

---

# INFLUÊNCIA DO RAIO EFETIVO NO MOVIMENTO DE PROJÉTEIS ESFÉRICOS LANÇADOS HORIZONTALMENTE<sup>+</sup>

---

*Jorge Roberto Pimentel*

*Marco Antonio da Silva*

Departamento de Física – UNESP

Rio Claro – SP

## **Resumo**

*Medidas experimentais dos módulos das componentes horizontal e vertical da posição de projéteis esféricos de aço, lançados horizontalmente após terem sido liberados de diversas alturas em uma pista de alumínio sulcada, são tratadas neste artigo de três formas diferentes: supondo que durante o deslocamento dos projéteis sua velocidade é puramente de translação, considerando também sua velocidade de rotação e, finalmente, associando essas velocidades com o conceito de raio efetivo, que depende da largura do sulco da pista. A análise dos resultados mostrou que os valores esperados para os módulos das componentes da posição dependem do raio efetivo do projétil, indicando que experimentos de conservação de energia mecânica, e envolvendo o movimento de esferas em pistas sulcadas, devem ser precedidos por uma escolha adequada do raio das esferas a serem utilizadas.*

**Palavras-chave:** *Conservação da energia mecânica, cinemática rotacional, movimento bidimensional.*

## **Abstract**

*Experimental modulus measures of the horizontal and vertical positions components of the spherical steel projectiles which were horizontally ejected after being released from distinct heights on a grooved aluminium track are discussed in this article in three different possibilities: supposing that during the projectiles movements its ve-*

---

<sup>+</sup> Radius effective influence on spherical projectiles throwing horizontally

\* *Recebido: junho de 2004.*  
*Aceito: março de 2005.*

*locity is translational only; also considering its rotational velocity and, finally, associating these velocities with the effective radius concept which depends on the track groove width. The analysis of the results showed that the expected values for the position modulus components depends on the projectile effective radius suggesting that the development of the mechanical energy conservation experiments, in which spheres roll in grooved tracks, must be preceded by a suitable choice of the sphere radius used.*

**Keywords:** *Mechanical energy conservation, rotational cinematic, bidimensional movement.*

## **I. Introdução**

Alguns experimentos de Mecânica desenvolvidos em aulas do ensino médio ou de cursos universitários e que tratam dos movimentos uniforme e acelerado, do lançamento de projéteis ou da conservação da energia, utilizam esferas que deslizam em pistas, geralmente dotadas de canais. Quando esferas se deslocam em superfícies que possuem canais para guiá-las é necessário considerar os valores do raio da esfera e da largura do canal, uma vez que a combinação entre ambos pode afetar o resultado esperado para o experimento.

Esse fato pode ser avaliado utilizando o conceito de raio efetivo, definido geometricamente, conforme Bachman (1985), como sendo igual à distância do centro da esfera até o plano imaginário que passa pelos dois pontos de contato dela com o canal. A influência do raio efetivo em experimentos de Mecânica realizados em pistas sulcadas foi verificada por Bachman, no estudo da velocidade final de lançamento de projéteis esféricos e na determinação do coeficiente de atrito estático, por Cromer (1996) no estudo das diferenças existentes nas velocidades de esferas sólidas e ocas, por Taylor et al. (1997), na análise do movimento de esferas de aço que se deslocam em uma rampa de borracha e por Taylor e Noll (1998), na medida experimental do momento de inércia de esferas sólidas.

Neste artigo, é analisada a influência do raio efetivo no movimento de três projéteis esféricos de aço, soltos de várias alturas em uma pista metálica sulcada e lançados horizontalmente, por meio do módulo das componentes horizontal e vertical da posição dos projéteis, quando interceptados por anteparos. Os anteparos foram posicionados a distâncias conhecidas e os projéteis imprimiram marcas em folhas de papel, possibilitando medir o valor das componentes horizontal e vertical de sua posição, em relação à extremidade da pista de lançamento. Com uma análise adequada dos dados experimentais foi possível calcular o valor teórico da posição dos anteparos, o qual foi

comparado com o valor experimental da posição em que os mesmos foram montados, permitindo discutir a influência do raio efetivo nos resultados.

## II. Conservação da energia

Considerando a conservação da energia total para uma esfera que parte do repouso de uma determinada altura,  $h$ , e desliza numa superfície inclinada e sem atrito, obtém-se que o módulo de sua velocidade final,  $v$ , é determinado por meio da expressão tradicional:

$$v = (2 g h)^{1/2} \quad (1)$$

na qual  $g$  representa o valor da aceleração da gravidade local.

Este resultado admite que toda energia potencial da esfera foi convertida unicamente em energia cinética translacional. Se o atrito for considerado, a esfera ficará submetida a uma aceleração angular e, além da translação, também estará sujeita à rotação durante a descida. Parte de sua energia potencial será convertida em energia cinética rotacional, diminuindo o valor de sua velocidade final.

Admitindo que durante sua descida a esfera também role, a conservação de sua energia mecânica total pode ser expressa como:

$$mgh = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} I\omega^2 \quad (2)$$

onde o primeiro termo à direita da igualdade representa a energia cinética translacional e o segundo termo a energia cinética rotacional. Nesta expressão,  $\omega$  representa a velocidade angular de rotação instantânea da esfera e  $I$  indica o valor do seu momento de inércia. Para uma esfera sólida e homogênea de raio  $R$ , o valor do momento de inércia em torno de qualquer diâmetro é igual à  $\frac{2}{5} mR^2$  (TIPLER, 1999, p. 244). Admitindo que a esfera role em torno de seu diâmetro sem deslizar, a condição de não deslizamento, em qualquer instante, expressa-se como  $v = \omega R$ .

Substituindo o valor do momento de inércia e da velocidade angular de rotação ( $\omega = v/R$ ) na expressão (2), obtém-se:

$$gh = \frac{7}{10} v^2 \quad (3)$$

Nessas condições, a velocidade final da esfera será igual a:

$$v = (1,43 g h)^{1/2} \quad (4)$$

valor que é, aproximadamente, 30% menor do que (1), obtido sem considerar a rotação.

É importante ressaltar que esta análise é válida quando a superfície inclinada é plana e o contato entre ela e a esfera se dá em somente um ponto.

### III. Raio efetivo

Quando uma esfera se desloca apoiada em canais, normalmente ela toca a pista em dois pontos de contato laterais, conforme mostrado na Fig. 1. A localização desses pontos depende de quanto a esfera “afunda” na pista.

À medida que o diâmetro da esfera aumenta de valor (comparado com a largura da pista), esses pontos de contato se aproximam. No limite, obtém-se o caso da esfera posicionada sobre uma superfície plana.

A esfera ainda pode, ainda, tocar o fundo do canal, apoiando-se em três pontos. Se isso ocorrer, as medidas experimentais resultarão em valores bastante diferentes daqueles previstos teoricamente, de acordo com Bachman.

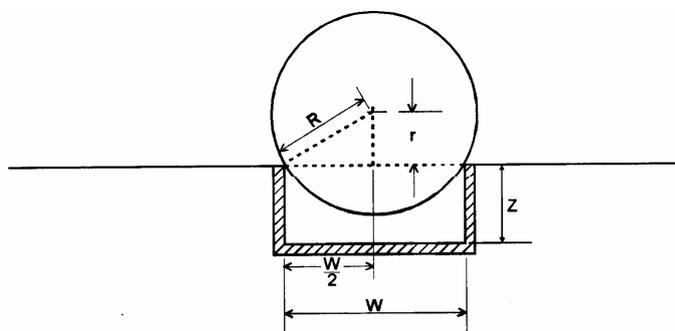


Fig. 1 - Esfera, de raio  $R$ , posicionada em uma pista que apresenta um canal de largura  $W$  e profundidade  $Z$ . A distância do centro da esfera ao plano imaginário que passa pelos dois pontos de contato é igual ao raio efetivo  $r$ .

Uma análise trigonométrica da Fig. 1 mostra que o raio efetivo  $r$  pode ser calculado por meio da expressão:

$$r = (R^2 - W^2/4)^{1/2} \quad (5)$$

na qual  $R$  representa o raio verdadeiro da esfera e  $W$  a largura do canal.

Considerando que a condição de não deslizamento ( $v = \omega r$ ) agora deve ser aplicada a uma esfera cujo raio é igual ao raio efetivo,  $r$ , enquanto que o momento de inércia está relacionado com a rotação da esfera de raio  $R$ , a partir da equação (2) pode-se mostrar que a velocidade final do projétil esférico na pista sulcada, em função da altura de lançamento e do raio efetivo, será dada por:

$$v^2 = 10 g h [ r^2 / (5 r^2 + 2 R^2) ] \quad (6)$$

Na situação em que a esfera mantém somente um ponto de contato com a superfície de deslizamento (isto é,  $r = R$ ), a equação acima leva ao resultado (4), como esperado.

#### IV. Equações do movimento de projéteis e dos módulos das componentes horizontal e vertical da posição

Quando um projétil é lançado com ângulo igual a zero grau, as duas componentes de sua posição, horizontal (x) e a vertical (y), em qualquer tempo t, são obtidas por meio das conhecidas expressões:

$$x = vt \quad (7)$$

$$y = \frac{1}{2} g t^2 \quad (8)$$

Substituindo (7) em (8), para eliminar o tempo como variável, e expressando a velocidade inicial do projétil de acordo com a equação (6), obtém-se a seguinte expressão para o módulo da componente vertical (y) do vetor posição do projétil:

$$y = [(5r^2 + 2R^2)x^2 / 20r^2]h^{-1} \quad (9)$$

Se não for considerando o raio efetivo (portanto, fazendo  $r = R$ ), esta componente será dada por:

$$y = [(7/20)x^2]h^{-1} \quad (10)$$

Se forem desconsiderados o raio efetivo e o movimento de rotação da esfera, o módulo da componente vertical do vetor posição será expresso como:

$$y = [x^2/4]h^{-1} \quad (11)$$

Nas três expressões, os termos entre colchetes são iguais ao coeficiente angular da curva que se obtém representando-se o módulo da componente vertical (y) em função do inverso da altura em que a esfera foi abandonada ( $h^{-1}$ ). Assim, o coeficiente angular dessa curva permite determinar o valor experimental da componente horizontal x.

Substituindo (8) em (7), e usando a equação (6) para a velocidade inicial do projétil, obtém-se a seguinte expressão para o módulo da componente horizontal do vetor posição:

$$x = [(20r^2)y/(5r^2 + 2R^2)]^{1/2} h^{1/2} \quad (12)$$

Sem considerar o raio efetivo essa componente será igual a:

$$x = [20y/7]^{1/2} h^{1/2} \quad (13)$$

Desconsiderando, também, o movimento de rotação da esfera, obtém-se o resultado:

$$x = [4y]^{1/2} h^{1/2} \quad (14)$$

Os termos entre colchetes indicam os coeficientes angulares da curva que se obtém representando o módulo da componente horizontal do vetor posição (x), em função da raiz quadrada da altura em que a esfera foi abandonada ( $h^{1/2}$ ). O

coeficiente angular dessa curva possibilita determinar o valor experimental da componente vertical do vetor posição ( $y$ ).

## V. Montagem experimental

A montagem experimental, esquematizada na Fig. 2, utilizou uma pista sulcada, de largura interna igual a 6 mm, feita com um perfil de alumínio em formato de “U” e inclinada de  $25^\circ$  em relação à base. Sua extremidade final foi fixada paralela à base, de modo que os projéteis fossem lançados horizontalmente.

Como projéteis foram utilizadas três esferas de aço, com raios de 5,5 mm, 8,5 mm e 12,5 mm. Cada uma delas foi lançada com velocidade zero das mesmas cinco diferentes alturas (20 cm, 25 cm, 30 cm, 35 cm e 40 cm) e os lançamentos foram repetidos cinco vezes, de forma que os valores utilizados nos cálculos referem-se à média dos valores obtidos.

O anteparo vertical foi posicionado a 30cm, 40 cm e 50 cm de distância, em relação à extremidade da pista, e o anteparo horizontal a 50,5 cm, 70,5 cm e 85,5 cm, abaixo da extremidade da pista. As medidas foram feitas em relação ao centro de massa das esferas e feitas com uma trena cuja menor divisão é de um milímetro. Dessa forma, a incerteza inerente ao equipamento de medida é de, no mínimo, meio milímetro, não sendo, entretanto, a única relacionada com as medidas. Vuolo (1992), por exemplo, discute os diversos tipos de erros existentes em todo processo de medida, envolvendo o observador e o instrumento de medida, os quais procurou-se minimizar.

A Fig. 2a esquematiza o posicionamento da pista e do anteparo, que foi utilizado para coletar os dados referentes aos módulos da componente vertical ( $y$ ) da posição do projétil, e a Fig. 2b a disposição que foi empregada para coletar os dados dos módulos da componente horizontal ( $x$ ).

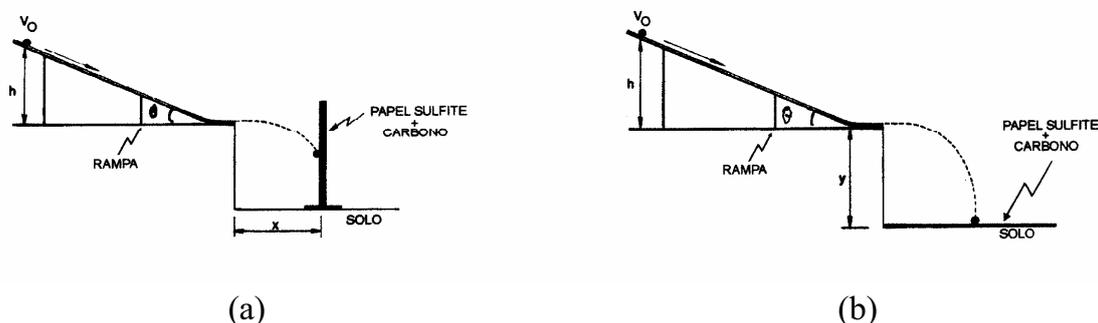


Fig. 2 - Esquema da montagem experimental mostrando o posicionamento dos anteparos que foram utilizados para coletar os dados dos módulos das componentes vertical (a) e horizontal (b) da posição dos projéteis.

## VI. Análise gráfica dos dados experimentais

Os pontos experimentais obtidos para cada série de lançamentos foram medidos em relação à projeção da extremidade da pista. Com eles, construíram-se as curvas de  $(y)$  em função de  $(h^{-1})$  e de  $(x)$  em função de  $(h^{1/2})$ , utilizando um software que possibilita realizar regressão linear, determinando-se os valores de seus respectivos coeficientes angulares. Os valores dos coeficientes de correlação dos ajustes efetuados oscilaram entre 0,995 e 0,999.

Uma vez conhecidos os respectivos coeficientes angulares, as expressões associadas (9), (10) e (11) forneceram os valores do módulo da componente vertical  $(y)$  e as expressões (12), (13) e (14), os valores do módulo da componente horizontal  $(x)$ .

A Fig. 3 mostra um resultado típico da regressão linear feita com os valores dos módulos das componentes horizontais da posição  $(x)$ , em função da raiz quadrada da altura de lançamento  $(h^{1/2})$ , de duas das esferas utilizadas. O coeficiente angular dessa reta possibilita determinar o módulo da componente vertical da posição  $(y)$ .

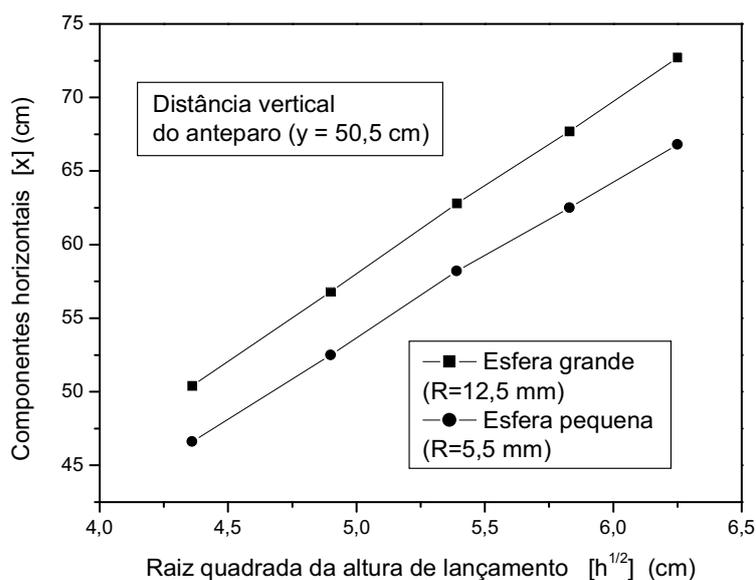


Fig. 3 - Curva típica da regressão linear feita com os valores dos módulos das componentes horizontais da posição  $(x)$ , em função da raiz quadrada da altura de lançamento  $(h^{1/2})$ , para duas esferas.

Na Fig. 4, tem-se um resultado típico do ajuste para os valores dos módulos das componentes verticais da posição  $(y)$ , em função do inverso da altura de lan-

çamento ( $h^{-1}$ ), das mesmas duas esferas. O coeficiente angular da reta permite a determinação do módulo da componente horizontal da posição ( $x$ ).

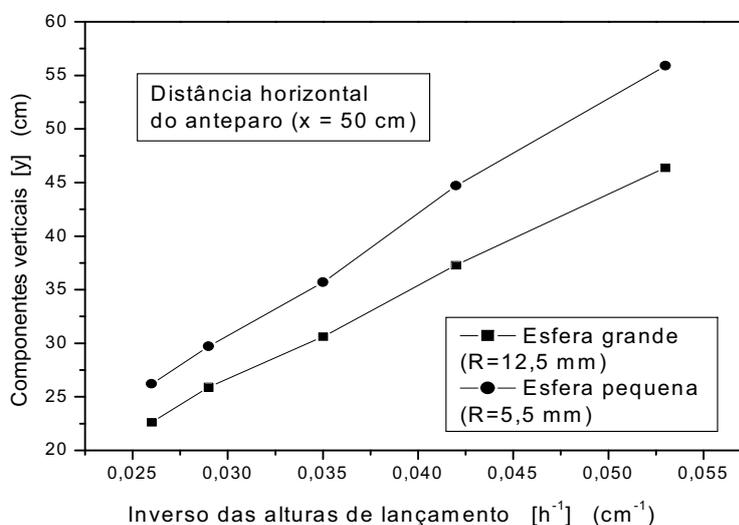


Fig. 4 - Curva típica da regressão linear feita com os valores dos módulos das componentes verticais da posição ( $y$ ), em função do inverso da altura de lançamento ( $h^{-1}$ ), para duas esferas.

## VII. Resultados experimentais

As tabelas seguintes apresentam, para as três esferas utilizadas, os valores medidos experimentalmente da extremidade da pista até os anteparos, das distâncias horizontais (tabela 1) e verticais (tabela 2), além dos valores dos coeficientes angulares obtidos com o processo de regressão linear, bem como os resultados para as distâncias dos anteparos nas situações em que se considera somente o movimento de translação das esferas, quando também é considerado o movimento de rotação e quando, associado aos movimentos de translação e rotação, se utiliza o raio efetivo nos cálculos.

## VIII. Discussão dos resultados

Nos resultados, deve-se considerar que a maior fonte de imprecisão envolvida na análise dos dados experimentais está na determinação dos coeficientes angulares das retas que se consegue unindo os pontos obtidos experimentalmente, pelo fato das mesmas terem sido construídas com apenas cinco pontos, correspondentes aos valores das alturas de lançamento utilizadas. Em casos como esse, é importante utilizar

Tabela 1 – Resultados relacionados com os módulos das componentes horizontais da posição (x), para as três esferas.

Posição, x, do anteparo vertical (cm)	Coefficiente angular da reta	Translação (Eq. 14) x (cm)	Transl. + Rot. (Eq. 13) x (cm)	Raio efetivo (Eq. 12) x (cm)
<b>R = 5,5 mm (r = 4,6 mm)</b>				
30	368,1	38,4	32,5	30,6
40	686,4	52,4	44,3	41,8
50	1107,9	66,6	56,3	53,2
<b>R = 8,5 mm (r = 8,0 mm)</b>				
30	318,5	35,7	30,2	29,7
40	604,8	49,2	41,6	40,9
50	927,9	60,9	51,5	50,6
<b>R = 12,5 mm (r = 12,2 mm)</b>				
30	312,6	35,4	29,7	29,9
40	543,6	46,6	39,2	39,4
50	876,4	59,2	49,7	50,1

Tabela 2 – Resultados relacionados com os módulos das componentes verticais da posição (y), para as três esferas.

Posição, y, do anteparo horizontal (cm)	Coefficiente angular da reta	Translação (Eq. 11) y (cm)	Transl.+ Rot. (Eq. 10) y (cm)	Raio efetivo (Eq. 9) y (cm)
<b>R = 5,5 mm (r = 4,6 mm)</b>				
50,5	10,7	28,6	40,0	44,9
70,5	12,6	39,7	55,5	62,3
85,5	14,4	51,8	72,5	81,3
<b>R = 8,5 mm (r = 8,0 mm)</b>				
50,5	11,4	32,5	45,4	47,1
70,5	13,8	47,6	66,6	69,0
85,5	15,3	58,5	81,9	84,9
<b>R = 12,5 mm (r = 12,2 mm)</b>				
50,5	11,8	34,8	48,7	49,4
70,5	13,7	46,9	65,6	66,6
85,5	15,2	57,8	80,8	81,9

algum programa de computação para se obter o coeficiente angular e não traçar as curvas diretamente em papel milimetrado.

Dos resultados obtidos, fica evidente a importância de se considerar a rotação da esfera durante o movimento. Não considerar a transformação de energia associada com seu movimento de rotação resulta em valores grosseiramente diferentes daqueles esperados para as componentes horizontais (x) e verticais (y) da posição.

Também fica claro que a utilização de esferas em pistas sulcadas pode afetar o resultado esperado de experimentos. Nesses casos, é recomendável que o valor do raio efetivo seja determinado previamente e comparado com o raio da esfera a ser utilizada, pois na medida em que o raio efetivo se aproxima do valor do raio da esfera, menor será a necessidade de introduzi-lo nos cálculos.

Quando se emprega o refinamento do raio efetivo nos cálculos, os resultados melhoram significativamente para a esfera de menor tamanho ( $R = 5,5$  mm e  $r = 4,6$  mm), enquanto que para a esfera maior, cujo raio efetivo é próximo do raio da esfera ( $R = 12,5$  mm e  $r = 12,2$  mm), a diferença percentual entre o valor medido experimentalmente e o valor obtido a partir do coeficiente angular é pequena, podendo ser atribuída a perdas não consideradas e decorrentes do atrito, calor, som e vibração da pista.

De uma forma geral, considerar o raio efetivo leva a melhores resultados quaisquer que sejam as dimensões das esferas, sendo recomendada sua utilização sempre que houver necessidade de uma análise rigorosa do movimento de esferas em pistas sulcadas.

Finalmente, deve-se considerar que a obtenção de resultados muito diferentes dos valores esperados, em experimentos de natureza semelhante ao aqui descrito, tais como o lançamento de projéteis a ângulos quaisquer, o movimento retilíneo e acelerado, as colisões e o estudo do movimento circular (“loop”), pode estar ligada muito mais a uma análise incorreta da situação física do que às “perdas devido ao atrito”, normalmente utilizadas como justificativa.

## **IX. Referências bibliográficas**

BACHMAN, R. A. Sphere rolling down a grooved track. **American Journal of Physics**, v. 53, n. 8, p. 765-767, 1985.

CROMER, A. An unusual rolling-sphere phenomenon. **The Physics Teacher**, v. 34, p. 48-50, 1996.

TAYLOR, J. R. et al. Conservation of energy with a rubber ramp. **The Physics Teacher**, v. 35, p. 146-147, 1997.

TAYLOR, R.; NOLL, E. D. Controlling all variables in a experiment. **The Physics Teacher**, v. 36, p. 115-117, 1998.

TIPLER, P. A. **Física para cientistas e engenheiros**. 4. ed. v. 1. Rio de Janeiro: LTC, 1999. 651 p.

VUOLO, J. H. **Fundamentos da teoria de erros**. São Paulo: Edgard Blücher, 1992. 225 p.