

Determinação do momento de inércia de um anel não homogêneo com uso da análise de vídeo⁺*

Victor Abath da Silva¹

Licenciando em Física – UFRRJ

Frederico Alan de Oliveira Cruz¹

Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Seropédica – RJ

Resumo

O momento de inércia de um corpo é uma grandeza estudada em muitas disciplinas introdutórias de física, nos cursos de ciências exatas do ensino superior, em sua maioria numa abordagem puramente teórica e com maior ênfase nos corpos com distribuição de massa homogênea, devido à complexidade do problema. Para mostrar como isso pode ser afetado quando não existe essa homogeneidade é apresentado, neste trabalho, um método, baseado na análise de vídeo, que busca avaliar o movimento de um anel sobre um plano em diferentes ângulos de inclinação. Os resultados mostram que a metodologia é eficiente na determinação do momento de inércia de um anel homogêneo, uma vez que para esse tipo de objeto o raio de giração esperado é igual a 1 e o valor obtido foi de 0,97, isto é, um desvio de 3% em relação ao valor teórico. Esse resultado serviu para validar o valor de 0,66 do raio de giração de um anel não homogêneo era o correto, visto também ter apresentado variação aproximada de 3% entre os valores obtidos.

Palavras-chave: *Plano Inclinado; Ensino de Física; Rotação dos Corpos.*

⁺ Determination of the inertia moment of a nonhomogeneous ring using video analysis

^{*} *Recebido: outubro de 2019.*

Aceito: julho de 2020.

¹ E-mails: victorabath22@gmail.com; frederico@ufrj.br

Abstract

The moment of inertia of a body is a quantity studied in many introductory physics subjects, in the exact sciences courses of higher education, mostly in a purely theoretical approach and with greater emphasis on bodies with homogeneous mass distribution, due to the complexity of the problem. In order to show how this can be affected when this homogeneity does not exist, this work presents a method, based on video analysis, that seeks to evaluate the movement of a ring on a plane at different angles of inclination. The results show that the methodology is efficient in determining the moment of inertia of a homogeneous ring, since for this type of object the expected rotation radius is equal to 1 and the value obtained was 0.97, that is, a 3% deviation from the theoretical value. This result serves to validate the value of 0.66 of the rotation radius of a non-homogeneous ring, which was correct, since it also showed an approximate variation of 3% between the values obtained.

Keywords: *Inclined Plane; Physics Teaching; Body Rotation.*

I. Introdução

É conhecido, a partir dos princípios discutidos nos temas de mecânica, que a inércia está associada à tendência de um corpo qualquer permanecer em repouso ou em movimento uniforme, sendo que esse estado somente será alterado quando sobre ele for aplicada de uma força motriz. Essa ideia, presente na Primeira Lei de Newton, pode nos fazer considerar apenas a situação de um corpo em translação, no entanto, podemos e devemos considerar a condição associada à rotação deste em torno de um determinado eixo de sua configuração.

No caso de um disco, por exemplo, podemos definir alguns eixos de interesse para análise, um deles passando pelo centro e outro paralelo ao vetor normal a sua superfície (Fig. 1). Nessa condição somos capazes de perceber que existem diferenças significativas quanto a colocar o disco em rotação, mesmo que as características de massa e densidade permaneçam inalteradas.

A questão é que existe uma diferença significativa no esforço necessário para colocar esses corpos em movimento em torno de um eixo, na física o parâmetro que informa o quão é difícil girar um corpo ou mudar seu estado de rotação é conhecido como momento de inércia. O conhecimento deste parâmetro não é de interesse apenas acadêmico, mas também com relevância nos estudos para determinar a força necessária que pode “curvar” uma viga (BEZERRA, 2011), conhecer o grau de facilidade ou não com que um pilar de concreto pode se curvar (CLASEN; VITO, 2013) e também avaliar o espaçamento entre os níveis

rotacionais de uma molécula, por essa grandeza ser inversamente proporcional ao seu momento de inércia (OLIVEIRA, 2001), entre outras aplicações.

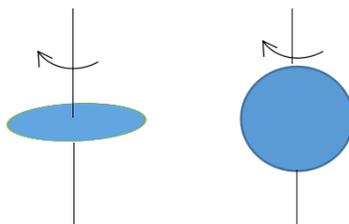


Fig. 1 – Duas possibilidades distintas de rotação de um disco circular (Acervo dos autores).

De uma forma bem direta, no caso de um sistema de n partículas girando em torno de um eixo o momento de inércia, I , medido em quilograma-metro quadrado (kg.m^2) é descrito matematicamente pela expressão (ALONSO; FINN, 1972):

$$I = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2 \quad (1)$$

em que m_i são as diferentes massas que giram a certa distância r_i do seu eixo.

Para um sistema contínuo de partículas, como é o caso dos corpos extensos, a medida do momento de inércia pode ser realizada integrando o produto das n massas em cada ponto pelo quadrado da distância até o eixo em que está sendo considerada a rotação (ALONSO; FINN, 1972):

$$I = \int_c r^2 dm \quad (2)$$

Um ponto importante é que a medida dessa grandeza está ligada diretamente a quantidade e a forma com que a sua massa está distribuída em torno do eixo de giro, dessa maneira corpos com diferentes características geométricas e mesma massa podem ter diferentes momentos de inércia, como exemplo pode-se citar o caso de um cilindro maciço que possui momento de inércia menor que de uma casca cilíndrica de mesma massa, em relação ao eixo central de rotação (ALONSO; FINN, 1972) (Fig. 2).

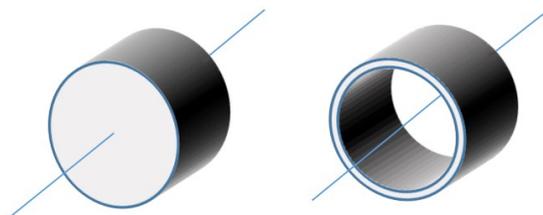


Fig. 2 – O momento inércia de um cilindro maciço, que gira em torno do eixo central, é de $mr^2/2$, enquanto que de uma casca cilíndrica é de mr^2 (Acervo dos autores).

Um aspecto importante sobre o momento de inércia é que ele pode ser representado, de forma geral, considerando a tridimensionalidade do objeto analisado, fazendo com que seja possível descrever o chamado tensor de inércia, \tilde{I} , da forma (ABDULGHANY, 2017):

$$\tilde{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{xy} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{xz} & I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3)$$

sendo que I_{ij} indica o momento de inércia quando este sofre uma rotação em relação à certa direção. Nesse ponto é conveniente lembrar que:

Como nos vetores, um tensor não depende do sistema de coordenadas em que é expresso. Isso significa que, se o tensor de inércia for expresso em dois sistemas de coordenadas diferentes, as matrizes que o representam serão diferentes, mas o próprio tensor não será alterado (US, 2018).

No caso específico de um cilindro oco, com raios r_1 e r_2 , o seu tensor de inércia, em coordenadas cilíndricas, é totalmente escrito da forma (CT, 2015):

$$\tilde{I}_{cilindro} = \frac{m}{4} \begin{bmatrix} (r_1^2 + r_2^2) + \frac{L^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & (r_1^2 + r_2^2) + \frac{L^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2(r_1^2 + r_2^2) \end{bmatrix} \quad (4)$$

tal que m é a massa, L é o comprimento e r_1 e r_2 são os raios, respectivamente, interno e externo do cilindro.

A questão é que apesar de parecer simples, a determinação analítica do momento de inércia requer um certo esforço algébrico, como mostrado por Breitschaft e Barbosa (2014), dependendo da forma geométrica do corpo analisado e do eixo em que este entrará em rotação. Nesse estudo são apresentadas as duas maneiras de análise mais comum para a obtenção do momento de inércia, onde uma delas faz uso do “Teorema dos Eixos Paralelos”, também conhecido como “Teorema de Steiner”, e a outra “Teorema dos Eixos Perpendiculares”.

É importante salientar, como dito por Macedo e Macedo (2002, p. 197), que: “o cálculo do momento de inércia se reduz a um fator geométrico, igual para todos os corpos de mesma forma e tamanho”, sendo assim uma grandeza importante associada à rotação dos corpos é denominada de raio de giração, K , usado para informar a que distância do eixo a massa, m , poderia ser concentrada sem produzir mudanças no momento de inércia, I , e escrito como:

$$K = \sqrt{\frac{I}{m}} \quad (5)$$

II. A possibilidade de medida experimental do momento de inércia

Apesar da existência do método analítico de obtenção do momento de inércia, em alguns casos, para corpos com geometria complexa, a metodologia não é viável. Uma alternativa possível, em relação ao procedimento teórico, é fazer uso da via experimental, avaliando a capacidade de giro do objeto analisado quando sobre ele é aplicada uma força. No caso de um disco oco, por exemplo, a medida do momento de inércia pode ser realizada analisando a rotação do mesmo quando em sua borda é colocada certa massa, m , e esta se movimenta entre dois pontos no eixo vertical uma altura h (MACHADO; GALVÃO, SZMOSKI, 2014) (Fig. 3).

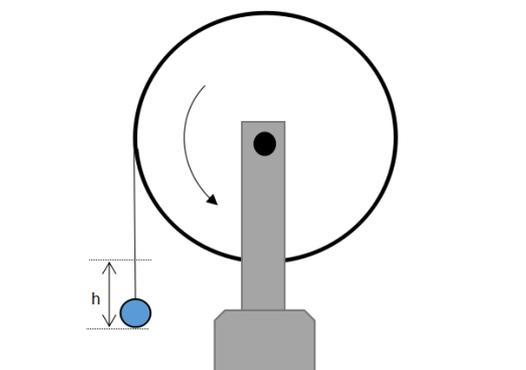


Fig. 3 – Figura esquemática do sistema proposto por Machado, Galvão e Szmoski (2014) para determinação do momento de inércia de um disco.

Segundo os autores a energia no ponto mais alto, h , do movimento de certa massa m sob a ação da aceleração da gravidade local, g , pode ser escrita como:

$$E_{\text{alto}} = mgh \quad (6)$$

enquanto que, no ponto mais baixo do movimento, era descrita da seguinte forma:

$$E_{\text{baixo}} = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2} \quad (7)$$

Sendo ω a velocidade angular adquirida pelo disco, v a velocidade no ponto mais baixo e I o momento de inércia do disco. Uma vez que pelo princípio da conservação as energias nos pontos alto e baixo do movimento devem ser iguais, é possível obter uma expressão analítica para a determinação do momento de inércia nessa condição (MACHADO; GALVÃO, SZMOSKI, 2014):

$$I = \frac{(2gh - v^2)}{\omega^2} m \quad (8)$$

No caso de um cilindro descendo um plano inclinado (Fig. 4), onde há atrito entre objeto e a superfície, existe o rolamento do mesmo, não um deslizamento como nas situações

onde não há resistências, e nesta situação a determinação da aceleração do centro de massa (CM) pode ser realizada a partir do estudo das forças aplicadas sobre o cilindro: força de atrito, f_{at} , força normal, N , e força peso, P .

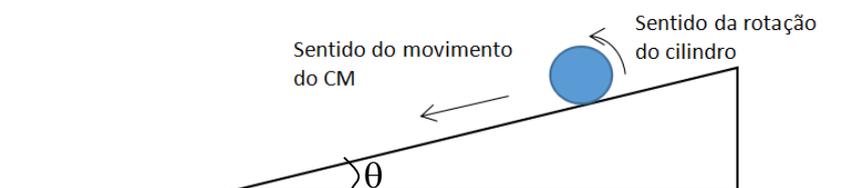


Fig. 4 – Figura esquemática do deslocamento de um cilindro descendo um plano inclinado com atrito (Acervo dos autores).

Quando são levados em conta todos os parâmetros mencionados anteriormente é possível obter momento de inércia, I , a partir da relação (PRIMA *et al.*, 2012):

$$I = \left(\frac{g}{a_{CM}} \sin(\theta) - 1 \right) mr^2 \quad (9)$$

sendo g a aceleração da gravidade no local de realização da atividade, a_{CM} a aceleração de centro de massa, que representa a aceleração do cilindro, θ a inclinação do plano em relação a horizontal, m a massa do cilindro e r o raio da secção reta do cilindro. Nesse caso, uma vez que o momento de inércia é sempre constante, a razão entre o seno do ângulo de inclinação e a aceleração do centro de massa também será constante.

Devido à complexidade do problema, uma possibilidade que se mostra bastante eficiente para determinação dessa grandeza nas aulas laboratoriais é pela utilização da chamada análise de vídeo onde a partir da gravação do movimento do corpo de interesse e posterior análise da imagem, com o uso de um *software* adequado, é possível obter o momento de inércia como mostrado em trabalhos sobre o tema (EADKHONG *et al.*, 2012; MEARS, 2015; MULHAYATIAH *et al.*, 2018; PRIMA *et al.*, 2016).

A ideia básica do método está numa sequência de passos que parte da montagem do experimento com o qual se busca analisar uma certa grandeza física. Realiza-se a filmagem usando um equipamento para esse fim, que pode ser uma câmara fotográfica ou um *smartphone* que possua essa função, posteriormente, transfere-se o vídeo para um *software* a fim de analisá-lo, com isso, faz-se a verificação dos resultados diretamente nesse programa, caso isso seja possível, ou senão os dados coletados podem ser levados a um *software* gráfico que permita compreender o fenômeno (Fig. 5).

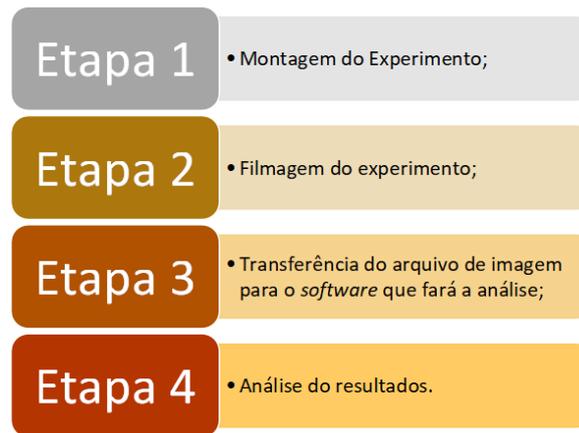


Fig. 5 – Sequência para realização do estudo de um experimento usando a análise de vídeo (Acervo dos autores).

A grande vantagem dessa metodologia, expressa por Leitão, Teixeira e Rocha (2011), está num conjunto de possibilidades que ela permite:

Algumas facilidades devem ser destacadas na análise do vídeo como, por exemplo, a possibilidade de retornar a algum momento (quadro) da experiência em especial visualizando o fenômeno e refazer o tratamento dos dados quantas vezes for necessário. É possível analisar num só vídeo o trajeto de mais de um corpo que se movem simultaneamente, permitindo assim uma correlação direta entre as grandezas físicas que estão sendo estudadas, comparando tabelas e gráficos com muita comodidade. Também é possível, e muito valioso do ponto de vista educativo, aliar o tratamento de vídeo sobre uma experiência com o uso de sensores medindo uma grandeza física em tempo real. (LEITÃO; TEIXEIRA; ROCHA, 2011, p. 24)

III. Metodologia de análise

Na realização do estudo proposto nesse trabalho a metodologia empregada foi similar a sequência apresentada na Fig. 5, considerando como objeto de análise um anel de aço com diâmetro de $2,50 \pm 0,05$ cm e altura de $0,80 \pm 0,05$ cm. No entanto a abordagem se baseou na condição onde a massa, supostamente, estava distribuída de forma homogênea e na outra onde foram adicionadas pequenas esferas de chumbo numa certa região com o objetivo de deslocar o centro de massa (Fig. 6).

Durante o processo de análise o anel foi colocado para se deslocar sobre um plano de alumínio, para diferentes ângulos de inclinação, onde seu movimento foi gravado, a uma taxa de 60 quadros por segundo (*fps*), a partir de um *smartphone* posicionado nas proximidades do sistema (Fig. 7).



Fig. 6 – Detalhe do anel utilizado na atividade, a esquerda ele na condição homogênea e a direita com a adição de esferas de chumbo, condição não homogênea (Acervo dos autores).



Fig. 7 – Representação geral da montagem do experimento, para realização da medida (Acervo dos autores).

As imagens obtidas desse movimento foram analisadas no *software* Tracker®, que se caracteriza por ser uma ferramenta gratuita de análise e modelagem de vídeo construída em *Java Open Source Physics* (OSP) e que foi projetado para ser usado no ensino de física (BROWN, 2019), buscando obter as informações das grandezas de interesse do problema.

IV. Resultados e discussão

Apesar dos resultados do momento de inércia de objetos cilíndricos já terem sido discutidos em outros trabalhos, a proposta aqui foi mostrar que existem diferenças significativas no caso de não haver homogeneidade de um corpo com essa geometria. Assim, na primeira análise do movimento dos anéis buscou-se verificar se a aceleração teve um aumento, em função do ângulo de inclinação do plano, de forma linear, independente da configuração de distribuição da massa. Isso foi realizado analisando a equação (9), pois a

partir dela é possível reescrever uma relação para a aceleração (a_{anel}) em função das outras grandezas já mencionadas, da forma aproximada, como:

$$a_{\text{anel}} \approx \frac{g}{k+1} \theta \quad (10)$$

que é uma função afim com coeficiente linear zero, onde k , no caso do anel homogêneo tem valor igual a um (1,0) e que para um ângulo máximo de 15° difere da expressão com o seno em torno de 5,5% que consideramos razoável dentro da proposta.

Nessa situação o esperado é um movimento uniformemente variado nas condições específicas do anel, visto que a aceleração, segundo a equação (10), não apresenta indicativo de depender de parâmetros como o tempo ou a velocidade de deslocamento. O que se observa, em ambas as situações, é um gráfico da evolução da posição em função do tempo com formato parabólico (gráfico 1), indicando assim um movimento com aceleração constante como previsto nos estudos de cinemática dos corpos.

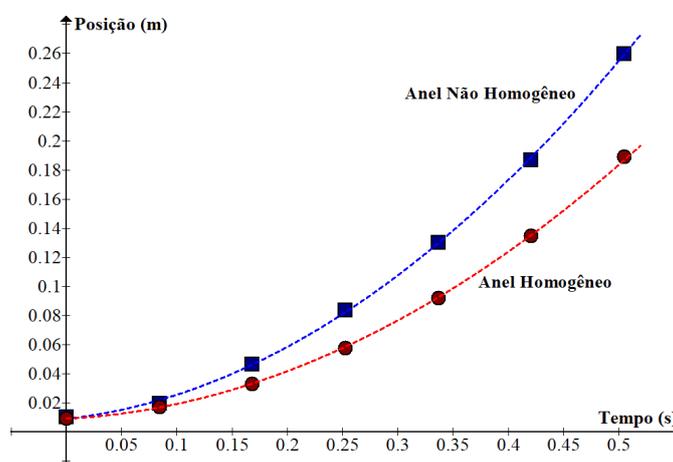


Gráfico 1 – Evolução da posição em função do tempo, para o anel nas condições de análise para o mesmo ângulo de inclinação, sendo as linhas pontilhada as curvas de ajuste para os dados experimentais obtidos durante a atividade.

É importante notar que a aceleração, descrita pela equação (10), independe da massa do anel, na realidade a aceleração é afetada pela forma como a massa está distribuída, isto é, pelo valor k que na condição homogênea vale um (1), em que sua massa é igual a $6,3 \pm 0,1$ g, ou quando são acrescentadas as esferas de chumbo, fazendo com que o anel passe a ter massa igual $8,0 \pm 0,1$ g, fornecendo a ele um caráter não homogêneo de distribuição de massa. Nessa condição, percebe-se um comportamento de aumento da aceleração de forma linear e com coeficientes angulares distintos (gráfico 2), como as grandezas aceleração gravitacional e ângulo de inclinação são constantes a diferença na inclinação das retas (α) é dependente da constante (k) do anel ($\alpha \approx g/k+1$).

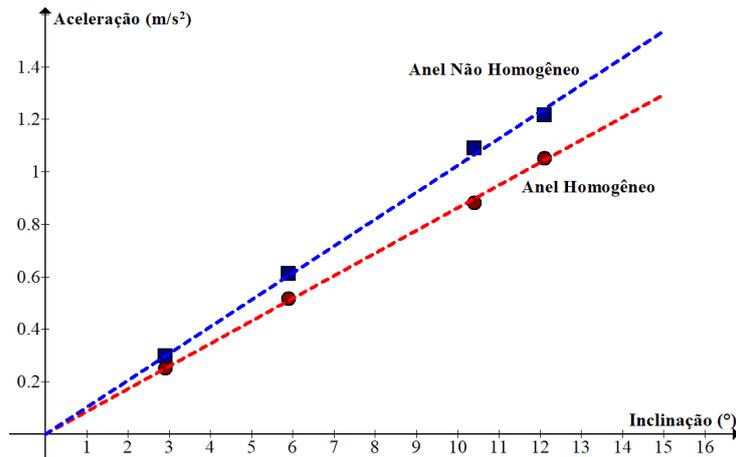


Gráfico 2 – Aceleração dos anéis em função da inclinação do plano, sendo as linhas pontilhada as curvas de ajuste para os dados experimentais obtidos durante a atividade.

Uma vez que as inclinações das retas, apresentadas no gráfico 2, são positivas e do anel não homogêneo é maior que do anel homogêneo ($\alpha_{NH} > \alpha_H$) então esse resultado nos mostra que a constante no caso homogêneo é maior que no caso não homogêneo ($k_{AH} > k_{ANH}$) para qualquer dos ângulos de análise, visto que essas grandezas tem uma relação de proporcionalidade inversa (gráfico 3).

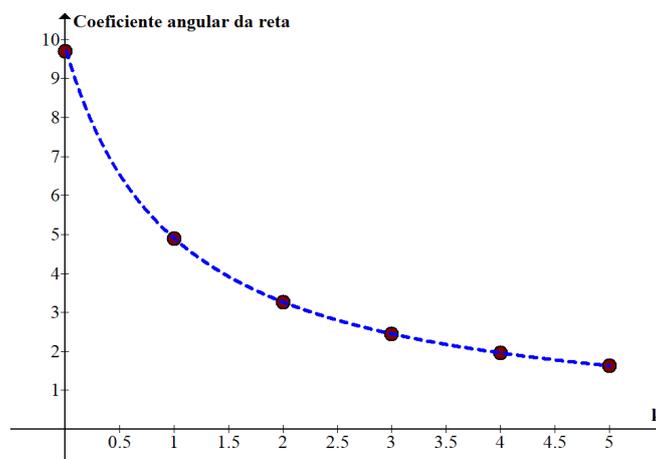


Gráfico 3 – Representação gráfica da relação entre o coeficiente angular da reta e a constante k.

Na análise dos valores das constantes k , em função da inclinação do plano, é percebido, a partir dos dados coletados durante o experimento (tabela 1), que os valores são distintos entre si e que mostram como o momento de inércia do anel é afetado pela não homogeneidade na distribuição de massa ao longo da sua estrutura.

Tabela 1 – Valores obtidos para a constante k dos anéis em função da inclinação do plano.

Ângulo (°)	$k_{\text{Anel Homogêneo}}$	$k_{\text{Anel Não Homogêneo}}$
2,9	0,97	0,67
5,9	0,95	0,65
10,4	1,01	0,62
12,1	0,95	0,69

Um detalhe importante para os dados obtidos é que no caso do anel homogêneo o valor, médio, obtido experimentalmente foi de 0,97, enquanto o valor esperado para a constante (k) era igual a (1). Considerando que o desvio padrão médio, dos valores de k , ficou próximo aos 3% é possível dizer que a metodologia empregada fornece meios satisfatórios para validar o valor de 0,66 encontrado para o anel não homogêneo, permitindo assim, dentro dessa perspectiva, prever que os valores nessa condição colocam que a constante deve estar entre 0,62 e 0,69. Finalmente, também é possível dizer que na condição do experimento o raio de giração, K , para o anel homogêneo tem valor igual a $0,98r$, em torno de 2% menor que o valor esperado, e para o não homogêneo esse valor seria de $0,81r$, 19% menor (Fig. 8).

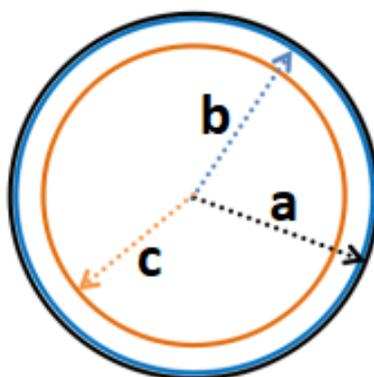


Fig. 8 – Representação do raio de giração anéis, onde as linhas pretas (a) representam o modelo teórico, as linhas azuis (b) representam a construção para o anel homogêneo e as linhas laranjas (c) o anel não homogêneo do experimento (Acervo dos autores).

V. Considerações finais

A partir dos resultados encontrados é possível considerar que a metodologia com uso da análise de vídeo se mostra eficiente para determinar o momento de inércia do anel homogêneo ou não homogêneo, visto que os valores obtidos na medida experimental apresentaram pouca variabilidade e bastante proximidade com o valor teórico esperado num dos casos. Devido à facilidade do procedimento consideramos viável o uso dessa metodologia

dentro dos laboratórios didáticos das disciplinas de física experimental, presentes nas grades curriculares dos cursos ligados às ciências exatas da maioria das instituições de ensino superior.

Agradecimentos

Os autores agradecem à Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro pelo apoio à realização deste trabalho, por meio do financiamento do Projeto PIC343-2018.

Referências

ABDULGHANY, A. R. Generalization of parallel axis theorem for rotational inertia. **American Journal of Physics**, v. 85, n. 10, p. 791-795, 2017.

ADAMS, B. Local **Acceleration of Gravity**, 2014. Disponível em: <<https://is.gd/DOGZMG>>. Acesso em: 04 jul. 2019.

ALONSO, M.; FINN, E. J. **Física: um curso universitário**. São Paulo: Edgar Blücher, 1972. v. 1.

BEZERRA, E. M. **Determinação do momento fletor resistente à flambagem lateral com torção de vigas de aço casteladas**. 2011. 120 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte.

BROWN, D. **Tracker: video analysis and modeling tool**, 2019. Disponível em: <<https://physlets.org/tracker/>>. Acesso em: 29 mai. 2019.

CLASEN, A.; VITO, M. **Análise da seção de pilares de concreto armado – estudo de caso**, 2013. Disponível em: <<https://is.gd/tCjaqF>>. Acesso em: 26 mai. 2019.

CT - CalcTown. **Moment of Inertia of a Thick Cylindrical Tube Calculator**, 2015. Disponível em: <<http://abre.ai/a2LC>>. Acesso em: 26 abr. 2020.

EADKHONG, T. *et al.* Rotational dynamics with Tracker. **European Journal of Physics**, v. 33, n. 3, p. 615-622, 2012.

JOHANSEN, I. **Graph - Plotting of mathematical functions** 2018, Disponível em: <<https://www.padowan.dk/download/>>. Acesso em: 08 nov. 2018.

PRIMA, E. C. *et al.* Kinematics investigations of cylinders rolling down a ramp using tracker. In: INTERNATIONAL SEMINAR ON MATHEMATICS, SCIENCE AND COMPUTER SCIENCE EDUCATION, 2015, Bandung, Indonesia. **Proceedings...** Melville (EUA): AIP Publishing, 2016. p. 070010/1-070010/6.

MACEDO, H. T.; MACEDO, C. A. Propriedades Mecânicas e Geométricas de Objetos Homogêneos Delgados e Poligonais. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 24, n. 2, p. 196-200, 2002.

MACHADO, V.; GALVÃO, J. R.; SZMOSKI, R. M. Verificação da conservação da energia mecânica de um sistema em rotação: um ensaio no laboratório. **Revista Brasileira de Física Tecnológica Aplicada**, v. 1, n. 1, p. 67-75, 2014.

LEITÃO, L. I.; TEIXEIRA, P. F. D.; ROCHA, F. S. A vídeo-análise como recurso voltado ao ensino de física experimental: um exemplo de aplicação na mecânica. **Revista electrónica de investigación en educación en ciencias**, v. 6, n. 1, p. 18-32, 2011.

OLIVEIRA, L. F. C. Espectroscopia molecular. **Cadernos Temáticos de Química Nova na Escola**, n. 4, p. 24-30, 2001.

MEARS, M. The spiderwheel: A new apparatus to demonstrate energy conservation and moment of inertia. **American Journal of Physics**, v. 83, n. 9, p. 817-820, 2015.

MULHAYATIAH, D et al. Moment of inertia: development of rotational dynamics KIT for physics students. In: ANNUAL APPLIED SCIENCE AND ENGINEERING CONFERENCE, 3, 2018, Bandung, Indonesia. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering, v. 434, n. 1. **Proceedings...** Bristol (England): IOP Publishing, 2016. p. 1-8.

STANDISH, R. K. **SciDAVis**, 2017. Disponível em: <<http://scidavis.sourceforge.net/>>. Acesso em: 08 nov. 2018.

US - Universidad de Sevilla. **Tensor de inercia (M.R.)**, 2018. Disponível em: <<https://is.gd/N9YTfv>>. Acesso em: 15 set. 2019.



Direito autoral e licença de uso: Este artigo está licenciado sob uma [Licença Creative Commons](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).