

**Conservação da velocidade do CM de duas partículas sob a ação de forças de atrito em movimento unidimensional ( $D = 1$ )<sup>+</sup>\***

---

*Carlos Eduardo Rodrigues de Souza*<sup>1</sup>

*Maria Teresa Thomaz*<sup>1</sup>

*Dácio Moreira de Souza*<sup>1</sup>

Instituto de Física – Universidade Federal Fluminense

Niterói – RJ

**Resumo**

*A força de atrito está presente no cotidiano dos alunos e a compreensão de sua ação sobre os corpos aproxima a Ciência de sua experiência diária. A lei de conservação do momento linear total, envolvendo sistemas de partículas sob a ação de forças dissipativas externas, não é geralmente discutida nos livros-texto de Mecânica Newtoniana utilizados nos ensinamentos médio e superior, nas instituições de ensino brasileiras. Discutimos neste trabalho o movimento mais simples que duas partículas podem ter: o movimento unidimensional em sentidos opostos, sob a ação de forças de atrito cinético externas. Mostramos que a conservação do momento linear do conjunto formado por essas partículas, sob a ação de duas forças de atrito cinético, ocorre apenas em partes do movimento unidimensional e quando elas se deslocam em sentidos opostos. Aproveitando o grande envolvimento dos alunos com aplicativos em celulares, apresentamos uma montagem experimental que verifica a conservação da velocidade do centro de massa (CM) desses dois corpos. O aparato experimental é simples e de baixo custo, podendo ser facilmente reproduzido em sala de aula como estratégia para estimular os estudantes a trabalharem com ferramentas matemáticas e métodos experimentais, de forma a discutirem situações físicas que incluem as forças de atritos presentes no seu dia a dia.*

---

<sup>+</sup> Conservation of the speed of the CM of two particles under the action of frictional forces in one-dimensional motion ( $D = 1$ )

<sup>\*</sup> *Recebido: janeiro de 2019.  
Aceito: julho de 2019.*

<sup>1</sup> E-mails: [carlooseduardosouza@id.uff.br](mailto:carlooseduardosouza@id.uff.br); [mariateresa.thomaz@gmail.com](mailto:mariateresa.thomaz@gmail.com); [dacioms@id.uff.br](mailto:dacioms@id.uff.br)

**Palavras-chave:** *Conservação do Momento Linear Total; Força de Atrito; Movimento Uni e Bidimensional; Velocidade do CM.*

### **Abstract**

*The force of friction is part of the daily life of the students and the understanding of their action on the bodies in the day-to-day brings the Science of their experience. We discuss the one-dimensional motion of two particles moving in opposite directions under the action of external kinetic friction forces. The law of the conservation of the total linear momentum involving these particles under the action of external dissipative forces is not discussed in general in the textbooks of Newtonian Mechanics used in upper and middle schools, in Brazilian educational institutions. We show that the conservation of the linear momentum of the set formed by the two particles under the action of two kinetic friction forces only occurs when their movement is unidimensional and in opposite direction. In this work, the conservation of the velocity of the CM is verified experimentally in a simple apparatus of low cost, which can be easily reproduced in the classroom as a strategy for encourage students to work with mathematical tools and experimental methods in order to discuss situations that include the frictional forces that belong to the day life of the student.*

**Keywords:** *Conservation of the Total Linear Momentum; Friction Force; Uni and Bi-Dimensional Motion; CM Velocity.*

## **I. Introdução**

Entender o movimento dos corpos que nos rodeiam a partir das forças que agem sobre eles é trazer a aplicação das leis da Física para o cotidiano das pessoas. Os mistérios desaparecem e passamos a compreender o que é discutido nos livros-texto de Física, que muitas vezes oferecem aos alunos conceitos abstratos, longe de sua realidade diária.

A força de atrito é uma força que atua no dia a dia das pessoas, quer agindo sobre elas, quer agindo sobre o movimento dos corpos que observam. Utilizar fatos e situações que ocorrem no cotidiano dos alunos para discutir exemplos que envolvam a presença de força de atrito cinético sobre os corpos simplifica a sua compreensão das leis físicas envolvidas.

Santos, Kleer e Thielo (1997) utilizam o estudo de Acidentes de Trânsito para mostrar como aplicar leis físicas em situações do cotidiano, inclusive discutem a ação de forças de atrito sobre os corpos que deslizam e colidem. Vários outros artigos de ensino tratam da discussão de aspectos teóricos das forças de atrito (ver, por exemplo, Saliel e Caldas (1999),

Marinelli e Matuo (2007), Faria Leite e Costa (2010)), e de montagens experimentais que permitem abordar e medir a ação dessas forças sobre corpos (ver, por exemplo, Monteiro *et al.* (2012), e Sasaki e Jesus (2014)). No entanto, não temos livros-texto onde são discutidos exemplos de conservação de momento linear total de um sistema de partículas quando sobre elas atuam forças de atrito cinético externas.

Lembramos que a condição necessária para termos a conservação da velocidade do centro de massa (CM) de um sistema de partículas é bem conhecida, isto é, a resultante das forças externas que agem sobre essas partículas tem que desaparecer, independentemente da sua natureza conservativa ou não conservativa (NUSSENZVEIG, 2013; KRANE; RESNICK; HALLIDAY, 1996; KNIGHT, 2009).

Neste artigo, consideramos dois corpos cujas forças externas que agem sobre eles são: seus pesos, suas forças normais e forças de atrito cinético. As últimas forças, as forças de atrito cinético, agem sobre as partículas enquanto elas têm velocidades não nulas sobre a superfície horizontal onde elas deslizam. Nesta apresentação, tratamos os dois corpos como sendo aproximadamente duas partículas, negligenciando quaisquer efeitos de rotação e contração que os corpos possam ter. Discutimos a velocidade do CM de um sistema de duas partículas que se movem sob a ação de forças de atrito cinético ao longo de uma linha horizontal ( $D = 1$ ). Mostramos que existe um tipo particular de movimento dessas partículas onde a velocidade do seu CM permanece constante, enquanto algumas condições geométricas e cinemáticas ainda continuam sendo verdadeiras. Este é um tipo de problema a ser abordado por estudantes no Ensino Médio e nos anos iniciais dos cursos de graduação, trazendo a discussão de leis da Física para a descrição do movimento de corpos quando estão sujeitos a forças que o(a) estudante sente no seu dia a dia.

Na seção II, discutimos a condição para que a velocidade do CM de um conjunto de duas partículas em movimento unidimensional ( $D = 1$ ), na presença de forças de atrito cinético, seja uma constante do movimento, sem utilizarmos *a priori* a condição de força resultante nula para impormos a conservação do momento linear total desse sistema.

Discutimos, na subseção II.1, o comportamento da velocidade do CM quando as duas partículas têm a mesma massa e deslizam colinearmente em sentidos opostos. Também mostramos que a  $V_{CM}$  não se conserva durante o intervalo de tempo em que ocorre o choque entre os dois corpos, e que um deles, ou ambos, inverte o sentido do seu movimento. Verificamos que a  $V_{CM}$  se conserva antes e após esse intervalo de tempo e embora a velocidade do CM do conjunto formado pelas duas partículas seja constante em cada um desses dois intervalos, os valores que  $V_{CM}$  adquire são diferentes.

Na subseção II.2, mostramos que a lei de conservação do momento linear total do conjunto das duas partículas sob a ação de forças de atrito cinético não é válida quando o movimento delas é não colinear sobre uma superfície que pode ser plana ou ondulada em  $D$ -dimensões, com  $D \geq 2$ .

Na seção III, montamos um aparato experimental para verificar a conservação da velocidade do CM de dois blocos circulares que se movem, sujeitos a forças de atrito, ao longo de uma placa de madeira MDF antes da colisão entre eles.

Na subseção III.1 analisamos os dados numéricos obtidos da montagem experimental com movimento unidimensional ( $D = 1$ ) e bidimensional ( $D = 2$ ) dos dois blocos circulares. Finalmente, apresentamos na seção IV as nossas conclusões.

No Apêndice A, apresentamos as tabelas com os valores das componentes dos vetores velocidade dos dois corpos nos movimentos uni e bidimensional e de seu CM, em cada tipo de deslocamento.

No Apêndice B, apresentamos o cálculo das barras de erro na medição da velocidade dos dois blocos em movimentos uni e bidimensional.

## II. Conservação do vetor velocidade do CM de duas partículas sujeitas à ação de forças de atrito cinético em movimento em uma dimensão espacial ( $D = 1$ )

Consideramos duas partículas de massas  $m_1$  e  $m_2$ , movendo-se em sentidos opostos ao longo de uma linha reta horizontal, como mostrado na Fig. 1.

A velocidade inicial da partícula 1 é  $\vec{v}_1(0) = v_1(0) \hat{i}$ , com  $v_1(0) > 0$ . A velocidade inicial da partícula 2,  $\vec{v}_2(0) = v_2(0) \hat{i}$ , é escolhida como sendo  $v_2(0) < 0$ . Nenhuma das duas partículas está em repouso no momento em que começamos a filmar os seus movimentos em  $t = 0$ .

Escolhemos o eixo  $x$  ao longo da linha horizontal sobre a qual as partículas escorregam (veja a Fig.1). O versor  $\hat{i}$  ( $\hat{j}$ ) é paralelo ao eixo  $x$  ( $y$ ).

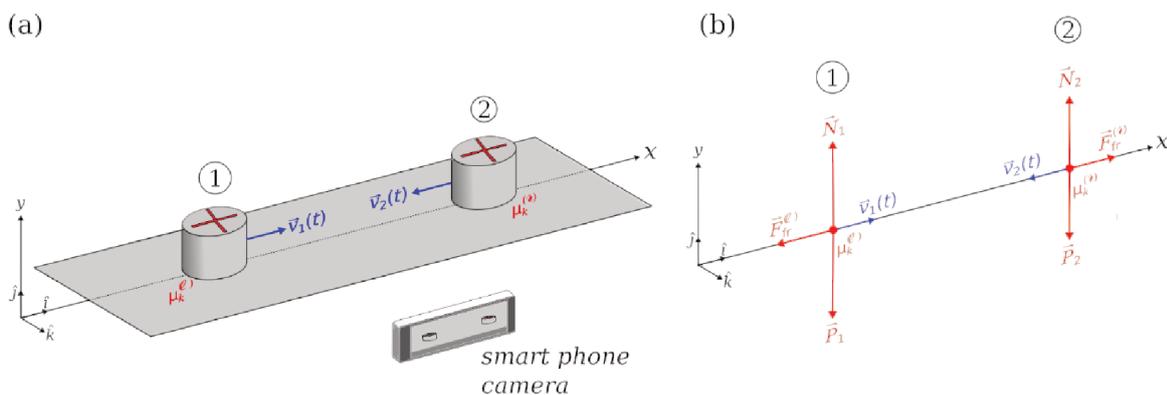


Fig. 1 – (Figura colorida) (a) Mostramos os dois blocos, 1 e 2, que deslizam sobre uma superfície com atrito. (b) Apresentamos as forças que agem sobre eles. O movimento dos dois corpos é ao longo da linha horizontal, o eixo  $x$ . A rugosidade entre os corpos e a superfície é diferente nos lados esquerdo e direito do ponto A, sendo  $\mu^{(e)}$  e  $\mu^{(d)}$ , os coeficientes de atrito dos lados esquerdo e direito, respectivamente.  $\hat{i}$  e  $\hat{j}$  são os versores ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ , respectivamente.

As forças que atuam em cada partícula  $i$ ,  $i = 1$  e  $2$ , são as forças peso  $\vec{P}_i$  e normal  $\vec{N}_i$ , e a força de atrito  $\vec{F}_{a,i}^{(k)}$ , onde  $k=e$  (esquerda) ou  $d$  (direita). Temos ainda

$$\vec{P}_i = m_i g (-\hat{j}), \quad i = 1, 2, \quad \text{Eq. (1)}$$

onde  $g$  é o módulo da aceleração gravitacional ( $g \approx 9,8 \text{ m/s}^2$ ).

Assumimos também que a trajetória à esquerda e à direita do ponto  $A$  na linha horizontal podem ter diferentes rugosidades.  $\mu_c^{(e)}$  ( $\mu_c^{(d)}$ ) é o coeficiente de atrito cinético quando o corpo está à esquerda (à direita) do ponto  $A$ . O caso mais simples acontece quando a rugosidade entre as superfícies é a mesma ao longo da linha horizontal. Neste caso particular,  $\mu_c^{(e)} = \mu_c^{(d)}$ .

O sentido da força de atrito cinético é sempre contrário ao vetor velocidade da partícula em relação à superfície sobre a qual ela desliza. A velocidade instantânea da partícula 1 no tempo  $t$  é  $\vec{v}_1(t) = v_1(t) \hat{i}$ , e como escolhemos  $v_1(0) > 0$ , a força de atrito cinético atuando na partícula 1 é igual a

$$\vec{F}_{a,1}^{(k)} = -\mu_c^{(k)} |\vec{N}_1| \hat{i}, \quad \text{Eq. (2a)}$$

enquanto tivermos que  $v_1(t) \neq 0$ , e  $k = e$  ( $d$ ) se o corpo 1 está à esquerda (direita) do ponto  $A$ .  $\vec{v}_2(t) = v_2(t) \hat{i}$  é a velocidade instantânea da partícula 2 no instante  $t$ . Como escolhemos  $v_2(0) < 0$ , a força de atrito cinético que age sobre a partícula 2 é

$$\vec{F}_{a,2}^{(k)} = -\mu_c^{(k)} |\vec{N}_2| \hat{i}, \quad \text{Eq. (2b)}$$

durante o intervalo de tempo em que a partícula 2 não para, ou seja,  $v_2(t) \neq 0$ , e  $k=e$  ( $d$ ) se o corpo 2 está à esquerda (direita) do ponto  $A$ .

Nas eq. (2a) e (2b),  $|\vec{N}_i|$  é o módulo da força normal da partícula  $i$ , com  $i = 1$  e  $2$ .

Estamos no referencial da Terra observando o movimento das duas partículas. Com boa aproximação a Terra pode ser considerada um referencial inercial. Neste referencial, a Segunda Lei de Newton que descreve o movimento da partícula 1 quando está à esquerda do ponto  $A$  é

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1(t)}{dt} = \vec{P}_1 + \vec{N}_1 + \vec{F}_{a,1}^{(e)}. \quad \text{Eq. (3)}$$

Como o movimento da partícula 1 é somente ao longo do eixo  $x$ , temos

$$\vec{P}_1 + \vec{N}_1 = \vec{0} \Rightarrow \vec{N}_1 = -\vec{P}_1 = m_1 g \hat{j}, \quad \text{Eq. (4)}$$

onde  $\vec{0}$  é o vetor nulo ( $|\vec{0}| = 0$ ).

Substituindo os resultados (2a) e (4) na eq.(3), finalmente encontramos a equação que descreve o movimento da partícula 1 quando está à esquerda do ponto  $A$ .

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1(t)}{dt} = -\mu_c^{(e)} m_1 g \hat{i}. \quad \text{Eq. (5)}$$

Seguindo um raciocínio análogo, a equação de movimento da partícula 2 quando ela está à direita do ponto  $A$ , para qualquer observador de um referencial inercial, é igual a

$$m_2 \frac{d\vec{v}_2(t)}{dt} = \mu_c^{(d)} m_2 g \hat{i}. \quad \text{Eq. (6)}$$

O vetor velocidade do CM de um sistema composto pelas partículas 1 e 2,  $\vec{V}_{CM}(t)$ , é

$$\vec{V}_{CM}(t) = \frac{m_1 \vec{v}_1(t) + m_2 \vec{v}_2(t)}{m_1 + m_2}. \quad \text{Eq. (7)}$$

Denominamos o vetor  $\vec{p}_i(t)$  como sendo o momento linear da  $i$ -ésima partícula no tempo  $t$ ,  $\vec{p}_i(t) = m_i \vec{v}_i(t)$ , com  $i = 1, 2$ .

O momento linear total do sistema composto por essas duas partículas no tempo  $t$ ,  $\vec{P}_S$ , é

$$\vec{P}_S = \vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t). \quad \text{Eq. (8)}$$

Chamamos  $\vec{P}_{CM}(t)$  de momento linear do CM deste sistema de duas partículas, isto é,

$$\vec{P}_{CM}(t) = (m_1 + m_2) \vec{V}_{CM}(t). \quad \text{Eq. (9)}$$

Das relações (7) a (9) temos

$$\vec{P}_S(t) = \vec{P}_{CM}(t) \quad \text{Eq. (10a)}$$

$$= m_1 \vec{v}_1(t) + m_2 \vec{v}_2(t). \quad \text{Eq. (10b)}$$

A variação temporal da velocidade do CM do sistema é obtida calculando a derivada em relação ao tempo de ambos os lados da eq.(7),

$$\frac{d\vec{V}_{CM}(t)}{dt} = \frac{1}{m_1 + m_2} \left[ m_1 \frac{d\vec{v}_1(t)}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2(t)}{dt} \right]. \quad \text{Eq. (11)}$$

Substituindo os resultados (5) e (6) no lado direito da eq.(11), temos

$$\frac{d\vec{V}_{CM}(t)}{dt} = \frac{1}{m_1 + m_2} \left[ \vec{F}_{a,1}^{(e)} + \vec{F}_{a,2}^{(d)} \right] \quad \text{Eq. (12a)}$$

$$= \frac{g \hat{i}}{m_1 + m_2} \left[ -\mu_c^{(e)} m_1 + \mu_c^{(d)} m_2 \right]. \quad \text{Eq. (12b)}$$

Salientamos que a equação anterior descreve o movimento do CM das duas partículas. Esta equação é válida enquanto a partícula 1 está à esquerda do ponto A e a partícula 2 está à sua direita, e ambas as partículas não estão em repouso em relação à superfície em que estão em contato. Da eq.(12b) e dos valores iniciais das velocidades das duas partículas, verificamos que a velocidade do CM deste sistema de partículas é paralelo ao eixo  $x$ ,  $\vec{V}_{CM}(t) = V_{CM}(t) \hat{i}$ , onde  $V_{CM}(t) \in \mathbb{R}$ . Reescrevemos a eq.(12b) em termos de sua componente  $x$ ,

$$\frac{dV_{CM}(t)}{dt} = \frac{g}{m_1 + m_2} \left[ -\mu_c^{(e)} m_1 + \mu_c^{(d)} m_2 \right]. \quad \text{Eq. (13)}$$

No caso geral, o lado direito da eq.(13) é diferente de zero e a velocidade do CM das duas partículas ilustradas na Fig.1 varia no tempo. A equação anterior descreve o movimento de uma partícula em movimento uniformemente desacelerado, que nos permite escrever a dependência temporal de  $V_{CM}(t)$  para  $t \in (0, \bar{t}]$ , onde  $\bar{t}$  é o instante de tempo imediatamente

anterior a uma ou ambas as partículas atingirem o repouso, e nenhuma delas ainda ter cruzado o ponto A na linha horizontal da Fig. 1.

$$\begin{aligned} V_{CM}(t) &= \frac{m_1 v_1(0) + m_2 v_2(0)}{m_1 + m_2} + \frac{g}{m_1 + m_2} \left[ -\mu_c^{(e)} m_1 + \mu_c^{(d)} m_2 \right] t \\ &= \frac{1}{m_1 + m_2} \left[ (v_1(0) - g \mu_c^{(e)} m_1 t) + (v_2(0) + g \mu_c^{(d)} m_2 t) \right], \end{aligned} \quad \text{Eq. (14)}$$

com  $v_1(0) > 0$  e  $v_2(0) < 0$ .

A equação (14) inclui a desigualdade  $|V_{CM}(t)| < |V_{CM}(0)|$ , para  $t > 0$ , que mostra que a velocidade do CM de um conjunto de partículas diminui, em módulo, quando as partículas estão sujeitas a forças dissipativas. Neste caso, a presença deste tipo de força leva a não conservação do momento linear total do sistema formado por essas duas partículas.

Contudo, no caso especial no qual

$$-\mu_c^{(e)} m_1 + \mu_c^{(d)} m_2 = 0 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{\mu_c^{(d)}}{\mu_c^{(e)}}, \quad \text{Eq. (15)}$$

a eq. (13) nos diz que a velocidade do CM dessas duas partículas, que se movimentam em sentidos opostos, é constante durante o intervalo de tempo enquanto nenhuma delas cruza o ponto A, na linha horizontal da Fig.1, e enquanto nenhuma delas atinge o repouso, ou seja,

$$\frac{dV_{CM}(t)}{dt} = 0 \Rightarrow V_{CM}(t) = \frac{m_1 v_1(0) + m_2 v_2(0)}{m_1 + m_2}, \quad \text{Eq. (16)}$$

para  $t \in [0, \bar{t}]$ . Pela relação (10a), o resultado anterior também leva à conservação do momento linear total  $\vec{P}_S$  dessas duas partículas, durante o intervalo de tempo mencionado. É interessante salientar que a condição (15) é equivalente a soma das forças externas aplicadas às duas partículas, (veja a eq.(12a)), seja igual ao vetor nulo,

$$\vec{F}_{a,1}^{(e)} + \vec{F}_{a,2}^{(d)} = \vec{0}. \quad \text{Eq. (17)}$$

O resultado (17) é a condição (conforme pode ser visto nas referências NUSSENZVEIG, 2013; KRANE; RESNICK; HALLIDAY, 1996; KNIGHT, 2009) para que se tenha a conservação do momento linear total de um sistema de partículas, e, conseqüentemente, a conservação do momento linear do CM do conjunto das duas partículas em movimento unidimensional em sentidos opostos ( $D=1$ ), quando a condição (15) é satisfeita, embora a energia cinética total do sistema das duas partículas não seja conservada, como pode ser verificada explicitamente pelo(a) estudante. Lembramos ao(à) leitor(a) que o movimento que estamos estudando dos dois corpos ocorre sobre um plano horizontal e, conseqüentemente, as suas respectivas energias potencial gravitacional não variam durante todo o movimento.

As condições que as forças que agem sobre um corpo devem satisfazer para que ocorram as conservações do momento linear total e da energia mecânica total são distintas. A não conservação da energia mecânica total de um sistema de partículas onde forças não conservativas atuam, não impede que outras quantidades físicas desse conjunto se conserve.

## II.1 Estudo da colisão unidimensional quando $\mu_c^{(d)} = \mu_c^{(e)} \equiv \mu$

Nesta subseção, consideramos a situação física em que a rugosidade é a mesma ao longo da trajetória horizontal na Fig.1 e os objetos colidem frontalmente.

Neste caso, a condição (15), que leva à conservação da velocidade do CM das duas partículas descritas na seção 2, torna-se

$$m_1 = m_2 = m, \quad \text{Eq.(18)}$$

onde  $m$  é o valor da massa de cada uma das duas partículas.

Nos casos em que ocorre a conservação de momento linear total do sistema de partículas,  $\vec{P}_S(t)$  e que são discutidos nos livros-texto de Física do Ensino Médio e dos cursos básicos de Física, este vetor  $\vec{P}_S$  é o mesmo durante todo o movimento dessas partículas, inclusive quando elas interagem entre si. No entanto, as forças de atrito cinético só agem sobre as partículas enquanto elas possuem velocidade diferente de zero em relação à superfície sobre a qual deslizam. No movimento colinear em que duas partículas se deslocam em sentidos opostos, colidem e reverterem o sentido dos seus movimentos, existe um intervalo de tempo em que cada uma das duas partículas fica em repouso, deixando a força de atrito cinético de agir sobre ela. Neste processo de colisão, as forças de atrito cinético que agem sobre as duas partículas são forças externas ao sistema formado por elas. Como fica o momento linear total das duas partículas durante este intervalo de tempo?

É importante que o(a) estudante seja instigado com novas questões que não são explicadas nos livros e para as quais ele(a) tem ferramentas para procurar a solução, fazendo da aula um espaço crítico do conteúdo que se aprende.

Para responder a pergunta anterior, tratamos a seguir, em detalhe, a dinâmica desse sistema de partículas quando uma delas permanece em repouso num pequeníssimo intervalo de tempo antes de inverter o sentido do seu movimento.

Enquanto as duas partículas 1 e 2, que têm massas iguais, têm velocidades diferentes de zero e em sentidos opostos,  $v_1(t) > 0$  e  $v_2(t) < 0$ , respectivamente, a soma de todas as forças externas que atuam neste conjunto de partículas é igual ao vetor nulo. A condição (17), válida na presente configuração das duas partículas em movimento unidimensional, garante que a velocidade do seu CM não varia no tempo enquanto elas têm velocidades diferentes de zero. A eq.(16) continua válida, e para o caso em que as duas partículas têm massas iguais, esta torna-se:

$$V_{CM} = \frac{v_1(0)+v_2(0)}{2}. \quad \text{Eq. (19)}$$

$v_1(0)$  é a velocidade inicial da partícula 1, com  $v_1(0) > 0$ , e  $v_2(0)$  é a velocidade inicial da partícula 2, com  $v_2(0) < 0$ .

Considerando o caso em que uma partícula, por exemplo, a partícula 2 alcança o repouso no instante  $\bar{t}$ ,  $v_2(\bar{t}) = 0$ , antes de colidir com partícula 1, temos

$$m \frac{dv_2(t)}{dt} = 0, \quad \text{para } t \geq \bar{t}. \quad \text{Eq. (20)}$$

Para  $t \geq \bar{t}$  a variação temporal da velocidade do CM do conjunto de partículas com massas iguais, a eq.(11) torna-se

$$\frac{dV_{CM}(t)}{dt} = -\frac{1}{2}\mu_c g, \quad \text{Eq. (21)}$$

mostrando que a lei de conservação do momento linear total do sistema das duas partículas de massas iguais deixa de valer para  $t \geq \bar{t}$ .

Outra possibilidade para a configuração das duas partículas na Fig.1, referente à condição  $\mu_c^{(e)} = \mu_c^{(d)} = \mu_c$ , é quando as duas partículas, com massas iguais, colidem antes de parar.

O sentido do movimento das duas partículas depois da colisão depende do valor do coeficiente de restituição  $e$  na colisão do movimento unidimensional. Chamamos de  $t_c$  o instante em que ocorre a colisão das duas partículas em movimento unidimensional em sentidos opostos. O coeficiente de restituição  $e$  é definido como

$$e \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v_2(t_c + \Delta t) - v_1(t_c + \Delta t)}{v_1(t_c) - v_2(t_c)}. \quad \text{Eq. (22)}$$

Se após a colisão as duas partículas se movimentam no mesmo sentido, ou seja,  $v_1(t) > 0$  e  $v_2(t) > 0$ , ou  $v_1(t) < 0$  e  $v_2(t) < 0$ , para  $t > t_c$ , a resultante das forças externas agindo sobre elas não é um vetor nulo, uma vez que o sentido das duas forças de atrito agindo sobre os dois corpos é o mesmo. Em ambos os casos, a partir da colisão, a velocidade  $V_{CM}$  do conjunto formado pelas duas partículas não se conserva.

A partir deste ponto, consideramos em detalhes a situação durante a colisão entre as duas partículas, com massas iguais, quando uma das partículas, por exemplo, a partícula 2, para em  $t = t_c$  e reverte o sentido do seu movimento inicial. Durante o intervalo de tempo  $t \in [t_c, t_c + \delta t]$ , a velocidade da partícula 2 é zero,  $v_2(t) = 0$ . Durante o intervalo de tempo  $\delta t$ , a força de atrito que age sobre a partícula 2,  $\vec{F}_{a,e}^{(2)}(t)$ , é a força de atrito estático. Durante este intervalo de tempo temos as forças de contato entre os dois corpos. Para simplificar o nosso modelo, que descreve esse contato entre as duas partículas, introduzimos uma mola entre elas. Na Fig. 2, desenhamos as forças que atuam nas duas partículas durante o intervalo de tempo  $\delta t$ , enquanto a partícula 2 está em repouso. Como nosso sistema é composto pelas partículas 1 e 2, as forças que a mola exerce em ambos os corpos,  $\vec{F}_m^{(1)}(t)$  e  $\vec{F}_m^{(2)}(t)$ , são forças internas e não afetam o movimento do CM deste conjunto de partículas. Devido à natureza interna das forças entre a mola e as duas partículas, essa simplificação de utilizarmos a mola para visualizar a interação entre os dois corpos não limita os resultados que obtemos para o CM do conjunto formado pelas duas partículas. Para  $t \in [t_c, t_c + \delta t]$ , a equação (11) do CM deste sistema é

$$2m \frac{dV_{CM}(t)}{dt} = -\mu_c mg - F_{a,e}^{(2)}(t), \quad \text{Eq. (23)}$$

para este intervalo de tempo e

$$\vec{F}_{a,e}^{(2)}(t) = -F_{a,e}^{(2)}(t)\hat{i}, \quad \text{Eq. (24)}$$

onde  $F_{a,e}^{(2)}(t)$  é o módulo da força de atrito estático. O módulo desta força pode variar no intervalo  $0 \leq F_{a,e}^{(2)} \leq \mu_e mg$ , e  $\mu_e$  é o coeficiente da força de atrito estático.

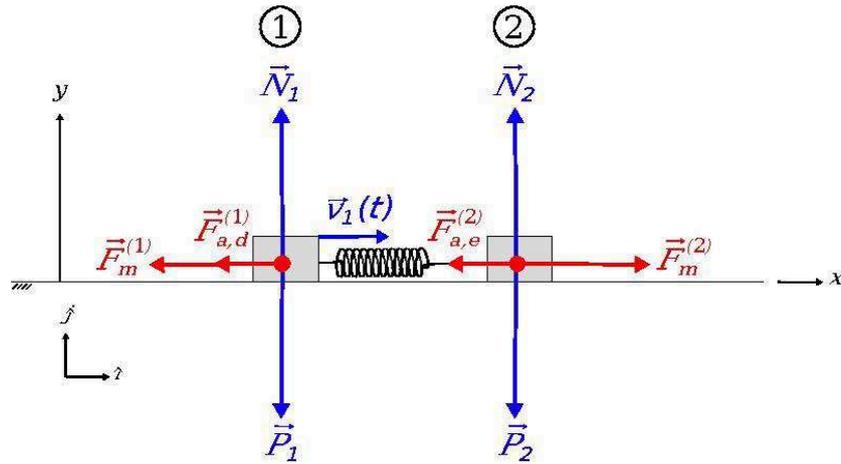


Fig. 2 – (Figura colorida) As forças que atuam sobre as partículas 1 e 2 quando partícula 2 alcança o repouso em  $t=t_c$  para inverter o sentido do seu movimento. Neste momento as velocidades das duas partículas são:  $v_1(t_c) \neq 0$  e  $v_2(t_c) = 0$ . Incluímos uma mola para representar uma colisão mais suave entre as partículas.

A variação da velocidade do CM das duas partículas, com massas iguais, durante o intervalo de tempo  $\delta t$  é

$$\begin{aligned} \Delta V_{CM}(t_c) &= V_{CM}(t_c + \delta t) - V_{CM}(t_c) = \frac{1}{2m} \int_{t_c}^{t_c + \delta t} (-\mu_c m g - F_{a,e}^{(2)}(t)) dt \\ &\approx -(\mu_c m g + \bar{F}_{a,e}^{(2)}) \delta t \\ \Rightarrow \Delta V_{CM}(t_c) &\approx -\frac{\delta t}{2m} (\mu_c m g + \bar{F}_{a,e}^{(2)}), \end{aligned} \quad \text{Eq. (25)}$$

onde  $\bar{F}_{a,e}^{(2)}$  é o valor médio da força de atrito estático que atua na partícula 2 durante o intervalo de tempo  $\delta t$ .

Uma vez que

$$0 \leq F_{a,e}^{(2)}(t) \leq \mu_e m g \Rightarrow \bar{F}_{a,e}^{(2)}(t) < \mu_e m g \quad \text{Eq. (26)}$$

usamos a desigualdade (26) para reescrever a eq.(25),

$$\Delta V_{CM}(t) \lesssim -\frac{g(\delta t)}{2} (\mu_c + \mu_e), \quad \text{Eq. (27)}$$

o que confirma que, durante o intervalo de tempo  $t \in [t_c, t_c + \delta t]$  em que ocorre a colisão entre as duas partículas, a velocidade  $V_{CM}$  do conjunto formado por esses dois corpos não se conserva.

Dependendo do valor do coeficiente de restituição  $e$ , após a colisão das duas partículas, o sentido de movimento dos dois corpos pode ser oposto e a velocidade do CM dessas duas partículas volta a ser uma quantidade conservada novamente. O resultado (27) afirma que a velocidade do CM deste conjunto de partículas, com massas iguais, é conservada antes e depois da colisão, mas o valor constante da velocidade do CM,  $V_{CM}$ , não é o mesmo antes e após a colisão.

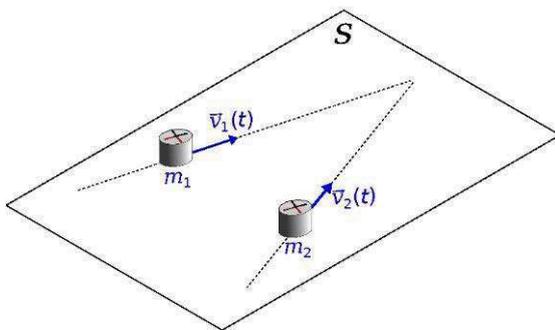
## II.2 A não conservação da velocidade do CM do sistema de duas partículas sob ação de forças de atrito cinético em $D \geq 2$ .

Consideramos um sistema composto de duas partículas deslizando sobre uma superfície horizontal bidimensional  $S$  ( $D = 2$ ). A massa da partícula 1 é  $m_1$  e  $m_2$  é a massa da partícula 2. A rugosidade entre a superfície  $S$  e as partículas tem o mesmo valor em qualquer lugar desta superfície. As duas partículas e suas trajetórias são apresentadas na Fig. 3a.

Na Fig. 3b são ilustradas as forças que atuam nos dois corpos. As três forças agindo em cada partícula- $i$  são: força peso  $\vec{P}_i$ , a força normal  $\vec{N}_i$  e a força de atrito cinético  $\vec{F}_a^{(i)}$ , com  $i = 1, 2$ . Todas as três forças são forças externas ao sistema formado pelos dois corpos. Uma vez que o movimento de ambas as partículas ocorre sobre a superfície horizontal  $S$ , temos

$$\vec{P}_i + \vec{N}_i = \vec{0}, \quad \text{Eq. (28)}$$

com  $i = 1, 2$ .  
(a)



(b)

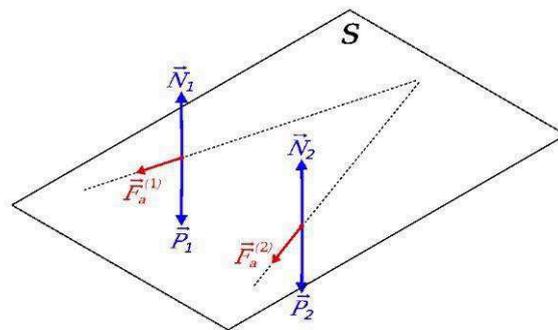


Fig. 3 – (Figura colorida) (a) Duas partículas, 1 e 2, movendo-se sobre uma superfície horizontal  $S$ . No instante  $t$ , as suas velocidades são  $\vec{v}_1(t)$  e  $\vec{v}_2(t)$ , respectivamente. (b) Desenhamos as forças que atuam sobre as duas partículas, incluindo as forças de atrito cinético,  $\vec{F}_a^{(i)}$ ,  $i = 1, 2$ , que agem sobre elas.

As equações de movimento das partículas são:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i(t)}{dt} = \vec{F}_a^{(i)}, \quad i = 1 \text{ e } 2. \quad \text{Eq. (29)}$$

O sentido da força de atrito cinético  $\vec{F}_a^{(i)}$  em cada partícula é contrário ao sentido do vetor velocidade  $\vec{v}_i(t)$  de cada partícula- $i$ ,  $i = 1, 2$ , em cada instante  $t$ . O coeficiente de atrito cinético vale  $\mu_c$ . Para  $i = 1$ , temos

$$\vec{F}_a^{(1)} = -\mu_c m_1 g \frac{\vec{v}_1(t)}{|\vec{v}_1(t)|}, \quad \text{Eq. (30a)}$$

com  $\vec{v}_1(t) \neq \vec{0}$ .

Para  $i = 2$ , temos

$$\vec{F}_a^{(2)} = -\mu_c m_2 g \frac{\vec{v}_2(t)}{|\vec{v}_2(t)|}, \quad \text{Eq. (30b)}$$

com  $\vec{v}_2(t) \neq \vec{0}$ .

O vetor velocidade do CM do sistema,  $\vec{V}_{CM}(t)$ , é dado pela eq.(7). A derivada temporal desta equação é igual a Eq. (12a), que escrita em termos das forças das Eq. (30a) e (30b), que agem sobre as duas partículas, fica:

$$\frac{d\vec{V}_{CM}(t)}{dt} = - \frac{\mu_c g}{m_1+m_2} \left( \frac{m_1 \vec{v}_1(t)}{|\vec{v}_1(t)|} + \frac{m_2 \vec{v}_2(t)}{|\vec{v}_2(t)|} \right), \quad \text{Eq. (31)}$$

com  $\vec{v}_1(t) \neq \vec{0}$  e  $\vec{v}_2(t) \neq \vec{0}$ . Para um movimento bidimensional ( $D = 2$ ), ou até tridimensional ( $D = 3$ ), os vetores  $\vec{v}_1(t)$  e  $\vec{v}_2(t)$  não são colineares, de forma que o lado direito da equação (31) nunca é igual ao vetor nulo. A variação temporal do vetor  $\vec{V}_{CM}(t)$  é não nula, de forma que, pelas equações (9) e (10a) o momento linear total do sistema das partículas não se conserva quando as forças de atrito cinético estão agindo sobre as duas partículas que se movem em  $D \geq 2$ . A conservação do momento linear total de um sistema de partículas na presença de forças de atrito cinético em  $D \geq 2$  pode acontecer somente quando neste conjunto de partículas temos três ou mais partículas.

### III. Montagem experimental: dois blocos circulares com massas iguais deslizando sobre uma superfície com atrito

Na seção anterior, mostramos que, para certas configurações espaciais, é possível ter a conservação da velocidade instantânea do CM de um conjunto formado por duas partículas, se movendo unidimensionalmente em sentidos opostos sob a ação de forças de atrito cinético antes da colisão entre elas. Também foi mostrado que esta conservação não é válida quando as duas partículas se movem em  $D$  dimensões, com  $D \geq 2$ .

Na Fig. 4, apresentamos uma configuração experimental simples, que ser pode facilmente reproduzida na sala de aula, que utilizamos para testar experimentalmente algumas previsões teóricas apresentadas na seção II. Filmamos dois blocos circulares deslizando sobre uma madeira MDF com dimensões: comprimento  $D = (200,40 \pm 0,01)cm$ , espessura  $h = (1,64 \pm 0,01)cm$ , e largura  $d = (23,60 \pm 0,01)cm$ , no estudo do movimento unidimensional dos blocos, e  $d = (30,05 \pm 0,01)cm$  no estudo do movimento bidimensional.

Os dois blocos deslizam sobre uma placa de madeira. O valor do coeficiente de atrito cinético entre as superfícies de contato é aproximadamente o mesmo durante todo o movimento dos dois blocos sobre a placa de madeira. Neste arranjo experimental, a condição (15) a ser satisfeita para termos a conservação da velocidade do seu CM no movimento unidimensional impõe que as massas dos dois blocos circulares tenham o mesmo valor. As massas dos blocos  $A$  e  $B$  que utilizamos na montagem experimental são:  $m_A = m_B = (13,6 \pm 0,1)g$ . Os dois blocos são feitos de PVC e estão ilustrados na Fig. 5.

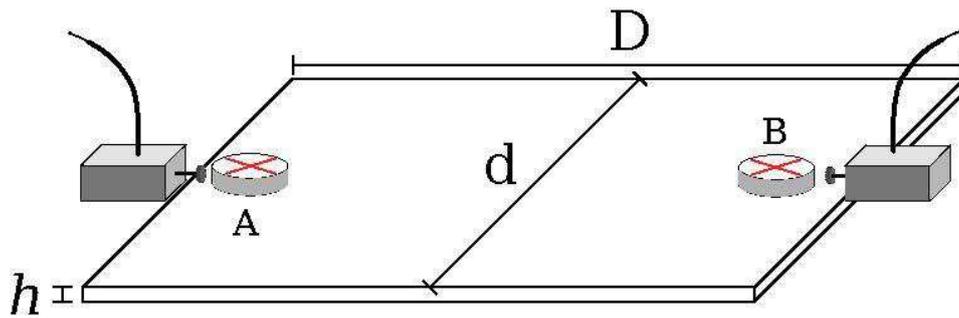


Fig. 4 – Esquema da montagem experimental para estudar os movimentos uni e bi-dimensionais de dois blocos circulares A e B, sobre uma placa de madeira MDF, com atrito. A tábua de madeira tem dimensões  $D \times d \times h$ , cujos valores estão no texto. Dois atiradores mecânicos são colocados nas duas extremidades da placa de madeira, de forma a iniciar o movimento dos discos.

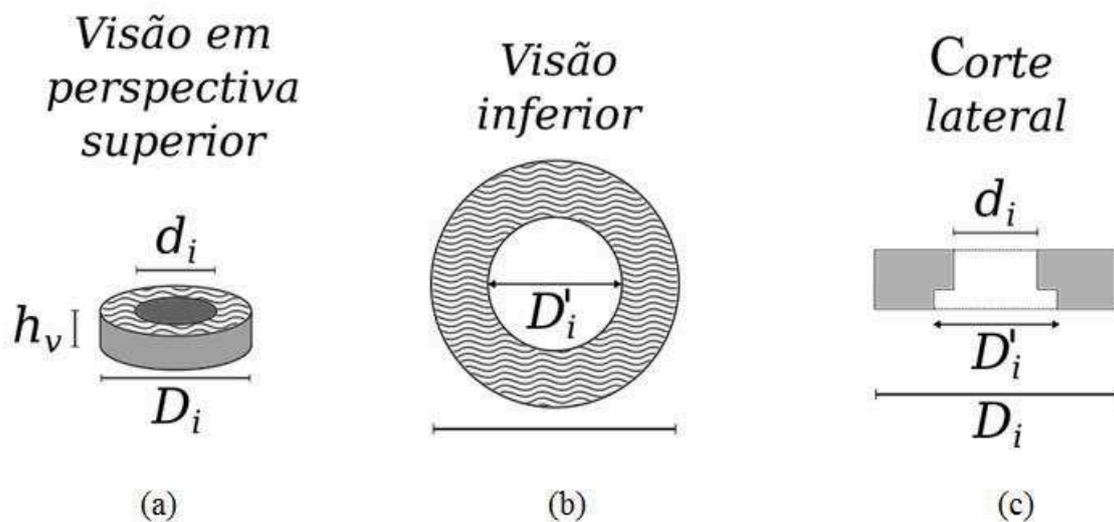


Fig. 5 – Descrição das dimensões dos dois blocos circulares PVC, com  $i = A$  e  $B$ , que se movem sobre a placa de madeira. As dimensões dos blocos são apresentadas no texto.

As dimensões dos blocos são ligeiramente diferentes:

i) bloco A:  $D_A = (3,83 \pm 0,01)cm$ ,  $D'_A = (2,57 \pm 0,01)cm$ ,  $d_A = (1,78 \pm 0,01)cm$  e

$h_A = (1,25 \pm 0,01)cm$ ;

ii) bloco B:  $D_B = (3,83 \pm 0,01)cm$ ,  $D'_B = (2,54 \pm 0,01)cm$ ,  $d_B = (1,73 \pm 0,01)cm$  e

$h_B = (1,25 \pm 0,01)cm$ .

Um atirador mecânico impulsiona o bloco, colocando-o em movimento. Os dois atiradores mecânicos estão localizados nos extremos da madeira (veja a Fig. 4). Os movimentos dos dois blocos sobre a placa de madeira são filmados por uma câmera de um *smartphone*

com 30 fps (registradas no movimento unidimensional) e 60 fps (registradas no movimento bidimensional).

Os dados obtidos a partir dos filmes realizados com o *smartphone* são analisados utilizando o aplicativo *Tracker* (BROWN, 2019), que é de domínio público, e que possui manual em português.

### III.1 Análise dos resultados experimentais

#### III.1.1 O movimento unidimensional ( $D = 1$ ) dos dois blocos em sentidos opostos

Usamos a placa de madeira MDF com largura igual a  $d = (23,60 \pm 0,01)$  cm para estudar o movimento unidimensional dos dois blocos circulares de PVC em sentidos opostos. Com um lápis, riscamos na madeira uma linha preta de forma a ajudar na marcação da trajetória dos blocos  $A$  e  $B$ , lançados pelos atiradores. O CM de cada bloco segue uma linha que faz um ângulo  $\theta_A(t)$  para o bloco  $A$  em relação à linha de referência preta riscada na madeira, e  $\theta_B(t)$  para o bloco  $B$ , em relação à mesma linha de referência (veja a Fig. 6). Durante o movimento, os blocos podem ter uma rotação em torno do eixo central vertical de cada cilindro. Contudo, esses efeitos de rotação e os ângulos  $\theta_A(t)$  e  $\theta_B(t)$  podem ser reduzidos com o correto posicionamento dos atiradores.

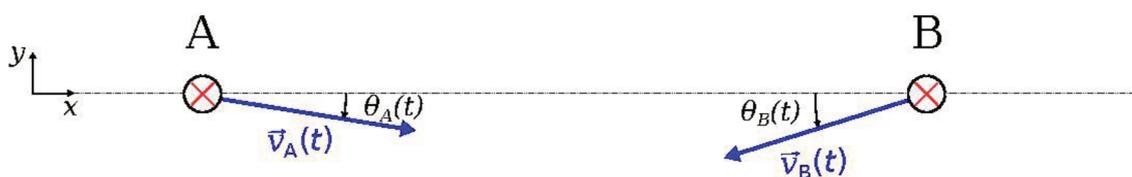


Fig. 6 – (Figura colorida) A direção dos vetores velocidade instantânea dos blocos  $A$ ,  $B$ ,  $\vec{v}_A(t)$  e  $\vec{v}_B(t)$ , em relação à linha de referência preta riscada na placa de madeira, que denominamos de eixo  $x$ . O ângulo  $\theta_A(t)$  é negativo quando medido no sentido horário e positivo no caso contrário. O ângulo  $\theta_B(t)$  é positivo quando é medido no sentido anti-horário e negativo no sentido horário. O eixo  $y$  é perpendicular ao eixo  $x$  e está contido na superfície da madeira, como mostrado nesta figura.

A medida das componentes  $y$  dos vetores velocidade dos dois blocos durante o intervalo de tempo  $t \in [0,000s, 0,399s]$ , quando eles deslizam sob a ação das forças de atrito cinético e que é anterior à colisão mútua, permite verificar o quão próximo o movimento dos dois corpos  $A$  e  $B$  é uma trajetória unidimensional. Em todas as nossas tentativas experimentais não conseguimos um movimento dos dois blocos em que após a colisão entre eles o movimento fosse quase-unidimensional ao longo do eixo  $x$ .

No Apêndice A, temos a Tabela A1 com os valores das componentes  $x$  e  $y$  dos vetores velocidade dos blocos  $A$  e  $B$ , e do seu CM obtidos da análise do filme por meio do aplicativo *Tracker*, num intervalo de tempo anterior à colisão entre eles.

A precisão na posição dos blocos  $A$  e  $B$  (as linhas cruzadas desenhadas na parte superior dos blocos) é determinada pelo aplicativo *Tracker* através do posicionamento da imagem dos blocos. Denominamos as incertezas nas componentes dos vetores posição dos blocos  $A$  e  $B$  de:  $\overline{\Delta x_A}$  e  $\overline{\Delta y_A}$ , e  $\overline{\Delta x_B}$  e  $\overline{\Delta y_B}$ , respectivamente. Os seus valores são:

$$\overline{\Delta x_A} = \overline{\Delta x_B} = 0,2mm, \quad \text{Eq. (32a)}$$

$$\overline{\Delta y_A} = \overline{\Delta y_B} = 0,2mm. \quad \text{Eq. (32b)}$$

O intervalo de tempo entre dois quadros consecutivos no filme,  $\Delta t$ , é

$$\Delta t = 0,033s. \quad \text{Eq. (33a)}$$

A incerteza informada pelo aplicativo *Tracker* na obtenção de quadros sequenciados do filme,  $\overline{\Delta t}$ , é

$$\overline{\Delta t} \approx 0,3 \times 10^{-9}s. \quad \text{Eq. (33b)}$$

Substituindo os valores das incertezas (32a) - (33b) no lado direito do resultado (B.5), este nos dá os valores das barras de erros das componentes dos vetores velocidades dos blocos  $A$ ,  $B$  e do seu CM,  $v_i^{(J)}(t) \pm \Delta v_i^{(J)}(t)$ , com  $i = x$  e  $y$ , e  $J = A, B$  e CM,

$$\Delta v_x^{(J)}(t) = 1,2 \times 10^{-2} \left(\frac{m}{s}\right), \quad \text{Eq. (34 a)}$$

$$\Delta v_x^{(CM)}(t) = 1,2 \times 10^{-2} \left(\frac{m}{s}\right), \quad \text{Eq. (34 b)}$$

$$\Delta v_y^{(J)}(t) = 1,2 \times 10^{-2} \left(\frac{m}{s}\right), \quad \text{Eq. (34c)}$$

$$\Delta v_y^{(CM)}(t) = 1,2 \times 10^{-2} \left(\frac{m}{s}\right), \quad \text{Eq. (34 d)}$$

sendo que em (34a) e (34c) temos  $J = A$  e  $B$ . A contribuição da incerteza na medida do tempo,  $\overline{\Delta t}$ , nas barras de erro das velocidades dos dois blocos e do CM é insignificante e, portanto, nós a negligenciamos.

A Fig. 7 mostra o gráfico das componentes  $x$  dos vetores velocidade dos blocos  $A$  e  $B$ , e do CM do sistema formado por estes dois blocos, com suas respectivas barras de erro. Os melhores ajustes das componentes  $x$  dessas velocidades, durante o intervalo de tempo  $t \in [0,000s, 0,399s]$ , são

$$v_x^{(A)}(t) = -2,40t \left(\frac{m}{s^2}\right) + 1,84 \left(\frac{m}{s}\right), \quad \text{Eq. (35a)}$$

$$v_x^{(B)}(t) = 2,43t \left(\frac{m}{s^2}\right) - 2,06 \left(\frac{m}{s}\right), \quad \text{Eq. (35b)}$$

$$V_x^{(CM)}(t) = 1,05 t \times 10^{-2} \left(\frac{m}{s^2}\right) - 0,13 \left(\frac{m}{s}\right). \quad \text{Eq. (35c)}$$

As expressões (35) mostram que a velocidade do CM dos blocos  $A$  e  $B$  ao longo da direção  $x$  é (em boa aproximação) constante durante o intervalo de tempo  $t \in [0,000s, 0,399s]$ , quando a força resultante em cada bloco é uma força de atrito cinético. Observe na Fig. 7 e

nas expressões (35a) e (35b) que o módulo da componente  $x$  das velocidades dos blocos  $A$  e  $B$  diminuam durante o mesmo intervalo de tempo.

As barras de erro nos gráficos de  $V_{CM} \times t$  estão em torno de 9.2%, embora as barras de erro nas medidas das componentes  $x$  da velocidade dos corpos  $A$  e  $B$ ,  $v_x^{(A)}$  e  $v_x^{(B)}$ , estão em torno de 0.7%. Essa diferença nos valores dessas barras de erro decorre do fato de que os valores de  $V_{CM}(t)$  são muito pequenos. As barras de erro nas medidas de  $V_{CM}(t)$  podem ser diminuídas em um experimento mais sofisticado, mas esse não foi o nosso objetivo.

Dos dados da Tabela A1 verificamos que as componentes  $y$  dos vetores velocidade dos blocos  $A$  e  $B$  variam no intervalo:  $v_y^{(A)} \in [-2,387 \times 10^{-2}(m/s), -7,099 \times 10^{-3}(m/s)]$ , e  $v_y^{(B)} \in [779 \times 10^{-2}(m/s), 3,432 \times 10^{-2}(m/s)]$ , durante o intervalo de tempo  $t \in [0,000s, 0,399s]$ , que nos dá que durante este intervalo de tempo temos  $|v_x^{(J)}| \sim 10^2 \times |v_y^{(J)}|$ , com  $J = A$  e  $B$ . O valor médio dos ângulos desenhados na Fig. 6 são  $\bar{\theta}_A = -0,595^\circ$  e  $\bar{\theta}_B = 0,974^\circ$ , para o mesmo intervalo de tempo.

Comparando os valores das componentes  $y$  dos vetores velocidade dos blocos  $A$  e  $B$ , e de suas respectivas incertezas, eq.(34), verificamos que os módulos dessas últimas são maiores do que os valores de  $v_y^{(J)}$ , com  $J = A, B$ . Embora não possamos fazer uma afirmação quantitativa sobre os valores de  $v_y^{(J)}$ ,  $J = A, B$ , podemos afirmar que  $v_x^{(J)} \sim 10^2 \times v_y^{(J)}$ ,  $J = A, B$ , mostrando que o movimento dos dois blocos, cujas velocidades são apresentadas na Fig.7, é aproximadamente um movimento unidimensional. Neste caso, o melhor ajuste de  $V_x^{(CM)}(t)$ , eq.(35c), mostra que, dentro das incertezas experimentais, a velocidade do CM dos blocos  $A$  e  $B$  que se deslocam em sentidos opostos ao longo da linha preta é constante durante o intervalo de tempo  $t \in [0,000s, 0,399s]$ , quando a resultante das forças que atuam em cada bloco é apenas a força de atrito cinético e os blocos ainda não colidiram.

A análise da Fig.7 nos diz que os módulos das velocidades dos blocos  $A$  e  $B$  diminuem ao longo do tempo. Este resultado está em concordância com a diminuição da energia cinética de cada bloco devido a ação da força de atrito cinético sobre cada um deles. No entanto, no movimento do CM do sistema formado pelos dois blocos (veja a eq.(12a)), as duas forças de atrito cinético agem simultaneamente sobre a mesma partícula fictícia localizada neste CM, levando ao cancelamento do efeito dessas duas forças quando os dois blocos têm massas iguais e se movimentam em sentidos opostos. Por isso, a velocidade do CM do sistema composto pelos dois blocos de PVC se conserva ao longo do intervalo de tempo considerado para a obtenção dos dados da Tabela A1, apesar de forças dissipativas agirem sobre a partícula fictícia localizada neste CM.

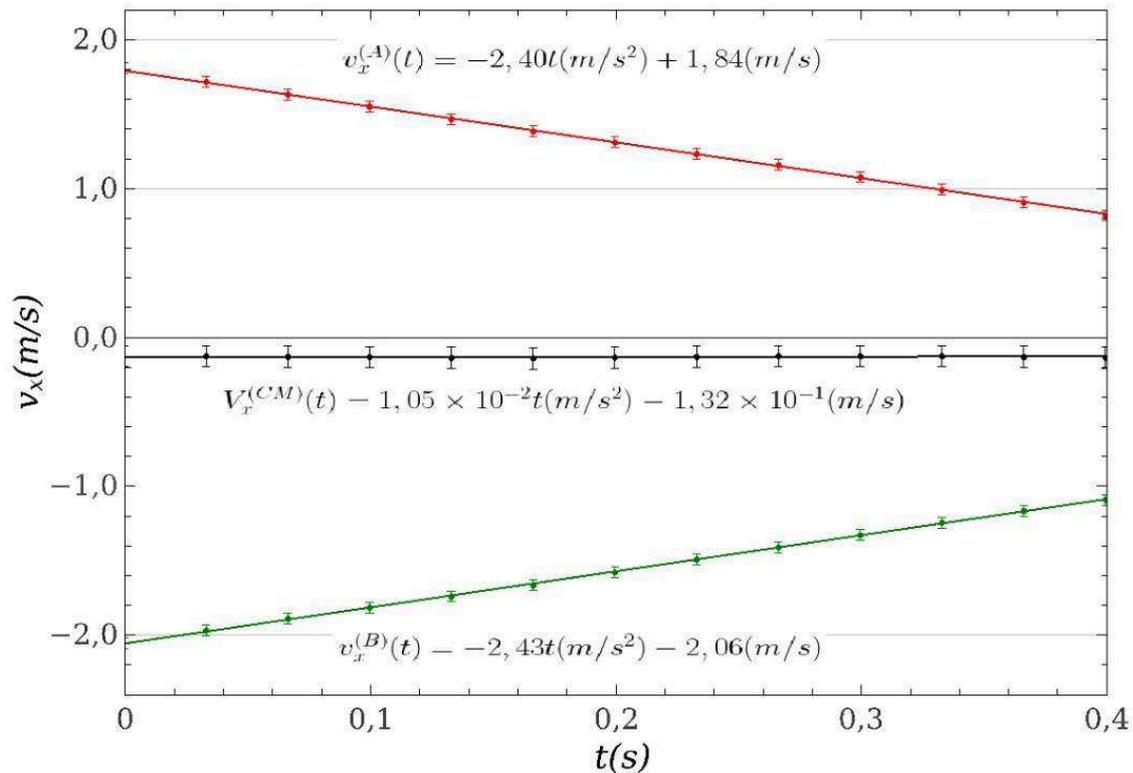


Fig. 7 – (Figura colorida) Gráfico da componente  $x$  das velocidades dos blocos  $A$  e  $B$ , e do CM do sistema composto por esses dois blocos, versus tempo,  $v_x^{(J)} \times t$ ,  $J = A, B$  e  $CM$ , e suas respectivas barras de erro. As linhas desenhadas no gráfico correspondem ao melhor ajuste de cada conjunto de dados experimentais. Os pontos vermelhos descrevem a velocidade  $v_x^{(A)}(t)$ , os pontos verdes pertencem a velocidade  $v_x^{(B)}(t)$  e os pontos pretos são os valores da velocidade  $v_x^{(CM)}(t)$ .

### III.1.2 O movimento bidimensional ( $D = 2$ ) dos dois blocos com massas iguais

Usamos uma tábua de madeira de MDF de largura  $(30,05 \pm 0,01)cm$  para estudar o movimento dos blocos  $A$  e  $B$  em duas dimensões espaciais ( $D = 2$ ). Na Fig. 8, desenhamos as trajetórias seguidas pelos blocos  $A$  e  $B$  nos seus respectivos movimentos. As suas dimensões e valores das massas são apresentadas na subseção III.1.1.

Na Tabela A2, apresentada no Apêndice A, temos os valores das componentes  $x$  e  $y$  dos vetores velocidade dos blocos  $A$ ,  $B$ , e do CM do sistema formado pelos dois blocos circulares de PVC, durante o intervalo de tempo  $t \in [0,000s, 0,500s]$ , quando a força resultante que atua em cada corpo é a força de atrito cinético.

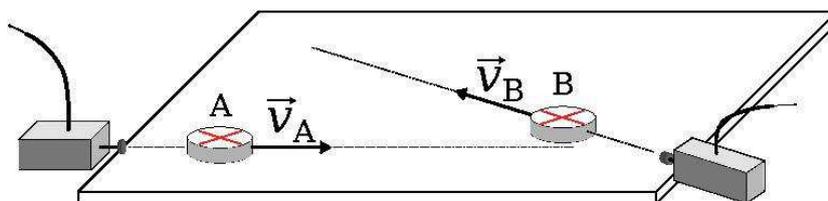


Fig. 8 – (Figura colorida) Um esboço dos caminhos percorridos pelos dois blocos circulares de PVC no movimento bidimensional deste conjunto.

Uma rápida verificação nos dados da Tabela A2 nos permite constatar que a componente  $x$  do vetor velocidade do CM do sistema dos dois blocos,  $\vec{V}_{CM}(t)$ , é aproximadamente constante durante o intervalo de tempo  $t \in [0,000s, 0,500s]$ , enquanto que no caso presente, não podemos negligenciar a componente  $y$  de  $\vec{V}_{CM}(t)$ , uma vez que suas barras de erro são muito menores do que seus respectivos valores. Desenhemos na Fig. 9a os valores das componentes  $x$  e  $y$  do vetor velocidade do CM do conjunto formado pelos dois blocos de PVC que seguem os caminhos bidimensionais desenhados na Fig. 8.

Os dados medidos das componentes  $x$  e  $y$  das velocidades dos dois blocos nesta montagem experimental são apresentados na Tabela A2. Esses dados nos permitem concluir que o vetor momento linear do CM não se conserva durante o movimento bidimensional quando os dois corpos estão sob a ação das forças de atrito, concordando com a previsão teórica discutida na subseção II.2. Desta forma, mostramos como a força de atrito cinético modifica o momento linear total de duas partículas em movimento bidimensional. Lembramos que esse tipo de força pertence ao nosso dia a dia e que é importante entendermos como ela interfere no movimento dos corpos.

A não conservação do vetor  $\vec{V}_{CM}(t)$  do sistema composto pelos dois blocos de PVC, de massas iguais, em movimento bidimensional durante o intervalo de tempo  $t \in [0,000s, 0,500s]$  fica clara na evolução no tempo do vetor  $\vec{V}_{CM}(t)$  apresentada na Fig. 9b. Neste gráfico, desenhemos os vetores velocidade dos blocos  $A, B$  e do CM desses corpos. Observe que o módulo e a direção do vetor  $\vec{V}_{CM}(t)$  varia durante este intervalo de tempo.

#### IV. Conclusões

Quando andamos ou corremos, assim como corpos que deslizam sobre uma superfície, estamos todos sujeitos a forças de atrito estático e cinético. É sempre importante saber como essas forças com que convivemos diariamente interferem no movimento dos corpos. Essas forças interferem diretamente nos movimentos ora de “forma desejável”, como a aderência de pneus de automóveis no asfalto, ora de “forma indesejável”, como em situações em que o atrito exige o gasto de combustível para manter o carro em movimento. O atrito é um assunto importante, objeto de estudos científicos e tecnológicos. A ação desse tipo de força deve ser abordada tanto no Ensino Médio quanto no Ensino Superior, de forma que os estu-

dantes aprendam sobre fenômenos que tenham por origem as forças de fazem parte do seu cotidiano.

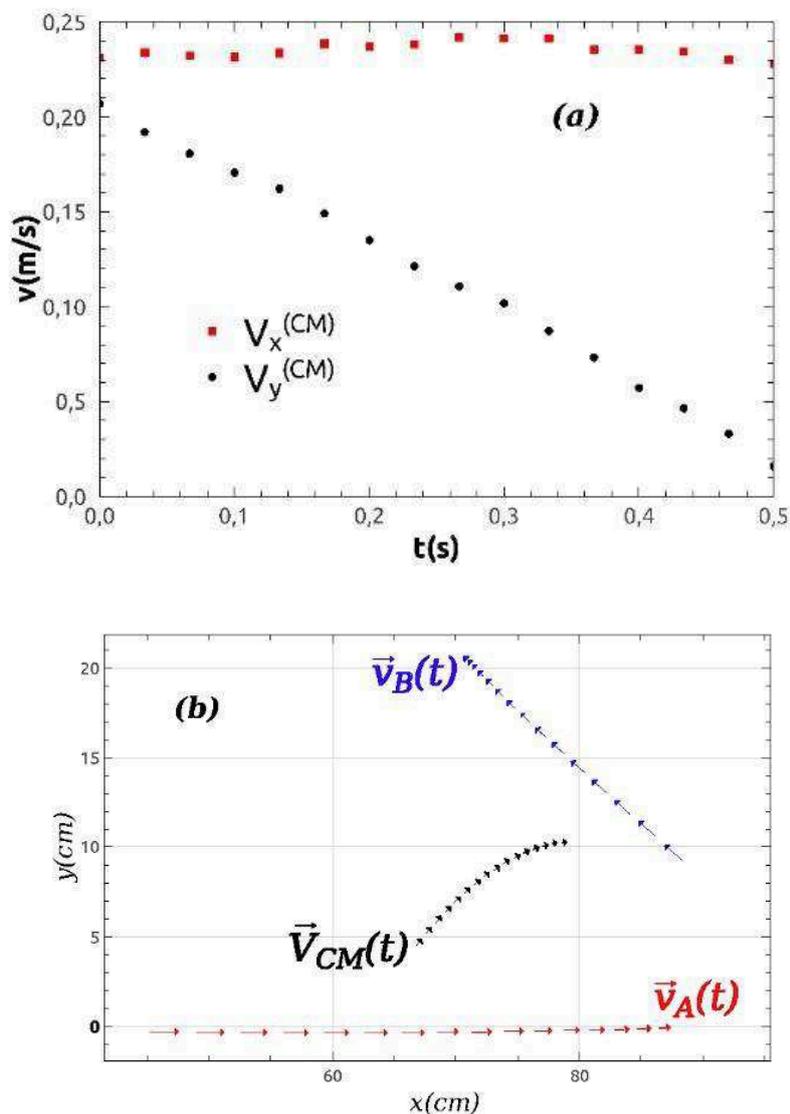


Fig. 9 – (Figura colorida) (a) os gráficos das componentes  $x$  e  $y$  do vetor  $\vec{V}_{CM}(t)$  do sistema formado pelos blocos A e B no movimento bidimensional representado na Fig.8. Os pontos no gráfico (a) nas curvas  $V_x^{(CM)} \times t$  e  $V_y^{(CM)} \times t$  são representados pelos quadrados vermelhos e os círculos pretos, respectivamente. (b) as velocidades vetoriais dos blocos A (setas vermelhas), B (setas azuis) e do CM dos dois blocos (setas pretas) ao longo de suas respectivas trajetórias sobre a madeira de MDF. Em ambas as figuras, o tempo  $t$  varia no intervalo  $t \in [0,000s, 0,500s]$ .

Neste artigo, discutimos casos particulares da atuação da força de atrito cinético que podem ser abordados em aula pela(o) docente de maneira a complementar a discussão das forças de atrito com suas (seus) alunas(os). Em particular, mostramos formal e experimental-

mente que a velocidade  $V_{CM}$  do CM de um sistema formado por duas partículas em movimento ao longo de uma reta, sob a ação de forças de atrito cinético, que são forças externas ao sistema formado pelos dois corpos, se conserva antes da colisão quando uma partícula se desloca em direção a outra. Demonstramos teoricamente a conservação de  $V_{CM}$  no movimento unidimensional ( $D = 1$ ) das duas partículas com diferentes coeficientes de atrito cinético entre elas e a superfície sobre a qual deslizam, quando os dois corpos se deslocam em sentidos opostos e a condição (15) também é satisfeita. No caso unidimensional em que temos um único valor para o coeficiente de atrito cinético entre os blocos e a superfície sobre a qual deslizam, mostramos que a velocidade do CM do conjunto formado pelos dois corpos que possuem massas iguais e se deslocam em sentidos opostos,  $V_{CM}(t)$ , varia apenas durante o intervalo de tempo em que ocorre a colisão entre os dois corpos. Nesta situação, o valor da  $V_{CM}(t)$ , antes e após a colisão, é constante em cada uma dessas fases do movimento dos dois corpos. No entanto, o valor de  $V_{CM}(t)$  nessas duas partes do movimento é diferente. Neste trabalho chamamos a atenção de que a conservação do momento linear total de um conjunto de duas partículas sob a ação de forças de atrito cinético externas é diferente da conservação dessa quantidade física nos exemplos discutidos nos livros-texto utilizados nos Ensinos Médio e Superior, quando o vetor momento linear total do sistema é constante durante todo o movimento dos corpos, incluindo o intervalo de tempo durante o qual os corpos estão colidindo.

Realizamos uma montagem experimental, facilmente reproduzível em sala de aula, para verificar experimentalmente os resultados teóricos obtidos na subseção II.1. Na subseção III.1 analisamos os dados obtidos do filme da colisão dos dois blocos de PVC, de massas iguais, em movimento quase unidimensional e em sentidos opostos. Esses dados estão disponíveis na Tabela A1 e no gráfico da Fig. 7. Mostramos que, dentro das incertezas experimentais, a velocidade do CM desse conjunto se conserva antes da colisão entre eles. Lembramos que antes da colisão entre os dois blocos de PVC eles também estão sob a ação de forças de atrito cinético.

Mostramos matematicamente na subseção II.2, que o vetor velocidade do CM de um sistema formado por duas partículas com massas iguais,  $\vec{V}_{CM}(t)$ , não se conserva quando elas percorrem trajetórias não colineares em  $D$  dimensões, com  $D \geq 2$ .

Também filmamos o movimento não colinear dos dois blocos de PVC deslizando sobre a superfície de madeira MDF. Os dados experimentais obtidos da análise das imagens desse movimento via aplicativo *Tracker* estão disponíveis na Tabela A2 e nos gráficos nas Fig. 9a e 9b. Eles apoiam a conclusão de que o vetor velocidade do CM deste conjunto formado pelos blocos  $A$  e  $B$ ,  $\vec{V}_{CM}(t)$ , não se conserva antes da colisão dos dois blocos de PVC, corroborando nossa previsão teórica discutida na subseção II.2.

Finalmente é muito interessante mostrar que forças de atrito cinético, que são forças dissipativas, que levam a não conservação da energia mecânica total de um sistema de partículas, podem também levar a conservação do momento linear total desse sistema.

## Agradecimentos

Os autores agradecem à Prof<sup>ª</sup>. Dra. Ruth Bruno pela leitura detalhada do texto e pelas suas sugestões para o aprimoramento deste artigo.

## Referências bibliográficas

BROWN, D. **Tracker Video Analysis and Modeling Tool**. Disponível em: <<http://www.opensourcephysics.org/items/detail.cfm?ID=7365>>. Acesso em: 12 jan. 2019.

CALDAS, H.; SALTIEL, E. Sentido das Forças de Atrito e Movimento – II: uma análise dos livros utilizados no ensino superior brasileiro. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 21, p. 542-549, dez. 1999.

COSTA, E. V.; FARIA LEITE, C. A. Deslocamento da força normal à superfície de apoio a um corpo em equilíbrio na presença da força de atrito. **Revista Brasileira de Física**, v. 32, n. 4, p. 4301, 2010.

DA SILVA, D. R.; PEIXOTO, P. A força de atrito estático não é conservativa. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 40, n. 1, e1303, 2018. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2017-0146>>.

DE JESUS, V. L. B.; SASAKI, D. G. G. Videoanálise de um experimento de baixo custo sobre atrito cinético e atrito de rolamento. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 36, n. 3, p. 3503, 2014. Disponível em: <<http://www.opensourcephysics.org/items/detail.cfm?ID=7365>>. Acesso em: 12 jan. 2019.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; KRANE, K. S. **Física 1**. Tradução: Gabriel Armando Pellegratti Franco *et al.* 4 ed. Rio de Janeiro: LTC, 1996. 323p. v. 1.

KLEER, A. A.; THIELO, M. R.; SANTOS, A. C. K. A Física utilizada na Investigação de Acidentes de Trânsito. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, v. 14, n. 2, p. 160-169, ago. 1997.

KNIGHT, R. D. **Física: uma abordagem estratégica**. 2. ed. Bookman: Porto Alegre, 2009. v. 1.

MATUO, C. Y.; MARINELLI, J. R. Importância do Cálculo da Propagação de Erros em um Experimento de Atrito Estático. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 24, n. 1, p. 132-139, abr. 2007.

MONTEIRO, M. A. A. *et al.* Abordagem experimental da força de atrito em aulas de física no ensino médio. **Caderno Brasileiro de Ensino de Física**, v. 29, n. 3, p. 1121-1136, dez. 2012. Disponível em: <<https://doi.org/10.5007/2175-7941.2012v29n3p1121>>.

NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica: 1-Mecânica**. São Paulo: E. Blucher, 5 ed., 2013. 394p.

PEIXOTO, P. Qual é a expressão correta para o trabalho realizado pela força de atrito cinético? **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 41, n. 1, 20180153, 2019. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/1806-9126-rbef-2018-0153>>.

TAYLOR, J. R. **An Introduction to Error Analysis**. 2nd ed. University Science Books, 1997.

TOPPING, J. **Errors of Observation and Their Treatment**. Holanda: Springer, 1972.

VUOLO, J. H. **Fundamentos da Teoria dos Erros**. São Paulo: E. Blucher, 1996.

## Apêndices

### Apêndice A – Tabelas das componentes de velocidade dos dois blocos e do seu CM nos movimentos uni e bidimensional

Na Tabela A1 apresentamos os valores das componentes  $x$  e  $y$  do vetor velocidade dos blocos  $A$  e  $B$ , e do CM destes dois blocos de PVC, obtidos da análise do filme por meio do programa *Tracker*.

Os dados desta tabela correspondem ao intervalo de tempo  $t \in [0s, 0,370s]$ , anterior a colisão entre os dois blocos de PVC. Os blocos possuem movimento quase unidimensional e se deslocam em sentidos opostos.

Tabela A1 – Dados das componentes  $x$  e  $y$  dos vetores velocidade dos blocos  $A$  e  $B$  e do CM do conjunto formado por esses dois corpos no movimento (quase unidimensional) em função do tempo.

$t(s)$	$v_x^{(A)}(\frac{m}{s})$	$v_y^{(A)}(\frac{m}{s})$	$v_x^{(B)}(\frac{m}{s})$	$v_y^{(B)}(\frac{m}{s})$	$V_x^{(CM)}(\frac{m}{s})$	$V_y^{(CM)}(\frac{m}{s})$
0,000	1,81	-0,0174	-2,06	0,0453	-0,125	0,0141
0,033	1,72	-0,0189	-1,97	0,0453	-0,125	0,0132
0,066	1,63	-0,0160	-1,89	0,0365	-0,128	0,0102
0,100	1,55	-0,0149	-1,81	0,0328	-0,131	0,00890
0,133	1,47	-0,0201	-1,74	0,0302	-0,136	0,00500
0,166	1,39	-0,0190	-1,67	0,0255	-0,140	0,00320
0,200	1,31	-0,0147	-0,578	0,0251	-0,134	0,00500
0,233	1,23	-0,0110	-1,49	0,0301	-0,129	0,00960
0,266	1,16	-0,0165	-1,41	0,0235	-0,125	0,00350
0,300	1,08	-0,0151	-1,33	0,0177	-0,125	0,00130
0,333	0,992	-0,00590	-1,24	0,0187	-0,125	0,00640
0,366	0,907	-0,00410	-1,17	0,0182	-0,130	0,00710

A Tabela A2 tem os valores das componentes  $x$  e  $y$  das velocidades dos blocos  $A$ ,  $B$ , e do CM do sistema formado pelos dois blocos circulares de PVC, durante o intervalo de tempo  $t \in [0,000s, 0,500s]$ , quando a força resultante de cada corpo é a força de atrito cinético. Os corpos possuem movimento bidimensional sobre a placa de madeira MDF, desenhado na Fig. 8.

Tabela A2. Os dados das componentes  $x$  e  $y$  das velocidades dos blocos  $A$  e  $B$  no movimento bidimensional ( $D = 2$ ), como uma função do tempo  $t$ , e das componentes  $x$  e  $y$  do CM do conjunto formado por esses dois blocos, também em função do tempo.

$t(s)$	$v_x^{(A)}(\frac{m}{s})$	$v_y^{(A)}(\frac{m}{s})$	$v_x^{(B)}(\frac{m}{s})$	$v_y^{(B)}(\frac{m}{s})$	$V_x^{(CM)}(\frac{m}{s})$	$V_y^{(CM)}(\frac{m}{s})$
0,000	1,14	0,000600	-0,679	0,413	0,231	0,207
0,033	1,11	-0,00350	-0,638	0,388	0,234	0,192
0,066	1,06	-0,00190	-0,592	0,364	0,233	0,181
0,100	1,01	-0,00210	-0,549	0,344	0,232	0,171
0,133	0,980	0,000900	-0,512	0,324	0,234	0,162
0,1666	0,945	0,00230	-0,468	0,296	0,239	0,149
0,200	0,893	0,00310	-0,420	0,267	0,237	0,135
0,233	0,849	0,00210	-0,372	0,241	0,238	0,121
0,267	0,810	0,00770	-0,326	0,214	0,242	0,111
0,300	0,766	0,00990	-0,283	0,194	0,242	0,102
0,333	0,719	0,00670	-0,236	0,168	0,241	0,0874
0,367	0,665	0,00750	-0,194	0,139	0,235	0,0734
0,400	0,624	0,00540	-0,152	0,109	0,236	0,0573
0,433	0,585	0,0115	-0,116	0,0818	0,235	0,0467
0,467	0,538	0,0142	-0,0774	0,0521	0,230	0,0331
0,500	0,491	0,00920	-0,0350	0,0227	0,228	0,0160

## Apêndice B – Cálculo das barras de erro na medida das componentes dos vetores velocidade dos blocos

Nas montagens experimentais, as medidas de quantidades físicas possuem incertezas de tal forma que o valor medido dessas grandezas está compreendido dentro de um intervalo de valores possíveis.

As incertezas nas medidas de grandezas físicas e seu tratamento são bem estudados em livros-texto do Ensino Superior (como, por exemplo, nas referências: TOPPING, 1972; TAYLOR, 1997; VOULO, 1996), mas, em geral, não são tratados em livros-texto de Física do Ensino Médio. Para auxiliar o(a) estudante neste tópico, apresentamos aqui uma maneira

simples de calcular as barras de erro na medida da velocidade dos discos que se deslocam sobre a placa de madeira MDF em movimento unidimensional ( $D=I$ ).

Para isso, considere  $\overline{\Delta x}$  como sendo a incerteza na posição de um dos blocos,  $\Delta t$  e  $\overline{\Delta t}$  o intervalo de tempo entre dois quadros consecutivos no filme realizado pelo *smartphone* e a incerteza na medida do instante de tempo, respectivamente, tal que,

$$\overline{\Delta t} \ll \Delta t. \quad \text{Eq. (B.1)}$$

Num movimento unidimensional, a velocidade instantânea do corpo  $i$ ,  $i = 1, 2$ , é uma função que depende das variáveis  $x_i$ ,  $\overline{\Delta x}$ ,  $t$ ,  $\Delta t$  e  $\overline{\Delta t}$ :  $v_i(x_i, \overline{\Delta x}; t, \Delta t, \overline{\Delta t})$ , que é definida como

$$v_i(x_i, \overline{\Delta x}; t, \Delta t, \overline{\Delta t}) \equiv \frac{(x_i(t+\Delta t) \pm \overline{\Delta x}) - (x_i(t) \pm \overline{\Delta x})}{(t+\Delta t \pm \overline{\Delta t}) - (t \pm \overline{\Delta t})}. \quad \text{Eq. (B.2)}$$

Da equação anterior, o valor máximo da velocidade que a partícula  $i$  pode adquirir no tempo  $t$  é

$$v_i^{(max)}(t) \equiv \frac{(x_i(t+\Delta t) + \overline{\Delta x}) - (x_i(t) - \overline{\Delta x})}{(t+\Delta t - \overline{\Delta t}) - (t + \overline{\Delta t})} = \frac{x_i(t+\Delta t) - x_i(t) + 2\overline{\Delta x}}{\Delta t + 2\overline{\Delta t}}. \quad \text{Eq. (B.3)}$$

Usamos a desigualdade (B.1) para expandir o l.d. da eq.(B.3) até primeira ordem nas incertezas  $\overline{\Delta x}$  e  $\overline{\Delta t}$ ,

$$v_i^{(max)}(t) \approx \underbrace{\frac{x_i(t+\Delta t) - x_i(t)}{\Delta t}}_{v_i(t)} + 2v_i(t) \left( \frac{\overline{\Delta t}}{\Delta t} \right) + 2 \left( \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta t} \right), \quad \text{Eq. (B.4)}$$

sendo que  $v_i(t)$  é o valor central da velocidade da partícula- $i$  dentro do intervalo de valores mínimo e máximo que ela pode assumir, devido as incertezas nas medidas de posição e tempo.

A metade da barra de erro na medida da velocidade do  $i$ -ésimo corpo,  $\frac{\Delta_1}{2}v_i(t)$  é definida como

$$\frac{\Delta_1}{2}v_i(t) \equiv v_i^{(max)}(t) - v_i(t) \Rightarrow \frac{\Delta_1}{2}v_i(t) = 2v_i(t) \left( \frac{\overline{\Delta t}}{\Delta t} \right) + 2 \left( \frac{\overline{\Delta x}}{\Delta t} \right). \quad \text{Eq. (B.5)}$$



Direito autoral e licença de uso: Este artigo está licenciado sob uma [Licença Creative Commons](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).