PENSE E RESPONDA! QUAL O TAMANHO DE UM BIT?[+*]

Francisco Catelli
Departamento de Física e Química – UCS
Caxias do Sul – RS
Faculdade de Física – PUC
Porto Alegre – RS

A professora de Física Emília, ao tentar explicar ao seu aluno Alberto a origem das belas cores produzidas por um CD à luz do sol, se vê as voltas com uma pergunta embaraçosa: qual o comprimento da trilha na qual a música está gravada?

– *Mas, de onde vêm as cores?* pergunta Alberto, brandindo na mão seu CD preferido de Raul Seixas, os olhos brilhando de curiosidade.

– *Você lembra da história do médico Young e de sua fenda dupla?*[i] diz Emília, a professora de Física de Alberto.

– *Sim... hum, não sei se é o que estou pensando*... resmunga Alberto.

– *Sabes que um CD consiste, entre outras coisas, de uma longa pista onde estão gravadas as informações, a música, por exemplo. Essa pista enrola-se sobre ela mesma, em espiral, e, ao olharmos uma pequena região, podemos imaginar linhas curvas, umas do lado das outras, muito próximas. Estas funcionam como se fossem ... bem, os físicos chamam isso de rede de difração*, diz Emília.

Alberto perscruta seu CD, olha-o sob diversos ângulos:

– *Não vejo linha nenhuma*! diz, não sem um certo ar de incredulidade.

– *Claro! Elas estão de fato muito próximas umas das outras! Você quer fazer uma medida curiosa*? Emília abre uma gaveta, retira dela um laser,

[+] What's the size of a bit?

[*] *Recebido: maio de 2005.*
Aceito: outubro de 2005.

desses pequenos usados para conferências com retroprojetor, pede o CD a Alberto e inicia uma rotina de explicações, entremeada de montagens e medidas[1].

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

– Viu só? diz Emília. *– Cabem nada menos que 650 linhas numa largura de 1 mm do CD. Não é incrível ?*

Alberto sorri, encantado:

– "Profe", você fala que é uma longa trilha de dados gravados. E se eu esticar essa trilha, com qual comprimento[ii] *ela fica ?*

Emília coça a cabeça, pensa um pouco. *– Hummm. Não sei, deve ser muito comprida.* Olha Alberto nos olhos. *– Estava demorando, heim! Você de novo com estas suas perguntas complicadas... Mas vamos dar um jeito nisso. O primeiro que descobrir alguma coisa, conta para o outro, está certo?*

– Valeu, "Profe"!, anui Alberto, já saindo da sala para o recreio.

- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Emília dirige seu carrinho de compras no supermercado na direção dos artigos de jardim. *– Preciso comprar uma mangueira maior para poder regar as plantas do fundo do quintal. Também, faz um tempão que não chove!* diz, enquanto manuseia uma mangueira que lembra uma fita, enrolada em espiral de modo a formar um disco plano, assim feito uma pizza. O olhar dela recai sobre o rótulo, onde está marcado: 20 metros. Impossível não lembrar de Alberto e de sua pergunta... Ela fala com seus botões: *– Posso até pensar que são círculos, uns dentro dos outros, feito um alvo... E se eu somar um por um?* Emília compra a mangueira, volta para casa e a examina com cuidado: *– São 25 voltas, a primeira tem um raio de 2 cm, a última, mais ou menos 22 cm... Mas, não! Calcular volta por volta não vai adiantar! Imagina quantas voltas não vão ter num CD?* Emília, frustrada, deixa a mangueira de lado e põe-se a pensar.

---

[1] Para detalhes da medida do espaçamento entre as trilhas de um CD, veja por exemplo BURMAN, G. A. Overhead Spectroscopy. **The Physics Teacher**, p. 470, outubro, 1991. Ver também, no mesmo número, SADLER, P. Projecting Spectra for Classroom Investigations, p. 423-427. Em português, veja GARCIA, N. M. D. Um espectroscópio simples para uso individual. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, v. 11, n. 2, p. 134-140, agosto, 1994. O uso de CDs como redes de difração também é discutido em GARCIA, N. M. D.; KALINOWSKI, H. J. Uma alternativa econômica para redes de difração no laboratório de ensino. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, v. 7, n. 1, p. 64-72, 1990.

– E se eu tentar resolver isso literalmente? diz, enquanto parte em busca de papel e caneta.

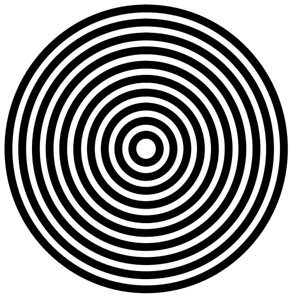


Fig. 1- A mangueira de jardim, vista como se fossem círculos sobrepostos.

– O primeiro "círculo" tem um comprimento (muito aproximadamente) igual a $2\pi(R_0+\Delta R)$, onde ΔR é a espessura da mangueira, o segundo, $2\pi(R_0+2\Delta R)$, o terceiro, $2\pi(R_0+3\Delta R)$ e assim por diante, resmunga Emília enquanto escreve as fórmulas.

O comprimento total será a soma do comprimento de todos os círculos, prossegue. Transcorrido algum tempo e algumas tentativas, escreve:

$$\mathrm{L} = \sum_{n=1}^{n=N} 2\pi(\mathrm{R}_0 + n\Delta \mathrm{R}) \qquad (1)$$

ou

$$\mathrm{L} = 2\pi\, N\, R_0 + 2\pi\, \Delta R \sum_{n=1}^{n=N} \mathrm{n}\,. \qquad (2)$$

– Este somatório... Emília arregala os olhos! *– OLHA ISSO! É o problema do jovem Gauss!*

\- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Emília, na aula, às voltas com CDs, lasers, giz, após ter mencionado aos estudantes o episódio da mangueira no supermercado e a inspiração que daí resultou para a resolução do problema do comprimento da trilha de um CD, conta aos estudantes a sua versão da história do jovem Gauss.

E então o professor, que não agüentava mais a bagunça na aula, berrou: – Todo mundo quieto! É bagunça demais! Como castigo, somem todos os números de 1 a 100, agora! Todos os jovens alunos na sala se calam e começam a rabiscar em suas lousas, efetuando soma após soma. Todos? Não! O jovem Gauss contempla, absorto, o teto... O professor se aproxima, muito bravo, e ameaça: *– O que é que você está esperando para começar?* Ao que Gauss balbucia, tímido:

– Mas eu já calculei! Dá 5050!

O professor coça a cabeça, intrigado e desconfiado: *– Você somou tudo, de cabeça?*

– Sim, responde Gauss: *– 1 + 100 dá 101, 2+99, também dá 101.*

Enquanto conta a história, a professora Emília escreve:

1+100=101

2+99=101

3+98=101

.....

50+51=101

... ou seja, completa Gauss, *o resultado* (101) *é obtido nas 50 somas efetuadas, e a soma que o senhor pediu dá 50×101=5050 ...*

Notem que todos os números inteiros de um a cem apareceram apenas uma vez!

Emília, empolgada, apresenta aos seus alunos as fórmulas (1) e (2), que ela deduzira em casa, tentando "conferir matematicamente" o comprimento da mangueira, e continua:

– Então, o somatório do segundo termo da equação 2:

$$\sum_{n=1}^{n=N} N$$

fica, de acordo com Gauss,

$$\sum_{n=1}^{n=N} N = \frac{N}{2}(N+1). \qquad (3)$$

Substituindo em (2), e fazendo:

$$\Delta R = \frac{(R_1 - R_0)}{N},$$

teremos:

$$L = 2\pi N R_0 + 2\pi \frac{(R_1 - R_0)(N+1)}{2}. \qquad (4)$$

Mas, se N for grande, N+1 ≅ N e, simplificando, ficamos apenas com:

$$L = N\pi(R_0 + R_1). \qquad (5)$$

– Agora, pessoal, podemos calcular qual é o comprimento da mangueira, diz Emília*, e também o comprimento da trilha de um CD, que foi a pergunta de Alberto na semana passada. Primeiro a mangueira!*

Emília continua a escrever no quadro.

– Lembrem que eu disse antes a vocês que eram, sem contar a primeira, 24 voltas da mangueira (N - 1= 24), R_0 = 4 cm e R_1, 22 cm, completa Emília.

Alberto se adianta: – "*Profe", calculei! A mangueira tem 20,4 m!*

– Ah, nada mau, heim! diz Emília. *A etiqueta marca 20 metros!*

- - - - - - - - - - - - - - -

Na volta do recreio:

– Vejam, para o CD, ΔR vale apenas um seiscentos e cinqüenta avos de mm. Vocês lembram da aula de laboratório de ontem? Assim, prossegue Emília, *em aproximadamente 35 mm* (58 mm para R_1 e 23 mm para R_0) *do CD temos algo como 22.750 voltas!*

– Nossa, murmura alguém.

– Fazendo N igual a 22 750, o comprimento típico da trilha de um CD (cheio) dá em torno de 5360 m, ou mais de 5 km, conclui Emília.

- - - - - - - - - - - - - - -

– "Profe", acho que dá até para saber o tamanho de um bit, exclama Alberto. *– Assim,* continua, sem esperar resposta, *um CD pode conter 700 Megabytes – está escrito na caixa; se um byte é 8 bits, então...* Alberto interrompe a fala e começa a calcular; paira na sala um ar de curiosidade. Ele termina, olha a professora, olha os cálculos, um pouco indeciso. Emília, querendo incentivá-lo, pergunta: –

– Então Alberto, qual o tamanho de um bit?

– Em mm, achei mais ou menos 0,001!

– Vejam, diz Emília, *faz sentido! Se eu divido 1 por 650, ou seja, 650 linhas por mm (Lembram do laboratório?), encontro 0,00154 mm (ou 1,54 μm). Isso é a distância de uma pista até a pista vizinha, um valor não muito diferente dos 0,001 mm* (ou 1μm) *obtidos por Alberto! Esta deve ser a ordem de grandeza da menor área que o laser do leitor de CD pode ler!*

– Professora, muito legal isso, declara alguém.

- - - - - - - - - - - - - - -

Alberto, no dia seguinte, nem deixa Emília começar a aula:

– Professora... Olha só, descobri outra coisa! Um CD dura 80 minutos se estiver todo cheio, não é?

Alberto mostra seus cálculos, e a etiqueta no canto da caixa.

– Então, 5360 metros dividido por 80 x 60 segundos (passei 80 minutos para segundos) dá 1,12 metros por segundo!

– *Você é mesmo muito esperto*, exclama Emília, visivelmente impressionada. – *Mas, Alberto, repara bem, isto quer dizer que, se esta velocidade de varredura da trilha pelo laser é constante (tem que ser!), o CD gira com velocidades de rotação diferentes no começo e no fim!*

Ambos se olham, pensativos. Alberto exclama, de supetão:

– *"Profe", eu já fiz funcionar um CD com a tampa aberta, eu sei como faz! A faixa um é aquela perto do centro, e a última, a de fora!*

– *Então*... Emília faz algumas contas, *o CD deve girar bem mais rápido na faixa um, pois se o menor círculo interno tem* (mais ou menos) *2,3 cm de raio, o perímetro é* $2\pi R_0 = 14{,}45$ *cm, e são necessárias aproximadamente 8 voltas* (112 cm/14,45 cm) *para dar o comprimento de trilha percorrido em 1 segundo! Já na última faixa* (raio de 5,8 cm), *serão aproximadamente 3,1 voltas por segundo!*

– *Nossa, é bem diferente!* exclama Alberto.

– *Isso é fácil de ver, se você trouxer teu aparelho de CD,* propõe Emília. – *Podemos ver tudo isso em aula, a turma vai gostar!*

– *Claro*, concorda Alberto[iii].

– *Vou trazer, sim!*

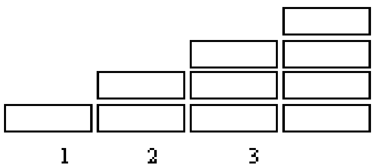
\- -

Alberto: – *"Profe", não entendi direito aquela história de Gauss de somar 1 + 2 +3... então, inventei outra coisa.*

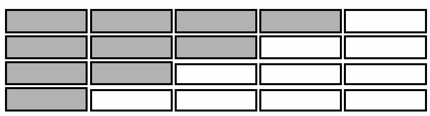
– *O que é que você inventou, Alberto?* provoca Emília.

– *Assim: Imagine que sejam... bom, N pilhas de dominó. Quatro pilhas, para ficar mais fácil de ver*.

Alberto desenha.



– *Agora, eu coloco outras quatro pilhas iguais, invertidas, assim.* Alberto completa a figura.



Emília arregala os olhos.

– *Alberto, que invenção mais bonita!*

– *"Tá", deixa eu terminar,* diz Alberto. – *O meu desenho virou um retângulo, e eu aprendi na aula de matemática que a área dele, ou o número de peças de dominó, dá no mesmo, é a base vezes a altura.*

– *E aí?* Provoca Emília.

– *Aí que a base é (N + 1) e a altura é N, então, tem N(N+1) dominós no meu desenho.*

– *Mas como só estás interessado no número de dominós brancos...*

Emília é interrompida por Alberto.

– *Eu pego só a metade.*

$$\frac{N(N+1)}{2}$$

completa Aberto, triunfante. O leitor poderá comparar esta expressão com a expressão (3), obtida por Emília.

– *Nossa,* exclama Emília, *você tem que contar isso para o resto da turma!*

– *Pode ser*, concorda Alberto.

- -

A aula está um verdadeiro rebuliço. Alberto acaba de contar para a turma sua descoberta, e várias reclamações começam a se suceder.

– *Esta história do Alberto, de contar dominós, eu até entendi. Mas aqueles somatórios todos...* resmunga um colega.

– *Não dá para cortar a mangueira enrolada, e somar todos os pedaços?* pergunta outro colega.

– *"Tá". Mas como vais somar pedaços diferentes?* retruca um terceiro colega.

Emília, pensativa, não intervém.

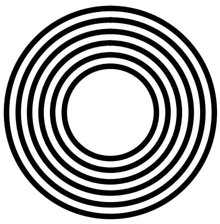
- -

– *Eu acho que encontrei,* fala Maria, uma colega de Alberto[iv].

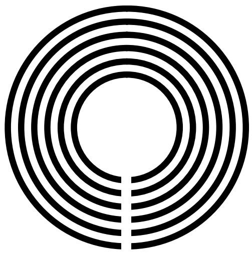
– *Mostre para gente*, diz imediatamente Emília, empolgada.

Maria desenha no quadro.

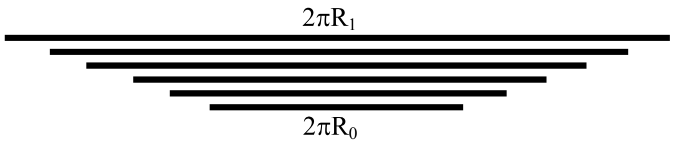
– *Bom, começamos com os círculos, vou fazer só uns 5 ou 6 para não dar muito trabalho:*



– *Daí eu corto...*



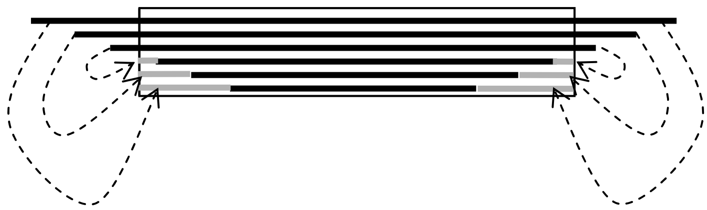
... e espicho as linhas todas: a menor tem comprimento $2\pi R_0$ *e a maior* $2\pi R_1$*.*



– *"Tá", mas como é que soma?* impacienta-se Alberto.

– *Calma! Lembra que você acabou fazendo um retângulo? Vou fazer um também. Olha só!* Maria continua desenhando:

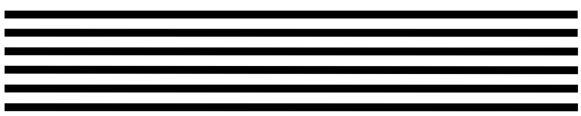
– O *que sobra das linhas maiores completa as menores.*



– *Não fica um retângulo?* Maria completa o desenho.

– *E as linhas, que são todas iguais, têm um comprimento igual a:*

$$L_{médio} = \left(\frac{2\pi R_0 + 2\pi R_1}{2}\right)$$



– *Mas, e a soma de todas elas?* impacienta-se Alberto.

Dá para esperar um pouco? responde Maria:

– *É só multiplicar* $L_{médio}$ *pelo número total de linhas, N. Veja*:

$L_{total} = N\pi\,(R_0 + R_1)$.

– Olha, Maria! Não é igual à fórmula (6), da aula passada? Intervém Emília.

– É mesmo, professora! anui Maria, feliz e admirada com a "coincidência".

A turma toda irrompe num ruidoso aplauso a Maria. Esta sorri, feliz.

Epílogo:

A "moral" desta pequena história é singela: o ambiente da sala de aula pode, sim, ser propício à emergência de novas idéias. Devemos, como Emília, ser pacientes e atentos às reações e idéias dos alunos. Mas, argüirá o leitor, não há aqui muita "mistura" de Matemática com Física? Sim, há, mas isso não nos parece mau, pelo contrário. Gauss, o "príncipe dos Matemáticos", também empresta seu nome a uma conhecidíssima lei da teoria eletromagnética. E Newton? Sua contribuição ao cálculo diferencial e integral obriga-nos – nós físicos – a dividi-lo com os Matemáticos. Se propiciarmos aos estudantes a necessária liberdade, eles tendem a não compartimentar o conhecimento e o seu interesse está "apenas" em resolver um problema que, afinal, partiu deles mesmos. E, quando as idéias brotam livremente, quem se importa se é Física ou Matemática? Afinal, o berço de muitas aplicações destes dois campos do conhecimento é o mesmo!

---

[i] Ver, por exemplo, HEWITT, P. **Física Conceitual: Interferência**. Porto Alegre: Bookman, 2002. p. 499-500

[ii] Este é o item d) do problema 44 de HALIDAY; RESNICK; WALKER. Fundamentos de Física. 4. ed. Rio de Janeiro: LTC Editora, 1996. v. 1, cap. 11, p. 261. Os dados obtidos por Emília são bastante próximos dos fornecidos no referido problema. Algumas diferenças ficam por conta dos Cds atuais, de 700 Mb e 80 minutos, comparados com os de 650 Mb e 74 minutos. (Obrigado ao colega Marcos Andreazza, da Universidade de Caxias do Sul, pela referência!)

[iii] O leitor poderá comprovar a veracidade da previsão de Alberto e Emília, usando um toca Cds portátil. Será necessário "enganar" o aparelho com um palito colocado no encaixe da tampa, pois o aparelho não funciona com esta aberta!

[iv] Tudo o que Maria descreve a seguir decorre de uma sugestão de meu ex-aluno Jair Rippel dos Santos. Obrigado, Jair!