{x' - x}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi(r)}{2r^2} , \\ \frac{\partial G_y}{\partial y'} = \oint_s [(z - z') dx - (x - x') dz] \frac{y' - y}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi(r)}{2r^2} , \\ \frac{\partial G_z}{\partial z'} = \oint_s [(x - x') dy - (y - y') dx] \frac{z' - z}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\varphi(r)}{2r^2} , \end{cases} \quad (24)$$

que, ao realizar a sua soma, Bertrand verifica o seguinte resultado:

$$\frac{\partial G_x}{\partial x'} + \frac{\partial G_y}{\partial y'} + \frac{\partial G_z}{\partial z'} = 0 . \quad (25)$$

Veja-se que G é uma grandeza puramente geométrica. Além do mais, os sinais em (17) foram escolhidos arbitrariamente. Isto implica que, por sua origem física, a diretriz consiste em uma reta não orientada. No entanto, podemos criar um *pseudo-vetor* determinando seu sentido com a regra da mão direita. Então, ao assumir,

$$\vec{G} = G_x \hat{x} + G_y \hat{y} + G_z \hat{z} , \quad (26)$$

pode-se expressar (23), da seguinte maneira,

$$\vec{G} = \oint_s \frac{\varphi(r)}{2r} (d\vec{s} \times \hat{r}) . \quad (27)$$

Isto nos leva também a apresentar (18) e (25) como:

$$d\vec{F} = i i' (d\vec{s}' \times \vec{G}) \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \vec{G} = 0 . \quad (28)$$

V. Considerações finais

Sobre a função $\varphi(r)$, Bertrand faz uso do resultado experimental enunciado no teorema IX (ver tradução) para chegar ao teorema X, onde determina que $\varphi(r) = 2A/r$, sendo A uma constante.

O produto ii' nas unidades eletrodinâmicas assume o valor $(\mu_0/4\pi) II'$ no sistema internacional, e $A=I$. Assim, pode-se partir da equação (11) e chegar à força de Ampère, equação (1).

Destaca-se que apenas com o teorema I e supondo a ação e reação ao longo da reta que une os elementos chegou-se às expressões em (28), as quais, ao definir

$$\vec{B} \equiv I \frac{\mu_0}{4\pi} \vec{G} , \quad (29)$$

elas podem tomar as conhecidas formas,

$$d\vec{F} = I' d\vec{s}' \times \vec{B} \quad \text{e} \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 . \quad (30)$$

Além do mais, sabendo o valor da função $\varphi(r)$, temos também que:

$$\vec{B} \equiv \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_s \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} . \quad (31)$$

Ao contrário do que se conta, o resultado equivalente às equações acima, na época, foi obtido em primeira mão por Ampère.

Também gostaríamos de chamar a atenção para o teorema XII, com o qual Bertrand chega ao resultado de Ampère da *equivalência entre um dipolo magnético e um circuito fechado* de intensidade i e superfície ω com normal \hat{n} , de tal forma que o momento de dipolo μ

$$\vec{\mu} = i \omega \hat{n}. \quad (32)$$

Esta é considerada uma relação fundamental que estabelece a identidade entre o magnetismo e a eletrodinâmica (ASSIS; CHAIB, 2011, p. 200-201 e 288-289).

Por fim, com este trabalho, esperamos dar mais visibilidade a J. Bertrand e seus trabalhos. Igualmente, esperamos elucidar algumas questões históricas que envolvem a eletrodinâmica, suas relações fundamentais, e fornecer um material de estudo para fomentar a discussão fora e dentro da sala de aula.

VI. Tradução

[Observações do tradutor: Todos os termos entre colchetes pertencem à tradução. Igualmente, mudanças de símbolos e fórmulas com relação ao original foram destacadas nas notas. As paginações do original foram destacadas para referência e comparação.]

[297]

Demonstração dos teoremas relativos às ações eletrodinâmicas

Pelo Sr. J. Bertrand

As leis descobertas por Ampère mantêm-se na ciência como uma base sólida e incontestável sobre a qual se apoiam com confiança os mesmos que tentam substituí-las por outras. É, com efeito, pelo acordo completo dos princípios propostos com os de Ampère – em todo o caso onde a verificação é realizável – que se acredita poder justificar as teorias novas. Os belos teoremas de nosso ilustre compatriota, portanto, mantêm hoje – como há cinquenta anos – a parte mais importante da teoria matemática dos fenômenos eletrodinâmicos.

Na urgência de atingir o objetivo, e feliz em superar as dificuldades inextricáveis à primeira vista, Ampère estava pouco preocupado na elegância das demonstrações, e até, por simplificá-las, frequentemente diminuiu-se a sua generalidade. Isto se dá, por exemplo, quando, ao invés de procurar as duas funções da distância que sua análise introduz, ele admite sem provas que elas são proporcionais a uma mesma potência da variável, e que a proporção entre elas é constante.

Após propor o problema distintamente, Ampère lhe daria a solução exata. Os geômetras, debruçando-se ali diversas vezes, não deixaram de estabelecer que ela é a única que pode concordar com os axiomas admitidos por ele. Entretanto, acredito, pode-se ainda trazer simplificações notáveis a essas teorias tornadas clássicas. Tal é o objetivo do presente texto.

Teorema I – A ação de uma corrente fechada sobre um elemento de corrente é sempre normal ao elemento atraído.

Este teorema, demonstrado pela experiência, é o ponto de partida da teoria de Ampère.³ Disto pode-se deduzir somente pelo raciocínio, como mostrei à frente, que ao admitir que a ação entre dois elementos esteja dirigida ao longo da reta que lhes une, um condutor qualquer pode ser substituído por um condutor sinuoso o qual serpenteia em volta do primeiro, se desviando dele de maneira infinitesimal e cortando-o uma infinidade de vezes. É esse segundo teorema⁴, consi-

[298]

derado por Ampère como distinto do primeiro, que lhe permite formar a lei elementar na qual figuram duas funções desconhecidas, ligadas, em virtude do teorema I, por uma relação necessária.

Pode-se substituir essa primeira parte da teoria de Ampère – acredito, com grande vantagem – pela demonstração direta do teorema que segue:

Teorema II – Ao admitir com Ampère que a ação entre dois elementos ds e ds' , de intensidades i e i' , está direcionada seguindo a reta que lhes une e que possua a forma $T ii' ds ds'$, se terá.

$$T = \varphi(r) \frac{d^2 r}{ds ds'} + \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} ,$$

onde $\varphi(r)$ denota uma função da distância r entre os dois elementos e s, s' os arcos computados sobre os circuitos considerados, e a distância r é evidentemente, dentro de cada caso, uma função determinada.

[DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA II]

Uma vez que r está definida em função de s e de s' , representam-se facilmente os ângulos θ e θ' formados [respectivamente] pelos elementos ds e ds' com a linha que os une, e o ângulo ε formado pela direção entre esses elementos. Assim, tem-se⁵

$$\begin{cases} \cos \theta &= \frac{dr}{ds} , \\ \cos \theta' &= -\frac{dr}{ds'} , \\ \cos \varepsilon &= -\frac{dr}{ds} \frac{dr'}{ds'} - r \frac{d^2 r}{ds ds'} . \end{cases} \quad (1)$$

³ [N. T.] Bertrand deve referir-se segundo a sua proposta de demonstração simplificada, pois, como discutido na seção anterior, o ponto de partida de Ampère em sua obra magna é o *caso de equilíbrio das correntes antiparalelas*.

⁴ [N. T.] Agora sim, tratando-se da ordem que consta no *Théorie*, esta é de fato a segunda lei extraída experimentalmente através do *caso de equilíbrio do fio sinuoso*.

⁵ [N. T.] Por um erro tipográfico, o último termo da última linha está escrito originalmente como $d^2 r/ds$.

Estas fórmulas são bastante conhecidas para se demonstrar⁶.

A função T só pode depender evidentemente das quantidades r , θ , θ' , e ε , e ela pode ser expressa, conseqüentemente, em função das quantidades equivalentes r , dr/ds , dr/ds' , $d^2r/dsds'$. Para que o teorema I esteja exato, é preciso e é suficiente que a integral

$$T \frac{dr}{ds'} ds \quad (2)$$

[299]

seja nula todas as vezes que a integração se estender sobre os elementos ds de um circuito fechado — considerado como atraindo o elemento ds' — pois a expressão (2) é evidentemente a componente tangencial dessa mesma atração. Para que uma integral se anule todas as vezes que ela se estender sobre os elementos ds de um circuito fechado, é preciso e é suficiente — como dito — que a função integrada Tdr/ds' seja a diferencial de s de uma função $F(r, dr/ds)$.⁷ E dr/ds não deve aparecer nela posto que T não contém d^2r/ds^2 . Deve-se ter então, assumindo $dr/ds' = r'_1$,

$$T \frac{dr}{ds'} = \frac{dF}{dr} \frac{dr}{ds} + \frac{dF}{dr'_1} \frac{d^2r}{ds ds'} \quad (3)$$

De acordo com esta fórmula, T é de primeiro grau com relação à $d^2r/dsds'$, e o coeficiente desta segunda derivada, na expressão de T é⁸:

$$\frac{\frac{dF}{dr'_1}}{\frac{dr}{ds'}} = \frac{\frac{dF}{dr'_1}}{r'_1} \quad .$$

Vê-se que ele é independente de dr/ds , e deve então o ser igualmente de dr/ds' , por causa da simetria necessária com relação aos dois elementos ds e ds' , e se terá [este coeficiente]

$$\frac{\frac{dF}{dr'_1}}{r'_1} = \varphi(r) \quad .$$

Sendo $\varphi(r)$ função da variável única r , deduz-se disto

$$F = \varphi(r) \frac{r'_1{}^2}{2} + \psi(r) \quad .$$

E a equação (3) fornece, substituindo r'_1 por seu valor dr/ds ,

⁶ [N. T.] Para demonstração, ver os seguintes trabalhos: Chaib (2009); Assis e Chaib (2011); Chaib (2018), este último usando de notação moderna.

⁷ [N. T.] A função F aqui, foi denotada por Φ na seção anterior para não confundir com a força.

⁸ [N. T.] Por um erro tipográfico, no lado esquerdo está escrito originalmente dF/dr_1 .

$$T = \varphi(r) \frac{d^2 r}{ds ds'} + \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} + \frac{d\psi}{dr} \frac{\frac{dr}{ds}}{\frac{dr}{ds'}} . \quad (4)$$

[300]

O último termo deve ser suprimido evidentemente. Pois, se o conservar, T se tornaria infinito na medida em que dr/ds' é nulo, ou seja, quando a linha que une os dois elementos for perpendicular a ds' . A expressão, ademais, não seria simétrica com relação ao ds e ao ds' .⁹ Então deve-se ter

$$T = \varphi(r) \frac{d^2 r}{ds ds'} + \frac{1}{2} \frac{d\varphi}{dr} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} . \quad (5)$$

Esta é a fórmula anunciada [no teorema II]. As equações (1) permitem que se dê à ela a forma

$$T = \cos \theta \cos \theta' \left[\frac{\varphi(r)}{r} - \frac{1}{2} \varphi'(r) \right] - \frac{\varphi(r)}{r} \cos \varepsilon . \quad (6)$$

Teorema III – *A ação de um elemento ds de intensidade i , sobre um elemento ds' de intensidade i' , pode ser substituída pela [ação] de três elementos dx , dy , dz de mesma intensidade i , orientados paralelamente aos eixos de coordenadas X , Y , Z e iguais às projeções de ds sobre esses eixos.*

[DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA III]

Tem-se identicamente,

$$\begin{cases} \cos \theta &= \frac{dx}{ds} \cos(r, X) + \frac{dy}{ds} \cos(r, Y) + \frac{dz}{ds} \cos(r, Z) , \\ \cos \varepsilon &= \frac{dx}{ds} \cos(ds', X) + \frac{dy}{ds} \cos(ds', Y) + \frac{dz}{ds} \cos(ds', Z) . \end{cases} \quad (7)$$

Ora, a substituição indicada no enunciado do teorema tem seu resultado precisamente por substituir – no segundo termo da fórmula (6) – $\cos \theta$ e $\cos \varepsilon$ pelos valores dados nas fórmulas em (7).

Ampère toma emprestado este teorema III da experiência, o qual serve de ponto de partida às suas demonstrações. Ele é, percebe-se, como havíamos anunciado, uma consequência necessária do teorema I. Por esta observação, a teoria se encontra fundada sobre um número menor de leis experimentais.

⁹ [N. T.] Pois, como explorado na seção anterior, o circuito fechado s' também exerce uma força perpendicular à ds , então a integral de Tdr/ds no caminho fechado s' também deve ser nula.

Isto nos permitirá adicionar uma observação relativa à probabilidade da hipótese fundamental, tão natural nela mesma, aceita por Ampère: A ação entre dois elementos está direcionada ao longo da reta que os une¹⁰.

[301]

Suponhamos que Ampère, o qual descobriu experimentalmente os teoremas I e III, teria verificado e enunciado de início o teorema I, e que, apenas pelo raciocínio – assim como o fizemos [aqui] – teria deduzido dali o teorema III, ele poderia ter dito “se a ação de dois elementos é, como me parece provável, direcionada ao longo da reta que os une, é preciso necessariamente que um condutor sinuoso exerça a mesma ação que um condutor retilíneo seguindo a mesma direção”. Vindo a experiência em seguida confirmar esta previsão, não seria ela vista com razão como uma prova em favor da hipótese que a conduziu? A ordem nas quais as verdades são descobertas e o momento no qual foram assinaladas sua dependência mútua mudam em qualquer coisa as suas probabilidades?

O elemento atraído, assim como o elemento atrator, pode ser substituído pelas três projeções, e a demonstração é absolutamente a mesma.

Teorema IV – *A ação de um circuito fechado sobre um elemento ds' , é – em cada ponto do espaço onde se supõe posicionado ds' – perpendicular a uma reta D , denominada por Ampère como diretriz, a qual – bem entendido, dependendo da forma e da posição do circuito atrator – é independente da direção de ds' . A ação resultante do circuito fechado – perpendicular às retas ds' e D – é proporcional ao seno do ângulo formado por essas duas linhas.*

[DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA IV]

A ação de um circuito fechado sobre o elemento ds' é a resultante das ações exercidas sobre as projeções dx' , dy' , dz' de ds' . A ação sobre dx' , sendo perpendicular à dx' , tem duas componentes paralelas somente ao eixo dos Y e dos Z ,

$$Y_1 = R_1 dx', \quad Z_1 = Q_1 dx'.$$

A ação sobre dy' , tem duas componentes paralelas ao X e ao Z ,

$$X_1 = R_2 dy', \quad Z_2 = P_2 dx'^{11},$$

e ação sobre dz' , por fim, tem por componentes paralelas ao X e ao Y ,

¹⁰ [N. T.] Ou seja, a terceira lei de Newton tem de ser válida na expressão para elementos de correntes. Apesar de esta hipótese lhe parecer natural, Ampère desenvolveu também um conjunto de experimentos no final de sua obra magna para demonstrar que este princípio deve ser adotado na força entre elementos de corrente (Ampère, 1826, págs. 165-171). Por esses experimentos induziu que, independente da expressão adotada para a força e a maneira como se origina, *a ação eletrodinâmica de um sistema sólido não pode causar mudança de seu próprio estado de movimento com relação a um referencial externo* – consequência direta da terceira lei de Newton.

¹¹ Por um erro tipográfico está escrito Z_1 outra vez, ao invés de Z_2 .

$$X_2 = Q_3 dx', \quad Y_2 = P_3 dx'.$$

$R_1, Q_1, R_2, P_2, Q_3, P_3$, evidentemente dependendo somente das coordenadas

[302]

do elemento ds' , e não dependendo de sua direção. As três componentes da ação total exercida sobre ds' são, de acordo com isso,

$$\begin{cases} X ds' = Q_3 dz' + R_2 dy' , \\ Y ds' = R_1 dx' + P_3 dz' , \\ Z ds' = P_2 dy' + Q_1 dx' . \end{cases} \quad (8)$$

Ademais, a ação sendo normal à ds' , deve-se ter

$$Xdx' + Ydy' + Zdz' = 0,$$

e isto exige evidentemente, uma vez que dx', dy', dz' são arbitrários, que

$$Q_3 + Q_1 = 0, \quad R_2 + R_1 = 0, \quad P_3 + P_2 = 0.$$

As equações em (8) tornam-se então, suprimindo-se os índices das letras

$$\begin{cases} X ds' = R dy' - Q dz' , \\ Y ds' = P dz' - R dx' , \\ Z ds' = Q dx' - P dy' . \end{cases} \quad (9)$$

Para interpretá-los, imaginemos uma força¹² G aplicada ao elemento ds' e tendo por componentes P, Q, R . O paralelogramo construído por esta força e pelo elemento ds' terá evidentemente por projeções sobre os planos de coordenadas os segundos termos das equações em (9), e Xds', Yds', Zds' serão as projeções sobre os três eixos de uma reta normal ao plano deste paralelogramo de superfície com valor $Gds' \sin \alpha$, denotando α o ângulo de ds' com a reta G . Isto é precisamente no que consiste o teorema IV.

Teorema V – *Sendo dado o circuito atrator, os valores dos coeficientes P, Q, R , que aparecem nas fórmulas em (9), podem, em cada ponto do espaço, ser expressos pelas seguintes integrais¹³:*

¹² [N. T.] A “força” G indicada por Bertrand é uma grandeza vetorial com componentes P, Q e R ao longo dos eixos X, Y e Z , respectivamente. Essa “força” G orientada não deve ser confundida com a diretriz D , que representa uma reta não orientada.

¹³ [N. T.] Originalmente está escrito $\varphi(r)/r^2$ mas, pela dedução, veremos que deve ser $\varphi(r)/2r^2$.

$$\begin{cases} P = \int \frac{\varphi(r)}{2r^2} [(y - y')dz - (z - z')dy] , \\ Q = \int \frac{\varphi(r)}{2r^2} [(z - z')dx - (x - x')dz] , \\ R = \int \frac{\varphi(r)}{2r^2} [(x - x')dy - (y - y')dx] . \end{cases} \quad (10)$$

[303]

Sendo a função $\varphi(r)$ aquela que aparece na expressão da força elementar, fórmula (5), x', y', z' as coordenadas do elemento atraído ds' , e x, y, z aquelas de um ponto qualquer do circuito atrator.

[DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA V]

Formemos, por exemplo, a expressão do coeficiente P , de tal forma que resulte de sua definição. Ele é, de acordo com a notação adotada, a componente paralela ao eixo dos Y das ações exercidas sobre um elemento dz' paralelo ao eixo dos Z , e disposto sobre o ponto cujas coordenadas são x', y', z' . Para calculá-la, retomemos a fórmula geral (5)

$$T = \varphi(r) \frac{d^2 r}{ds ds'} + \frac{1}{2} \frac{\varphi}{dr} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} = \frac{1}{2 \left(\frac{dr}{ds'}\right)} \frac{d}{ds} \left[\varphi(r) \left(\frac{dr}{ds'}\right)^2 \right] ;$$

para calcular P , é preciso multiplicar a ação Tds por $(y-y')/r$ – [que é o] cosseno do ângulo formado pela ação do elemento ds com o eixo dos Y – e integrar por todos os elementos ds do circuito atrator. Tem-se conseqüentemente,

$$P = \int \frac{y - y'}{r} \frac{1}{2 \left(\frac{dr}{ds'}\right)} \frac{d}{ds} \left[\varphi(r) \left(\frac{dr}{ds'}\right)^2 \right] ds . \quad (11)$$

[Mas] dr/ds' [é o] cosseno do ângulo formado pelo raio vetor r com o elemento atraído [que], [sendo este] direcionado ao longo do eixo dos Z , é igual a $(z-z')/r$, e a expressão (11) se torna

$$P = \int \frac{y - y'}{2(z - z')} \frac{d}{ds} \left[\frac{\varphi(r)}{r^2} (z - z')^2 \right] ds . \quad (12)$$

Integrando por partes, observando que – estando o circuito atrator fechado – a parte da integral que sai do sinal] é necessariamente igual a zero, e nós teremos

$$P = \int \frac{\varphi(r)}{2r^2} [(y - y')dz - (z - z')dy]$$

e se demonstrará da mesma maneira as duas outras fórmulas de (10).

Teorema VI – *As funções P , Q , R , cujas fórmulas estão definidas em (8) e que são*

[304]

funções das coordenadas x' , y' , z' do elemento atraído, qualquer que seja a forma do circuito atrator, satisfazem à equação¹⁴

$$\frac{dP}{dx'} + \frac{dQ}{dy'} + \frac{dR}{dz'} = 0. \quad (13)$$

[DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA VI]

Diferenciando as fórmulas em (10) e observando que

$$\frac{dr}{dx'} = \frac{x' - x}{r}, \quad \frac{dr}{dy'} = \frac{y' - y}{r}, \quad \frac{dr}{dz'} = \frac{z' - z}{r},$$

se encontra

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dP}{dx'} = \int [(y - y')dz - (z - z')dy] \frac{x' - x}{r} \frac{d}{dr} \frac{\varphi(r)}{2r^2}, \\ \frac{dQ}{dy'} = \int [(z - z')dx - (x - x')dz] \frac{y' - y}{r} \frac{d}{dr} \frac{\varphi(r)}{2r^2}, \\ \frac{dR}{dz'} = \int [(x - x')dy - (y - y')dx] \frac{z' - z}{r} \frac{d}{dr} \frac{\varphi(r)}{2r^2}. \end{array} \right.$$

Somando-os e observando que as integrações se relacionam todas aos elementos do circuito atrator, é possível reunir as integrais em uma só, e encontra-se

Teorema VII – *No momento em que uma corrente [em um condutor] móvel se desloca na presença de uma corrente [em um condutor] fixo o qual lhe atrai, o trabalho desenvolvido pelas forças que agem sobre ele depende somente da posição inicial e da posição final do circuito [móvel]: ele é independente da série de posições intermediárias.*

$$\frac{dP}{dx'} + \frac{dQ}{dy'} + \frac{dR}{dz'} = 0.$$

[DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA VII]

Consideremos um elemento atraído ds' que se desloca de maneira infinitesimal. As coordenadas x' , y' , z' , tornam-se $(x' + \delta x')$, $(y' + \delta y')$, $(z' + \delta z')$. O trabalho das forças Xds' , Yds' , Zds' que agem sobre ele é [igual a]

¹⁴ [N. T.] Como discutido na seção anterior, essas equações correspondem ao resultado $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$.

$$ds'(X\delta x' + Y\delta y' + Z\delta z'),$$

ou seja, substituindo X, Y, Z , por seus valores em (9),

$$P(dy'\delta z' - dz'\delta y') + Q(dz'\delta x' - dx'\delta z') + R(dx'\delta y' - dy'\delta x'). \quad (14)$$

[305]

Os binômios que multiplicam P, Q, R representam as projeções do paralelogramo [infinitesimal] descrito pelo elemento ds' ao longo do movimento considerado, e denotaremos [este paralelogramo por] $d\omega$. Se, então P, Q, R são as componentes de uma força G , fazendo um ângulo que denominaremos (N, G) com a [reta] normal à $d\omega$, o trabalho (14) pode ser substituído pela integral¹⁵:

$$\int G d\omega \cos(N, G). \quad (15)$$

Ela se estende sobre todos os elementos da superfície descrita pela curva G' [composta por todos os elementos ds'] durante seu deslocamento¹⁶. Para demonstrar que essa integral depende somente das posições extremas da curva, é suficiente mostrar evidentemente que ela é nula quando a estendemos sobre uma superfície fechada qualquer. Para alcançar isso, considere-mos a equação

$$0 = \iiint dx' dy' dz' \left(\frac{dP}{dx'} + \frac{dQ}{dy'} + \frac{dR}{dz'} \right), \quad (16)$$

onde a integral tripla se estende sobre todos os elementos de volume internos à superfície fechada que se considera. Esta equação é [um resultado] evidente, uma vez que, de acordo com o teorema VI, a função integrada é identicamente nula. Ora, a integral tripla pode ser substituída evidentemente por uma integral dupla, pois cada termo pode ser integrado uma vez. Tem-se, por exemplo

¹⁵ [N. T.] Em notação moderna, pode-se fazer um passo intermediário e reescrever a expressão (14) como

$$\vec{G} \cdot (\delta\vec{l} \times d\vec{s}') = \vec{G} \cdot (d\omega \hat{n}). \quad (I)$$

Sendo $\delta\vec{l}$ o elemento de caminho. Além do mais, a expressão (14) pode ainda tomar a forma:

$$\vec{G} \cdot (\delta\vec{l} \times d\vec{s}') = (d\vec{s}' \times \vec{G}) \cdot \delta\vec{l}. \quad (II)$$

Isto nos permite comparar com o trabalho de um circuito fechado sobre o elemento ds' usando a forma da força da seção anterior:

$$dW = d\vec{F} \cdot \delta\vec{l} = ii'(d\vec{s}' \times \vec{G}) \cdot \delta\vec{l}. \quad (III)$$

¹⁶ [N. T.] Cabe observar que pelo fato de $\nabla \cdot \vec{G} = 0$, isto implica que se pode escrever $\vec{G} = \nabla \times \vec{A}$, sendo \vec{A} uma função vetorial que também depende de x', y', z' . Assim, pelo teorema de Stokes, a mesma integral em (15) pode ser expressa de outra forma mais comum atualmente:

$$\iint \vec{G} \cdot \hat{n} d\omega = \iint (\nabla \times \vec{A}) \cdot \hat{n} d\omega = \oint_{s(\omega)} \vec{A} \cdot d\vec{s}.$$

Onde s é o contorno da superfície plana ω .

$$\iiint \frac{dP}{dx'} dx' dy' dz' = \iint P dy' dz' ,$$

e, por uma transformação bem conhecida, aplicável a todas as superfícies fechadas, se denominamos o elemento de superfície por $d\sigma$ e por (N, X) o ângulo da normal externa com o eixo dos X ,

$$\iint P dy' dz' = \int P d\sigma \cos(N, X) .$$

A equação (16) torna-se

$$0 = \int d\sigma [P \cos(N, X) + Q \cos(N, Y) + R \cos(N, Z)] ,$$

e evidentemente equivale à

$$0 = \int d\sigma G \cos(N, G) . \quad (17)$$

Esta integral sendo nula para uma superfície fechada qualquer,

[306]

para uma porção [finita] da superfície, [a integral correspondente] depende evidentemente somente dos contornos que a terminam, e o teorema VII está demonstrado¹⁷.

Teorema VIII – *Para calcular o potencial [isto é, a energia potencial] da ação de uma corrente [em um condutor] fixo sobre uma corrente [em um condutor] móvel, pode-se considerar uma superfície fechada qualquer tendo por contorno o circuito atraído. A integral estendida sobre todos os elementos dessa superfície*

$$\int d\sigma G \cos(N, G) ,$$

representa o potencial, sendo G – tal como [definido] acima – uma força [(vetor)] cujas componentes são iguais aos coeficientes P, Q, R , definidos no teorema IV.

Este teorema é uma consequência evidente da demonstração que se deu do teorema VII¹⁸.

E se a corrente atraída é uma corrente plana infinitamente pequena¹⁹, tendo $d\omega$ por superfície, a integral (15)²⁰ se reduz apenas a um elemento, e o potencial é expresso por

¹⁷ [N. T.] Dito de outra maneira, sabendo que $\nabla \cdot \vec{G} = 0$, e usando do teorema de Gauss, temos

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{G} dV = \oiint_{\sigma(V)} \vec{G} \cdot \hat{n} d\sigma = 0$$

Onde σ denota a superfície fechada que envolve V . Como a integral fechada é sempre nula, isto significa que ela é independente do “caminho” σ , o que vale também para a integral de superfície da expressão (15).

¹⁸ [N. T.] Uma vez que o trabalho é menos a variação do potencial.

$$G d\omega \cos(N, G) . \quad (18)$$

[**Fim da Parte I.**] [**Início da parte II**]

[335]

A demonstração dos teoremas precedentes toma emprestada da experiência apenas uma única proposição:

A ação de um condutor fechado é sempre normal ao elemento atraído.

Mas, para ir mais longe e estipular a forma da função indeterminada $\varphi(r)$ – que ainda aparece em nossas fórmulas — é preciso recorrer outra vez ao estudo dos fatos. Uma única experiência é suficiente. Nós admitiremos o seguinte teorema:

Teorema IX – *O sistema denominado por Ampère por solenoide – o conjunto de um número infinito de correntes fechadas infinitamente pequenas,²¹ cujos planos estão distribuídos perpendicularmente a uma mesma curva e distanciados igualmente um dos outros – sente de uma corrente fechada qualquer, ações independentes da forma do solenoide e equivalente a um sistema de forças que depende somente da posição das [suas] extremidades.*

[336]

Este teorema é o resultado da experiência. Ele equivale a este outro fato mais fácil de ser verificado: Um solenoide fechado²² não exerce nenhuma ação sobre um condutor fechado, e não sente nenhuma [ação] deste [último]²³.

O potencial relativo à ação de um circuito fechado sobre um solenoide composto de elementos cuja superfície é $d\omega$, é a soma dos valores da expressão

$$G d\omega \cos(N, G) . \quad (19)$$

para todos os elementos de superfície $d\omega$ que compõe o solenoide. Seja dl o elemento da curva normal sobre a qual estão distribuídas as correntes de superfície $d\omega$.²⁴ Pode-se considerar o

¹⁹ [N. T.] Por “corrente plana” (*courant plan*) entende-se uma corrente cujo circuito envolve um plano.

²⁰ [N. T.] Originalmente está escrito (12), o que é provavelmente um erro tipográfico por estar se referindo à integral do trabalho.

²¹ [N. T.] Na época ainda usava-se a definição original dada por Ampère. Foi ele quem concebeu a palavra “solenoide” (do grego: em forma de canal) que designava uma bobina eletrodinâmica tubular com qualquer formato de tubo (ASSIS; CHAIB, 2011, p. 183).

²² [N. T.] Um solenoide fechado, corresponde ao tubo da bobina fechado nele mesmo. O que os livros didáticos hoje denotam por “solenoide” e por “enrolamento toroidal” (REITZ *et al.*, 1982, p. 172 e 207), Ampère denominava respectivamente como *cilindro eletrodinâmico* e *anel eletrodinâmico* (ASSIS; CHAIB, 2011, p. 162).

²³ [N. T.] Este resultado experimental, o *caso de equilíbrio do anel eletrodinâmico* foi concebido e usado originalmente por F. Savary (1797-1841) para deduzir a força de Ampère entre elementos de corrente sem usar de nenhuma suposição a respeito da potência n que figura na expressão geral (ASSIS; CHAIB, 2011, Cap. 9).

número correspondente de superfícies $d\omega$ como proporcional à dl , e o potencial [somado] é representado por

$$k d\omega \int G dl \cos(N, G) , \quad (20)$$

k representando uma constante. Mas sendo G uma força [(vetor)] onde P, Q, R são as componentes, e (N, G) o ângulo da direção desta força com a [reta] tangente à curva, sobre a qual dl é o elemento,²⁵ a integral (20) pode ser representada por

$$k d\omega \int (P dx + Q dy + R dz) ,$$

e, o teorema IX pode-se enunciar [de outra forma] dizendo:

A expressão

$$P dx + Q dy + R dz$$

*é uma diferencial exata, qualquer que seja o circuito fechado atrator ao qual se relacionam as expressões P, Q, R .*²⁶

Teorema X – *A função $\phi(r)$, a qual figura na expressão da ação exercida entre dois elementos de corrente (Teorema II) tem a forma A/r , sendo A uma constante.*

[DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA X]

Retomemos as fórmulas encontradas para exprimir as funções P, Q, R (teorema V). Tem-se, fazendo $\phi(r)/2r^2 = \psi(r)$,

$$\begin{cases} P = \int \psi(r) [(y - y')dz - (z - z')dy] , \\ Q = \int \psi(r) [(z - z')dx - (x - x')dz] , \\ R = \int \psi(r) [(x - x')dy - (y - y')dx] . \end{cases} \quad (10')$$

²⁴ [N. T.] No original, o elemento da curva também é denotado por ds , mas substitui-se por dl , para não haver confusão com o elemento de corrente.

²⁵ [N. T.] Pois dl é paralelo à normal de $d\omega$.

²⁶ [N. T.] Uma vez que o resultado experimental nos diz que a integral depende apenas de suas extremidades. Isto também gera outra consequência em termos modernos: que G pode ser expresso em termos de um gradiente $\nabla\phi$.

[337]

Sendo, x', y', z' as coordenadas do elemento atraído, a soma

$$P dx' + Q dy' + R dz',$$

de acordo com o teorema IX, deve ser uma diferencial exata. Tem-se consequentemente

$$\frac{dP}{dy'} = \frac{dQ}{dx'}.$$

Substituindo nesta equação sobre P e Q seus valores em (10'), tem-se

$$0 = \int dz \left\{ \frac{\psi'(r)}{r} [(y - y')^2 + (x - x')^2] + 2\psi(r) \right\} \\ - \int dy \frac{\psi'(r)}{r} (y - y')(z - z') - \int dx \frac{\psi'(r)}{r} (x - x')(z - z').$$

Para que esta integral seja nula todas as vezes que a somatória se relacione às projeções dx, dy, dz dos elementos de uma curva fechada, é necessário que a expressão integrada seja uma diferencial exata, e, para isso, que a derivada com relação à x do coeficiente de dz seja igual à derivada com relação à z do coeficiente dx . Ao escrever dessa maneira, e suprimindo os termos e os fatores comuns, se encontra

$$\psi''(r) + \frac{4\psi'(r)}{r} = 0,$$

de onde se deduz que

$$\psi(r) = \frac{A}{r^3} + B,$$

e por consequência,

$$\varphi(r) = \frac{2A}{r} + 2B r^2.$$

E como $\varphi(r)$ é nulo quando r tende ao infinito, B é necessariamente igual a zero, e tem-se que

$$\varphi(r) = \frac{2A}{r}.$$

Consequentemente a atração $ii' ds ds' T$ entre dois elementos é igual a

$$2A ii' ds ds' \left(\frac{1}{r} \frac{d^2 r}{ds ds'} - \frac{1}{2r^2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right) \\ = 4A ii' \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{d^2(\sqrt{r})}{ds ds'} ds ds'.$$

Teorema XI — *A integral*

$$V = \int (P dx' + Q dy' + R dz'),$$

cuja existência é demonstrada pelo teorema IX, representa o ângulo sobre o qual o circuito atrator é visto do ponto de coordenadas x', y', z' . Ou seja, [representa] a porção da esfera de raio unitário, descrita a partir do ponto central (x', y', z') , e interceptada pelo cone onde este ponto está no vértice, e o circuito atrator na base²⁷.

[DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA XI]

Se tomarmos P, Q, R , por seus valores dados em (10) [ou em (10')], substituindo o valor $2A/r$ na função $\varphi(r)$ [ou, A/r^3 em $\psi(r)$], se terá

$$\left\{ \begin{array}{l} V = A \int dx' \int \frac{(y-y')dz - (z-z')dy}{r^3} \\ + A \int dy' \int \frac{(z-z')dx - (x-x')dz}{r^3} \\ + A \int dz' \int \frac{(x-x')dy - (y-y')dx}{r^3}. \end{array} \right. \quad (21)$$

Estando as integrais que multiplicam dx', dy', dz' tomadas sobre o circuito fechado que nós denominamos como circuito atrator – cujo elemento tem por projeção dx, dy, dz – verifica-se facilmente que a expressão (21) equivale a três integrais iguais

$$\left\{ \begin{array}{l} V = A \int \frac{(z-z')[(x-x')dy - (y-y')dx]}{[(x-x')^2 + (y-y')^2] r} \\ = A \int \frac{(x-x')[(y-y')dz - (z-z')dy]}{[(y-y')^2 + (z-z')^2] r} \\ = A \int \frac{(y-y')[(z-z')dx - (x-x')dz]}{[(z-z')^2 + (x-x')^2] r}. \end{array} \right. \quad (22)$$

Tomando a derivada com relação a z' da primeira destas integrais, com relação a x' da segunda, e com relação a y' da terceira, obtêm-se as expressões P, Q, R , as quais multiplicam dx', dy', dz' no segundo membro da equação (21).

Para demonstrar que estas três integrais são iguais entre elas e representam, conseqüentemente, a função V , cujas derivadas parciais são P, Q, R , é suficiente mostrar que uma delas é

²⁷ [N. T.] Dito de outra forma: A integral V consiste no ângulo sólido sobre o circuito atrator, e que tem por origem o ponto de coordenadas (x', y', z') .

[339]

a expressão do ângulo sob o qual a corrente atratora é vista do ponto (x', y', z') . De acordo com a simetria das fórmulas, a conclusão se aplicará às duas outras.

Ora, dispondo a origem das coordenadas no ponto (x', y', z') , e tomando as coordenadas polares habituais r, θ, ψ , tem-se²⁸,

$$\begin{aligned}(x - x')dy - (y - y')dx &= r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\psi, \\ (z - z') &= r \cos \theta, \\ (x - x')^2 + (y - y')^2 &= r^2 \operatorname{sen}^2 \theta,\end{aligned}$$

e a integral torna-se

$$\int \cos \theta d\psi.$$

Abrangendo um circuito fechado, ela equivale à integral dupla

$$\iint \operatorname{sen} \theta d\theta d\psi,$$

tomada no interior do cone tendo o vértice como origem e o circuito por base, e que representa evidentemente o ângulo desse cone [ou ângulo sólido]. Ou seja, a superfície interceptada por ele sobre uma esfera de raio igual à unidade e tendo seu vértice por centro.

Teorema XII – *No momento em que o circuito atraído e o circuito atrator são ambos circuitos planos infinitamente pequenos, com superfícies ω e ω' e de intensidades i e i' , pode-se representar suas ações substituindo ω por duas massas²⁹ fictícias q e $-q$, dispostas de um lado e de outro sobre a [reta] normal à ω , à uma distância infinitamente pequena l ³⁰, de tal forma que se obtém $ql = \omega i$ ³¹, e substituindo ω' por duas massas q' e $-q'$, definidas da mesma maneira. As ações do sistema de massas q e $-q$ sobre o sistema q' e $-q'$ – supondo as ações atrativas elementares proporcionais às massas e em razão inversa do quadrado da distância – poderão substituir a ação da corrente [de] ω sobre a corrente [de] ω' .*

²⁸ [N. T.] Essas coordenadas, tal como definidas aqui por Bertrand, são as *coordenadas esféricas*.

²⁹ [N. T.] Nessa época, na França, denominavam-se como *massa* às grandezas que representavam a proporção da capacidade de sentir ou realizar um determinado tipo de força por um objeto elementar entendido como pontual. Assim, tinha-se massa gravitacional, massa inercial, massa elétrica e massa magnética. Ver também (Bertrand, 1890).

³⁰ [N. T.] No original está escrito μ e ε , respectivamente para a massa (carga) e para a distância. Pela importância desse teorema, trocou-se a notação para que fique um pouco mais familiar: $\mu \rightarrow q$ e $\varepsilon \rightarrow l$. Pois ε já denota um ângulo, e, na notação moderna, μ denota o módulo do *momento de dipolo magnético*, de tal forma que, se q denotar a *massa/carga magnética* (ou *polo*) teremos $\mu = ql$.

³¹ [N. T.] Ou seja, $\mu = i\omega n$. Como veremos no final da dedução.

[DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA XII]

Seja V o ângulo sobre o qual a superfície ω é vista de um ponto de ω' , e G a força cujas componentes são as derivadas de V : o potencial de ação de ω sobre ω' está representado por $Gd\omega \cos(N, G)$. A componente da força G ao longo da normal N' ao elemento $d\omega'$ é igual, conseqüentemente, à $\omega'dV/dn'$.

[340]

Além do mais, o ângulo V é representado por

$$V = \frac{\omega \cos \beta}{r^2},$$

denominando por r a distância $\omega\omega'$, e β o ângulo dessa reta r com a normal à ω .³² Tem-se evidentemente que

$$V = \frac{\omega \cos \beta}{r^2} = \omega \frac{d\frac{1}{r}}{dn},$$

dn denotando o elemento infinitamente pequeno da [reta] normal à ω . E, conseqüentemente,

$$\omega' \frac{dV}{dn'} = \omega\omega' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dn dn'}.$$

Ora, considerando as moléculas interagentes [com massas/cargas] $q, -q, q', -q'$ definidas no enunciado [do teorema XII], o potencial de q sobre q' é qq'/r , [e] o potencial somado [do dipolo] q e $-q$ sobre q' é,

$$qq' \frac{d\frac{1}{r}}{dn} l,$$

e o potencial somado sobre q' e $-q'$ é evidentemente

$$qq' ll' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dn dn'} = ii' \omega\omega' \frac{d^2 \frac{1}{r}}{dn dn'}.$$

Pode-se enunciar o teorema precedente dizendo que a ação entre duas correntes infinitesimais, uma sobre a outra, pode ser substituída pela ação entre duas moléculas magnéticas³³ orientadas normalmente ao plano de cada corrente [ou seja, a interação entre duas correntes infinitesimais é equivalente à interação entre dois dipolos com seus eixos normais aos planos de cada corrente] e cujo momento é proporcional ao produto da superfície contornada pela corrente e por sua intensidade.

³² [N. T.] Bertrand usa $\cos i$, o que pode causar confusão com a intensidade de corrente, então se usou $\cos \beta$ no lugar.

³³ [N. T.] Por “molécula magnética” entende-se aqui como “dipolo magnético”. Pela discussão desenvolvida, Bertrand indica que uma molécula seria o dipolo composto por q e $-q$, enquanto que a outra molécula seria o outro dipolo composto por q' e $-q'$.

Teorema XIII – *A ação entre duas correntes fechadas, uma sobre a outra, quaisquer que sejam suas dimensões, pode ser substituída pela ação entre duas superfícies magnéticas definidas da maneira que segue. Concebamos cada corrente contornando uma superfície de forma arbitrária, e vamos decompor esta superfície em*

[341]

elementos infinitamente pequenos supostos contornados, cada um, por uma corrente de mesma intensidade. Substituímos cada elemento por uma molécula magnética [ou seja, por um dipolo composto por massas magnéticas de intensidades iguais e sinais opostos] definida na demonstração do teorema precedente: a ação das duas correntes poderá ser substituída por aquela deste sistema de moléculas.

É evidente, com efeito, que uma corrente fechada qualquer considerada como o contorno de uma superfície – e esta superfície decomposta de uma maneira arbitrária em um número qualquer de porções finita ou infinitamente pequenas – pode ser substituída por um sistema de correntes orientadas no mesmo sentido ao redor dos contornos de cada fração de superfície. Assim, cada uma das linhas que as separam se encontram percorridas, com efeito, por duas correntes contrárias cujos efeitos se cancelam, e o efeito total é devido somente à ação da corrente original.

De acordo com este destaque, as duas correntes fechadas podem ser substituídas por dois sistemas de correntes fechadas infinitamente pequenas, e cada uma delas, de acordo com teorema precedente, pode ser substituída por uma molécula magnética.

Teorema XIV – *O potencial relativo à ação entre dois circuitos fechados, um sobre o outro, cuja expressão foi dada pelo teorema VIII, pode-se exprimir igualmente por uma integral dupla*

$$\frac{1}{2} \iint \frac{\cos \theta \cos \theta'}{r} ds ds' , \quad (23)$$

que se estende a todos os elementos ds , ds' das duas correntes, e nas quais θ e θ' tomam o mesmo significado que no teorema II.

[DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA XIV]

Retomemos à fórmula

$$ii' ds ds' T = ii' ds ds' \left(\frac{1}{r} \frac{d^2 r}{ds ds'} - \frac{1}{2r^2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right)$$

Se os dois elementos ds e ds' se afastam, a distância entre eles se torna $r + \delta r$. O trabalho de sua ação mútua é

$$ii' ds ds' T \delta r = ii' ds ds' \delta r \left(\frac{1}{r} \frac{d^2 r}{ds ds'} - \frac{1}{2r^2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right),$$

e o trabalho total, devido à ação mútua entre as duas correntes fechadas,

[342]

as quais se deslocam infinitesimalmente, é expressa pela integral dupla

$$ii' \iint \delta r \left(\frac{1}{r} \frac{d^2 r}{ds ds'} - \frac{1}{2r^2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} \right) ds ds'.$$

Essa expressão pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} ii' \iint \delta r \frac{d}{ds} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{ds'} \right) ds ds' + \frac{1}{2} ii' \iint \delta r \frac{d}{ds'} \left(\frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \right) ds ds' \\ & + \frac{1}{2} ii' \iint \frac{\delta r}{r^2} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} ds ds'. \end{aligned}$$

Integrando por partes os dois primeiros termos e observando que os termos integrados são nulos – posto que os circuitos são fechados – esta expressão se torna

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} ii' \iint \frac{1}{r} \frac{dr}{ds'} \frac{d}{ds} (\delta r) ds ds' - \frac{1}{2} ii' \iint \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{d}{ds'} (\delta r) ds ds' \\ & -\frac{1}{2} ii' \delta \iint \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} ds ds'. \end{aligned}$$

Ou seja, destacando que $\frac{d}{ds} (\delta r) = \delta \frac{dr}{ds}$, $\frac{d}{ds'} (\delta r) = \delta \frac{dr}{ds'}$, [temos que]

$$-\frac{1}{2} ii' \delta \iint \frac{1}{r} \frac{dr}{ds} \frac{dr}{ds'} ds ds',$$

ou enfim,

$$-\frac{1}{2} \delta ii' \iint \frac{\cos \theta \cos \theta'}{r} ds ds'.$$

O trabalho elementar então é igual à variação da integral (23), a qual, consequentemente, representa o potencial.

Nós terminaremos este estudo pela solução de um problema o qual parece indispensável para retificar um enunciado dado por Ampère no início de seus trabalhos³⁴ e reproduzido desde então em todos os Tratados e em todos os Cursos de Física, embora se encontre em contradição evidente com a teoria adotada.

Problema – Sendo dado um elemento de corrente ds , encontrar a posição que deve ocupar um elemento ds' para não exercer sobre ele nenhuma ação.

³⁴ [N. T.] Quando ainda não tinha obtido a forma final de sua força entre elementos de corrente.

Dando o mesmo significado às letras θ , θ' e ε que aquele utilizado nas fórmulas demonstradas (teorema II), a equação que exprime a

[343]

condição imposta é

$$\frac{3}{2} \cos \theta \cos \theta' = \cos \varepsilon .$$

Vamos supor que o elemento atraído ds disposto na origem de coordenadas e orientado ao longo do eixo dos X. Sendo x' , y' , z' as coordenadas de ds' , tem-se

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{x'}{r} , \\ \cos \theta' &= \frac{dr}{ds'} , \\ \cos \varepsilon &= \frac{dx'}{ds'} \end{aligned}$$

e a equação se torna

$$\frac{3x'}{r} \frac{dr}{ds'} = 2 \frac{dx'}{ds'} ,$$

cujas integrais são

$$x'^2 = Ar^3 ,$$

[que consiste na] equação de uma superfície de revolução cujo eixo é o eixo dos X, e cuja curva meridiana é facilmente construída. Qualquer que seja a forma e a posição de uma corrente que contorna tal superfície, será nula a ação exercida sobre o elemento ds disposto no seu vértice. A presença da constante arbitrária A na equação (24), dá a possibilidade de se passar a superfície por um ponto qualquer do espaço, e, conseqüentemente, existirá em cada ponto uma infinidade de direções às quais se podem dispor um elemento ds' de maneira a anular sua ação sobre o elemento ds . Estas direções estão em um mesmo plano, o plano tangente à superfície [representada pela equação] (20). A ação será máxima para um elemento normal a esta superfície, e para um elemento qualquer ela é proporcional, facilmente pode-se assegurar disso, ao cosseno do ângulo formado com esta normal.

Vê-se então o quanto nós seríamos induzidos ao erro pela regra que indica como atrativa as ações exercidas entre dois elementos os quais ambos correm em direção ao vértice do ângulo formado por suas direções, e como repulsiva a ação exercida pelo elemento de uma corrente que caminha ao encontro deste vértice sobre o elemento de uma corrente que se afasta. Tal ação pode ser nula, atrativa ou repulsiva, em ambos os casos.

Agradecimentos

O autor agradece as contribuições dos árbitros para a melhora deste trabalho.

Referências

BERTRAND, A. F. J. Académie française, 2018. Disponível em: <<http://www.academie-francaise.fr/les-immortels/joseph-bertrand>>.

AMPÈRE, A.-M. Mémoire sur la détermination de la formule qui représente l'action mutuelle de deux portions infiniment petites de conducteurs voltaïques: lu à l'académie des sciences le 10 juin 1822. **Annales de Chimie et de Physique**, v. 20, p. 398-421, 1822.

AMPÈRE, A. M. Memoir on a new electro-dynamic experiment, on its application to the formula representing the mutual action of the two elements of voltaic conductors, and on some new results deduced from that formula. **Philosophical Magazine**, v. 66, p. 376-387, 1825.

AMPÈRE, A.-M. **Théorie des Phénomènes Électrodynamiques, Uniquement Déduite de l'Expérience**. Paris: Méquignon-Marvis, 1826. 228 p.

AMPÈRE, A.-M. **Théorie des Phénomènes Électrodynamiques, Uniquement Déduite de l'Expérience**. 2. ed. Paris: A. Hermann, 1883. 228 p.

ASSIS, A. K. T.; CHAIB, J. P. M. C. **Eletrodinâmica de Ampère**. Campinas: Editora Unicamp, 2011. 600 p.

ASSIS, A. K. T.; CHAIB, J. P. M. C. **Ampère's Electrodynamics: Analysis of the Meaning and Evolution of Ampère's Force between Current Elements, together with a Complete Translation of His Masterpiece, Theory of Electrodynamical Phenomena, Uniquely Deduced from Experience**. Montreal: Apeiron, 2015. 546 p.

BATISTA, G. L. D. F.; DRUMMOND, J. M. H. F.; de FREITAS, D. B. Fontes primárias no ensino de física: considerações e exemplos de propostas. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 32, n. 3, p. 663-702, 2015.

BERTRAND, J. Note sur quelques points de la théorie de l'électricité. In: Liouville, J. (Ed.), **Journal de mathématiques pures et appliquées: 1836-1869**, Paris: Bachelier, 1839. v. 4, p. 495-500.

BERTRAND, J. Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe. In: PERPÉTUELS, L. S. (Ed.). **Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences**, v. 77, p. 842-853, Paris: Gauthier-Villars, 1873.

BERTRAND, J. Démonstration des théorèmes relatifs aux actions électrodynamiques. **Journal de Physique Theorique et Appliquee**, v. 3, p. 297-306, 1874a. Primeira parte.

BERTRAND, J. Démonstration des théorèmes relatifs aux actions électrodynamiques. **Journal de Physique Theorique et Appliquee**, v. 3, p. 335-343, 1874b. Segunda parte.

BERTRAND, J. **Leçons sur la théorie mathématique de l'électricité** – professées au Collège de France. Paris: Gauthier-Villars et fils, 1890. 297 p.

BIOT, J. B. Sur l'aimantation imprimée aux métaux par l'électricité en mouvement; mémoire lu à la séance publique de l'académie des sciences, du 2 avril 1821, par M. Biot. **Journal des Savants**, v. in-8°, p. 221, 1821.

BLONDEL, C. A.-M. **Ampère et la Création de l'Électrodynamique (1820-1827)**. Bibliothèque Nationale, Paris, 1982. 202 p.

BRAGA, M.; GUERRA, A.; REIS, J. C. The role of historical-philosophical controversies in teaching sciences: The debate between Biot and Ampère. **Science & Education**, v. 21, n. 6, p. 921-934, 2012.

CHAIB, J. P. M. C. **Análise do Significado e da Evolução do Conceito de Força de Ampère, juntamente com a Tradução Comentada de sua Principal Obra sobre Eletrodinâmica**. 2009. 386 p. Tese (Doutorado em Física), Instituto de Física, UNICAMP, Campinas.

CHAIB, J. P. M. C. Deduzindo $d\mathbf{F} = i d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$ da eletrodinâmica de Ampère. **Physicae Organum: Revista dos Estudantes de Física da Universidade de Brasília**, v. 4, n. 1, p. 59-67, 2018.

CHAIB, J. P. M. C.; ASSIS, A. K. T. Distorção da Obra Eletromagnética de Ampère nos Livros Didáticos. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 29, n. 1, p. 65-70, 2007a.

CHAIB, J. P. M. C.; ASSIS, A. K. T. Sobre os efeitos das correntes elétricas. Tradução comentada da primeira obra de Ampère sobre eletrodinâmica. **Revista da Sociedade Brasileira de História da Ciência**, v. 5, p. 85-102, 2007b.

DIAS, V. H. A.; DIAS, P. M. C. Escrevendo o “livro da natureza” na linguagem da matemática: A lei de Ampère. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 37, n. 4, p. 4601, 2015.

dos SANTOS, H. S. T. E GARDELLI, D. Análise da lei de Biot-Savart em comparação com a força entre elementos de corrente de Ampère. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 34, n. 3, p. 864-879, 2017.

FONSECA, D. S.; DRUMMOND, J. M. H. F.; DE OLIVEIRA, W. C.; BATISTA, G. L. D. F.; FREITAS, D. B. Pressão atmosférica e natureza da ciência: uma sequência didática englobando fontes primárias. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 34, n. 1, p. 64-108, 2017.

GRASSMANN, H. Neue Theorie der Electrodynamik. **Annalen der Physik**, v. 64, p. 1-18, 1845.

HOFMANN, J. R. Ampère's invention of equilibrium apparatus: A response to experimental anomaly. **British Journal for the History of Science**, v. 20, p. 309-341, 1987.

MAXWELL, J. C. **A Treatise on Electricity and Magnetism**, London: Oxford, 1873. 447 p. v. 2.

REITZ, J. R.; MILFORD, F. J.; CHRISTY, R. W. **Fundamentos da Teoria Eletromagnética**. Tradução: R. B. Sander e C. Duarte. Rio de Janeiro: Editora Campus, 1982. 516 p.

REYNARD, F. Nouvelle Théorie des Actions électrodynamiques. **Annales de Chimie et Physique**, v. 19, p. 272-328, 1870.

SANTOS, F. C.; SOARES, V.; TORT, A. C. Uma tradução da demonstração original do teorema de Bertrand. **Revista Brasileira de História da Ciência**, v. 4, p. 92-97, 2010.

TRICKER, R. A. R. **Early Electrodynamics**. The First Law of Circulation. New York: Pergamon, 1965. 228 p.

VERDET, É. **Cours de Physique Professé a l'École Polytechnique. Tome Premier**. In: FERNET, É. (Ed.), Oeuvres d'E. Verdet – Publiées par les soins de ses élèves, v. 2. Paris: Victor Massons et Fils, 1868. 459 p.

WILLIAMS, L. P.; AMPÈRE, A.-M. In: GILLISPIE, C. C. (Ed.). **Dictionary of Scientific Biography**, v. 1, p. 139-147, New York: Scribner, 1981.



Direito autoral e licença de uso: Este artigo está licenciado sob uma [Licença Creative Commons](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).