POSSÍVEIS SOLUÇÕES PARA A QUESTÃO Nº 7 DO PROVÃO/MEC/2000/FÍSICA - EXAME NACIONAL DE CURSOS[+*]

Pedro Augusto Pereira Borges
Nelson Adelar Toniazzo
Departamento de Física, Estatística e Matemática - UNIJUÍ
Ijuí – RS

Resumo

Um procedimento pedagógico bastante comum nas disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral é a inclusão de exemplos ilustrativos de outras áreas de conhecimento. Procura-se, com tais exemplos, tornar as aulas mais interessantes e dar mais significado aos conteúdos de Matemática. Neste texto são apresentadas quatro soluções para um problema de Física, originalmente proposto no Provão/MEC/2000/Física.

Palavras-chave: *Ensino de Física, Física-Matemática, ensino de Cálculo.*

Abstract

It is a common procedure in calculus classes, to include illustrative examples from other fields of knowledge. The assumption is that the classes will become more interesting and that the significance of mathematics contents will be enhanced. In this text we worked out four different solutions for a physics problem originally proposed in the 2000 Brazilian National Examination for physics graduate students.

[+] Some possible solutions for problem number 7 from the Brazilian National Examination for undergraduate students in Physics

[*] *Recebido: julho de 2001.*
Aceito: novembro de 2002.

Keywords: *Physics teaching, Mathematical Physics, Calculus teaching.*

I. Introdução

Utilizar assuntos das Ciências como aplicações em Matemática é bastante comum no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, particularmente nos cursos de Licenciatura em Física e Matemática. Uma aprendizagem mais significativa pode ser alcançada quando essas aplicações ocorrem em disciplinas do mesmo semestre, fazendo com que a análise dos resultados obtidos matematicamente seja acompanhada de interpretação física. A questão nº 7 do Provão/2000/Física foi proposta aos alunos da disciplina de Mecânica Geral I, do Curso de Licenciatura em Física da UNIJUÍ, em julho/2000. Os mesmos alunos cursavam, concomitantemente, a disciplina de Cálculo IV, na qual eram estudadas as funções paramétricas e integrais de linha, assuntos estes introduzidos com base no conceito de trabalho de um campo vetorial sobre uma partícula em movimento. Inicialmente, o objetivo era encontrar um procedimento matemático para resolver a questão. Feito isto, constatou-se que existiam várias abordagens possíveis, envolvendo conteúdos diferentes e que se tratava de uma boa ilustração sobre o uso destes conteúdos, além de motivar a discussão sobre os aspectos físicos do problema.

Neste texto são apresentadas quatro soluções para a referida questão. A primeira é a opção mais viável para uma prova com tempo limitado. Usa o conceito de trabalho e algumas condições particulares do problema. As outras três soluções também usam o conceito de trabalho e são aqui descritas como ilustração de conteúdos de cálculo, tais como: integral de linha e funções paramétricas, integrais de linha com a variável x como parâmetro e o Teorema de Green.

II. Descrição e análise do problema

A questão Nº 07 do PROVÃO, Exame Nacional do Curso de Física MEC/2000, tem a seguinte redação[1]:

Uma força no plano xy é dada por:

$$\vec{F} = \frac{F_o}{r}(y\,\vec{i} - x\,\vec{j}), \tag{1}$$

onde F_o é uma constante e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. O trabalho realizado por essa força sobre uma partícula é:

(A) Igual a $-2\pi RF_o$, se a partícula descrever uma circunferência completa de raio R, no sentido anti-horário.

(B) Igual a $F_o r$, se a partícula se deslocar em linha reta, desde a origem até o ponto localizado em $\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$.

(C) Nulo, se a partícula percorrer um número inteiro de ciclos sobre uma circunferência.

(D) Sempre nulo, para qualquer deslocamento sobre um arco de circunferência.

(E) Independente da trajetória no plano onde a partícula se desloca.

Uma análise preliminar do problema mostra que a partícula está sujeita a um campo de forças $\vec{F}$ tal que $|\vec{F}| = F_O$ para qualquer ponto do plano *XY*. O leitor pode verificar isto facilmente aplicando sobre o vetor $\vec{F}$, dado pela equação (1), a definição do módulo de um vetor.

Observa-se na Fig. 1 que o sentido da força $\vec{F}$ sobre uma circunferência de raio R, com centro na origem, é horário.

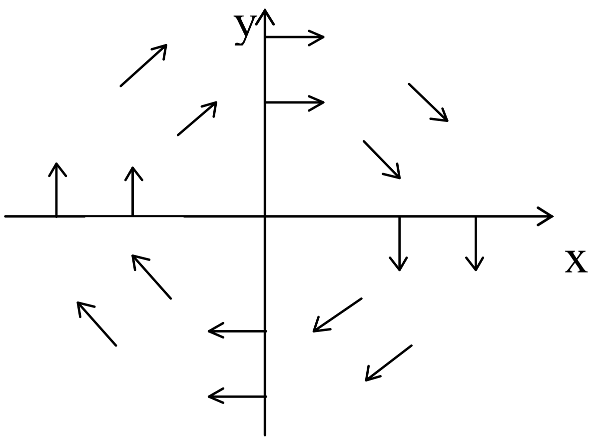

Fig.1 – Representação gráfica do campo de forças.

As coordenadas de um ponto sobre tal circunferência podem ser obtidas pelas equações:

$$x = R\cos\theta \quad e \quad y = R\,sen\theta; \qquad (2)$$

então, substituindo (2) em (1) e fazendo $r = R$, pode-se escrever $\vec{F}$ em função de θ:

$$\vec{F} = F_o(\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j}); \qquad (3)$$

Variando θ no sentido anti-horário e localizando os respectivos vetores $\vec{F}(\theta)$ sobre a circunferência, conclui-se que todos os vetores apontam no sentido horário. A Fig. 2 apresenta um esquema da força $\vec{F}$, de módulo constante F_o, tangenciando uma circunferência de raio *R*.

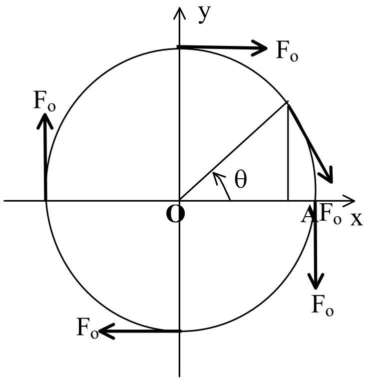

Fig. 2 - Força exercida ao longo da trajetória circular.

III. Uma solução rápida

Um procedimento rápido para resolver a questão é o seguinte:
Sabemos que o trabalho é definido pela integral de linha

$$W = \int_c \vec{F}.d\vec{r} \tag{4}$$

onde *c* é a trajetória descrita pela partícula e $d\vec{r}$ é um elemento dessa trajetória. Assim, considerando inicialmente a hipótese do item (A), de trajetória circular de raio R percorrida no sentido anti-horário, o produto escalar $\vec{F}\cdot d\vec{r}$ é dado por:

$$\vec{F}.d\vec{r} = \left|\vec{F}\right|\left|d\vec{r}\right|\cos 180^o \tag{5}$$

pois o campo $\vec{F}$ é antiparalelo a $d\vec{r}$. Conseqüentemente,

$$W = -F_0 \int_c \left|d\vec{r}\right| = -F_0\left(2\pi R\right), \tag{6}$$

que é a resposta da alternativa (A) da questão[2].

Já na alternativa (B), quando a partícula se desloca em linha reta, desde a origem até o ponto localizado em $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j}$, temos:

$$W = \int_c \vec{F}.d\vec{r} = F_0 \int_c \frac{1}{r}\left(y\vec{i} - x\vec{j}\right)\cdot\left(dx\vec{i} + dy\vec{j}\right), \tag{7}$$

ou

$$W = F_0 \int_c \frac{1}{r}\left(ydx - xdy\right). \tag{8}$$

Examinando o caso de trajetórias retas que passam pela origem, cuja equação é $y = mx$, na qual m é o coeficiente angular da reta, substituindo y e dy em (8), verificamos que o integrando se anula, e o trabalho, ao longo dessas trajetórias, é nulo. A alternativa (B) está, pois, errada. Como o trabalho não é nulo na trajetória circular fechada (ver análise da alternativa (A)), a alternativa (C) obviamente está errada, o mesmo valendo para a alternativa (D), pois qualquer deslocamento sobre um arco de circunferência implica trabalho não-nulo. Além disso, trabalho não nulo numa trajetória fechada caracteriza um campo de força não conservativo. Assim, pode-se descartar a alternativa (E).

Este procedimento é correto e adequado, considerando que os alunos dispõem de apenas alguns minutos para resolver a questão. Mesmo assim, são descritas abaixo três soluções que envolvem conteúdos de Cálculo.

IV. Solução usando funções paramétricas

O trabalho realizado por uma força $\vec{F}(\theta)$ sobre uma partícula que descreve uma trajetória $\vec{r}(\theta)$, entre $a = \vec{r}(\theta_O)$ e $b = \vec{r}(\theta)$ é dado pela integral de linha[3]

$$W = \int_a^b \vec{F}(\theta) \cdot \vec{r}\,'(\theta)\, d\theta \cdot \tag{9}$$

O vetor $\vec{F}(\theta)$ é dado pela equação (3). O vetor $\vec{r}(\theta)$ pode ser escrito como:

$$\vec{r}(\theta) = R\,(\cos\theta\,\vec{i} + \mathrm{sen}\,\theta\,\vec{\mathrm{j}})\,. \tag{10}$$

Derivando (10) em relação a θ, obtém-se:

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = R\,(-\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{\mathrm{j}}) \cdot \tag{11}$$

Substituindo (3) e (11) em (9), obtém-se:

$$W = \int_0^{2\pi} F_o(\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{i} - \cos\theta\,\vec{j}) \cdot R\;(-\,\mathrm{sen}\,\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j})\,d\theta\;\cdot \tag{12}$$

Efetuando o produto escalar e resolvendo a integral, obtém-se:

$$W = -2\pi R F_0 \cdot$$

O problema pode ser mais explorado na disciplina "Cálculo" para alunos de Física, se for discutida a natureza da força $\vec{F}$.

A força $\vec{F}$ é denominada um Campo Vetorial Gradiente quando:

$$\vec{F}(x,y) = \nabla\psi\,(x,y)\,, \tag{13}$$

ou seja, quando existir uma função *ψ(x,y)* que é chamada *Função Potencial* de $\vec{F}$ em um certo domínio. Se essa função potencial existir, então $\vec{F}$ é um C*ampo de Força Conservativo*.

A condição necessária e suficiente para que $\vec{F}$ seja um gradiente (ou que a função potencial de $\vec{F}$ exista) é:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}, \tag{14}$$

na qual $M(x,y)$ e $N(x,y)$ são as componentes da força $\vec{F}$ na forma:

$$\vec{F}\,(x,y) = M\,(x,y)\,\vec{i} + N\,(x,y)\,\vec{j}\,. \tag{15}$$

Da equação (1), obtém-se:

$$M(x,y) = \frac{F_0}{r}\,y \quad \text{e} \quad N(x,y) = -\frac{F_0}{r}\,x\,. \tag{16}$$

Derivando parcialmente M e N em relação a x e y, respectivamente, observa-se que a condição dada na equação (14) não ocorre:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{F_o x^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}} \quad \text{e} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{F_o y^2}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\,. \tag{17}$$

Portanto, $\vec{F}$ é uma força não conservativa. Isso quer dizer que não existe uma função potencial *ψ(x,y)* que satisfaça a equação (13). Esta conclusão pode ser usada para descartar as alternativas (C), (D) e (E), pois, se a força não é conservativa, o trabalho depende da trajetória e não é nulo em uma trajetória fechada.[4]

V. Solução usando *x* como parâmetro

A equação (9) pode ser escrita como uma integral de linha sobre uma curva C:

$$W = \oint_C M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy \qquad (18)$$

onde *M(x,y)* e *N(x,y)* estão descritas na equação (16).

O diferencial *dy* precisa ser definido com base na equação da trajetória (curva C), a qual é uma circunferência com centro na origem, onde $r = R$ e

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (19)$$

Derivando (19) implicitamente, o diferencial $dy = y'dx$, considerando somente o 1º e 2º quadrantes, torna-se:

$$dy = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx\,. \qquad (20)$$

Substituindo (16) e (20) em (18) e integrando em função de *x*, de *R* até zero, calcula-se o trabalho para ¼ da circunferência.

$$W = F_0 R \int_R^0 \frac{dx}{\sqrt{R^2 - x^2}}\,. \qquad (21)$$

Resolvendo (21) por substituição trigonométrica e multiplicando o trabalho por 4 (pois o trabalho em cada quadrante é o mesmo), obtém-se:

$$W = -2\pi R F_0\,.$$

VI. Solução usando o Teorema de Green

Pelo Teorema de Green, o trabalho é dado por:

$$W = \oint_C M\, dx + N\, dy = \iint_A \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \right) dA \qquad (22)$$

onde A é a região definida pelo círculo de raio *R,* sobre o qual é exercida a força $\vec{F}$ dada pelas expressões (15) e (16).

Substituindo as equações (17) com $r = R$ em (22) e integrando em função de *x*, de *R* a zero, e em função de *y* de zero a $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, calcula-se o trabalho para ¼ da circunferência.

$$W = 4\int_0^R \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \left(-\frac{F_o}{R} - \frac{F_o}{R} \right) dy\, dx = -8\frac{F_o}{R}\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\, dx. \qquad (23)$$

Resolvendo a integral por substituição trigonométrica, obtém-se novamente:

$$W = -2\pi R F_0\,.$$

VII. Comentários finais

Considerando o tempo disponível no momento da realização do Provão, obviamente o uso de qualquer uma das soluções descritas nos itens IV, V e VI não seria viável. No entanto, como atividades das disciplinas de Mecânica e Cálculo, podem ser de grande utilidade no que se refere à associação entre as estruturas matemáticas e os possíveis significados físicos.

A prática de resolver problemas de Física em aulas de Matemática, além de ser um bom exercício algébrico e de fixação de conceitos, evidencia as ligações históricas entre a Matemática e a Física.

Devemos ressaltar ainda que nosso objetivo, quanto à questão escolhida para análise neste trabalho, evidentemente não poderia ser o de insinuar originalidade nas soluções apresentadas. O presente trabalho resultou da motivação inicial de resolver essa questão com os alunos e, posteriormente, do desejo de compartilhar com o leitor as soluções encontradas. Estando já disponível um novo conjunto de questões do Provão 2001, não será difícil encontrar outros problemas para serem discutidos. Resolvendo-os conjuntamente com os alunos, capacitaremo-nos melhor para avaliar o grau de dificuldade que o Provão apresenta para eles. Nesse sentido, o desempenho dos bacharéis e licenciados brasileiros que *responderam* a questão número 7 do Provão Mec/2000(2) é muito revelador.

Notas e referências bibliográficas:

(1) MEC - *Exame Nacional de Cursos: Prova de Física/2000*. Compunham esta prova 40 questões de múltipla escolha e 5 questões discursivas.

(2) A alternativa (A) foi assinalada como correta no gabarito do Provão. Em todo o país, 16 % dos alunos assinalaram (A); 48,5% (B); 23,3 % (C); 10,1% (D) e 1,6 % (E). MEC - *Exame Nacional de Cursos: Prova de Física/2000. Relatório da Instituição*. p. 9.(<http://www.inep.gov.br>).

(3) ANTON, H. **Cálculo, um novo horizonte**. Porto Alegre: Bookman, 6ª ed., 2000.

(4) NUSSENZVEIG, H. M. **Curso de Física Básica 1:** Mecânica. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, 3ª ed., 1997.

Agradecimentos

Agradecemos ao professor Rolando Axt (UNIJUÍ) e à professora Irene Maria Strauch (UFRGS) pelo incentivo e sugestões apresentadas.