
CUERPO RÍGIDO: EXPERIENCIA DE LABORATORIO CON MATERIAL DE BAJO COSTO

Irene Arriassecq

Departamento de Formación Docente

Facultad de Ciencias Exactas

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

Marcelo Lester

Instituto de Física Arroyo Seco

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

Silvia Stipcich

Departamento de Formación Docente

Facultad de Ciencias Exactas

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires

Buenos Aires - Argentina.

Resumen

Con este trabajo, se pretende revalorizar la utilidad de las experiencias de bajo costo en cursos de Física básica universitaria.

Se analiza una experiencia de laboratorio que tiene como objetivo caracterizar el movimiento de una esfera, en un plano inclinado, mediante dos enfoques diferentes: desde el punto de vista cinemático como movimiento uniformemente acelerado y desde el punto de vista de la dinámica rotacional, es decir, considerando a las esferas como masas puntuales o sólidos rígidos. El aspecto más interesante, desde el punto de vista de la riqueza conceptual del análisis, es la reformulación de las clásicas ecuaciones que se utilizan para resolver el problema tomando en cuenta que la esfera rototraslaciona en una canaleta apoyando en dos puntos.

1. Introducción

La utilización de materiales de bajo costo no impide el análisis conceptual profundo de un problema. A pesar de esto, generalmente suelen subestimarse este tipo de experiencias, asociándolas con una comprobación de leyes físicas, recortando a priori el potencial didáctico y/o explicativo de las mismas, asumiendo que el bajo costo

se relaciona en forma directa con la introducción de considerables errores en la medición.

Esta experiencia se implementa en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires y tiene como objetivo caracterizar el movimiento de una esfera, en un plano inclinado. El arreglo experimental consta de: un riel de aluminio de perfil rectangular con una abertura de 9 mm (comercialmente se adquieren como: “rieles para cortinas”), un juego de esferas metálicas (“bolillas de rulemanes“) con diámetros de 25.4 , 15.87 y 9.59 mm respectivamente (Fig.1), cronómetros, reglas milimetradas, nivel con burbuja de aire y un plano inclinado regulable en donde se coloca el riel (ver el esquema en la Fig.1). El ángulo que forma el plano inclinado con la horizontal se mide mediante un goniómetro.

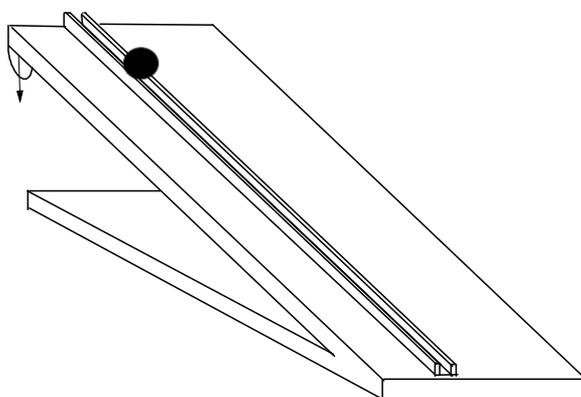


Fig.1: Arreglo experimental.

El riel es económico y de implementación directa (pues no necesita mecanizado ni modificaciones), sin embargo debido al tamaño de las esferas utilizadas para realizar la experiencia estas apoyan en dos puntos. En consecuencia los valores de tiempo que se obtienen para recorrer una misma distancia, con un mismo ángulo, difieren notablemente para las tres esferas. En este trabajo, entonces, se pretende aprovechar, desde el punto de vista didáctico, lo que en principio parecería un inconveniente.

La experiencia puede enfocarse desde dos perspectivas diferentes: desde un punto de vista cinemático como movimiento uniformemente acelerado y desde un punto de vista de la dinámica rotacional, es decir, considerando a las esferas como masas puntuales o sólidos rígidos. Cuando se utilizan esferas del mismo material y distinto radio, surge un nuevo interrogante referido a la diferencia que se observa en los valores obtenidos de aceleración para las esferas en las mismas condiciones experimentales.

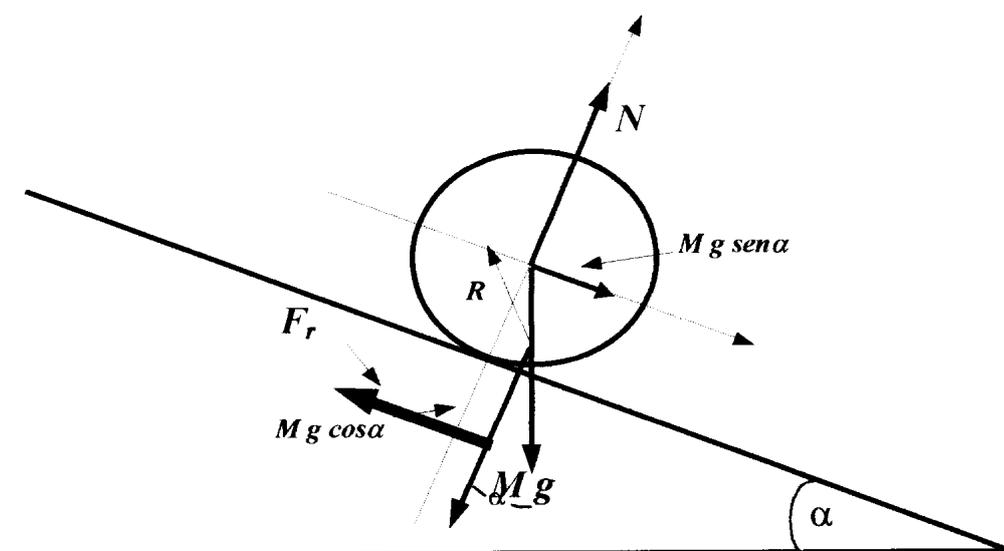
Los alumnos, en general, atribuyen tal diferencia a la precariedad del equipo utilizado argumentando que las ecuaciones planteadas (en los textos clásicos de mecánica o las clases teóricas) son independientes del radio para esferas que rototraslacionan apoyando en un solo punto en cada instante.

La riqueza conceptual de esta experiencia con material de bajo costo surge cuando los alumnos toman en cuenta el hecho que la esfera en realidad apoya en dos puntos de la canaleta, debiendo reformular las ecuaciones que permiten responder al interrogante planteado.

II. Diferentes enfoques para el cálculo de la aceleración de la esfera

II.1. La esfera como masa puntual

En este caso se considera a la esfera como una masa puntual que desciende por un plano inclinado que forma un ángulo α con respecto a la horizontal (ver Fig.2) con las siguientes condiciones iniciales: $v_0 = 0$, $t_0 = 0$ y $x_0 = 0$.



II.1.1. Enfoque desde el punto de vista cinemático:

En esta aproximación, la distancia recorrida por el móvil uniformemente acelerado es

$$d = \frac{1}{2}at^2, \quad (\text{II. 1})$$

donde el espacio recorrido d y el tiempo empleado t son datos experimentales. Entonces, a partir de (II. 1) es posible obtener una expresión para la aceleración del centro de masas (CM).

$$a = \frac{d}{t^2}. \quad (\text{II. 2})$$

II.1.2. Enfoque desde el punto de vista dinámico.

En la Fig.2 se muestra un diagrama de cuerpo libre con las fuerzas que actúan sobre la esfera. En este caso, la única fuerza que acelera a la esfera es componente del peso paralelo al plano inclinado y que pasa por el CM, con lo cual

$$Mg \sen \alpha = Ma, \quad (\text{II.3})$$

ó

$$a = g \sen \alpha \quad (\text{II. 4})$$

La aceleración del CM de la esfera solo depende del ángulo α .

II.2. Enfoque desde el punto de vista de la dinámica del cuerpo rígido

En este enfoque se considera que la esfera desciende por el riel rotando sin deslizar y que en cada instante *apoya en un solo punto*. En la Fig.2, N es la fuerza normal al plano inclinado y F_r la fuerza de fricción estática. El movimiento traslacional del cuerpo se obtiene suponiendo que todas las fuerzas externas actúan sobre el centro de masas.

Usando las leyes de Newton

$$\begin{cases} N - Mg \cos \alpha = 0 \\ Mg \sen \alpha - F_r = Ma \end{cases} \quad (\text{II. 5})$$

La fuerza de fricción tiene un brazo de momento R en torno al punto C , con lo cual

$$F_r R = I_{CM} \frac{d\omega}{dt} \quad (\text{II.6})$$

donde I_{CM} es el momento de inercia de la esfera referido al centro de masas y ω es la velocidad angular de la esfera. Teniendo en cuenta que: $I_{CM} = \frac{2}{5} MR^2$ y $\frac{d\omega}{dt} = \frac{a}{R}$, de la ec. (II. 6) se obtiene $F_r = \frac{2}{5} Ma$. Remplazando F_r en la ecuación de traslación (II.5) se llega a la expresión para la aceleración del CM de la esfera que rota y se traslada

$$a = \frac{5}{7} g \operatorname{sen} \alpha \quad (\text{II. 7})$$

Al igual que en la aproximación de masa puntal, la aceleración del CM del móvil solo depende del ángulo α con lo cual es la misma para *todas* las esferas sólidas.

Utilizando la expresión

$$v_{CM}^2 = 2ad, \quad (\text{II. 8})$$

es posible reordenar la ecuación (II.7) en forma que involucre los datos experimentales d , t y α ,

$$a = \frac{\sqrt{\frac{10}{7} gd \operatorname{sen} \alpha}}{t}. \quad (\text{II.9})$$

III. Modificación de las ecuaciones para la esfera que apoya en dos puntos

Considerando que la esfera toma contacto con el riel a una distancia h del centro de masas (ver Fig.3), la relación que da cuenta del movimiento rotacional (ec.(II. 6)), toma la siguiente forma:

$$F_r h = I_{CM} \frac{a}{h}. \quad (\text{III.1})$$

Para una esfera sólida de radio R , se obtiene una expresión para la fuerza de fricción que depende de la distancia h (medida desde el punto de contacto de la esfera con el riel y el CM),

$$F_r = \frac{2}{5} MR^2 \frac{a}{h^2} \quad (\text{III.2})$$

Substituyendo la ec. (III.2) en la segunda ecuación del sistema de ecuaciones (II.5)

$$g \operatorname{sen} \alpha - \frac{2}{5} \left(\frac{R}{h} \right)^2 a = a, \quad (\text{III.3})$$

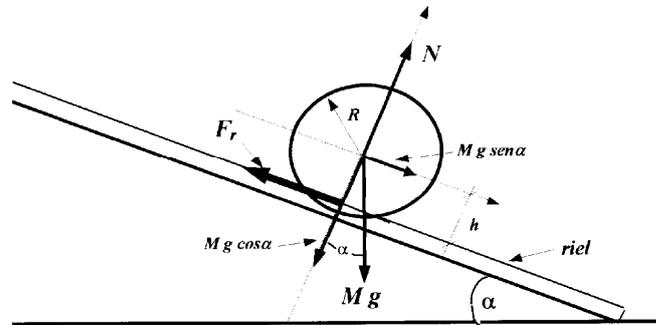


Fig.3(a) en dos puntos.

se apoya

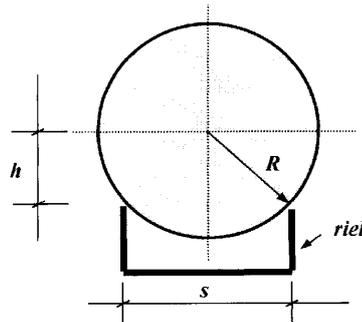


Fig.3 (b). Con un riel horizontal con la esfera.

se obtiene una expresión para la aceleración del CM para la esfera que apoya en dos puntos

$$a = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{1 + \frac{2}{5} \left(\frac{R}{h} \right)^2} \quad (\text{III. 4})$$

que no es independiente del radio de la esfera.

Analizando la Fig.3b), se observa que si s es el ancho del riel, entonces

Erro! Indicador não definido.,
(III.5)

reemplazando esta última ecuación en la (III.4), se obtiene

$$a = \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{1 + \frac{2}{5} \frac{1}{1 - \left(\frac{s}{2R}\right)^2}} \quad (\text{III.6})$$

ó

$$a = \frac{\left[(2R/s)^2 - 1\right]}{\frac{7}{5}(2R/s)^2 - 1} g \operatorname{sen} \alpha, \quad (\text{III.7})$$

de esta forma, la aceleración del CM queda expresada en función de los datos experimentales R , s y α . En el límite cuando $s \rightarrow 0$, la ecuación (III.7) se reduce a la ecuación (II.7), que corresponde al problema con un solo punto de apoyo. El otro valor límite para s se da cuando $s \rightarrow 2R$ ($h \rightarrow 0$); en este caso de la ec. (III.6) se obtiene que $a \rightarrow 0$. Cuando la variable h toma el valor cero el diámetro de la esfera es exactamente igual al ancho del riel y el problema queda indeterminado. Esto se debe a que es imposible obtener F_r a partir de la ecuación (III.1) cuando $h=0$.

IV. Resultados y comentarios finales

Se presentan a continuación algunos de los resultados obtenidos por un grupo de estudiantes del primer año del ciclo básico de la Facultad de Ciencias Exactas de la UNCPBA, a modo de ejemplo. En este caso se eligieron tres valores para el ángulos de inclinación α del plano inclinado $\alpha = \{3^\circ, 5^\circ, 10^\circ\}$, con un error de apreciación del orden de ± 0.5 grados. Se utilizó una distancia de recorrido d variable cuyo máximo fue de 1.5 m . Con el fin de disminuir el error medio en la medición en los tiempos t de recorrido, se realizaron entre 15 y 20 mediciones para cada distancia fija d .

Conocida la distancia d y los tiempos de recorrido t es posible determinar, mediante la ecuación (II.1), la aceleración del CM para cada ángulo α . En la Tabla I se muestran los valores calculados (con sus correspondientes errores) para la aceleración de las esferas considerando el caso de masa puntual y cuando las esferas apoyan en un punto (ecs. (II.4) y (II.7)) mientras que en la Tabla II se comparan los resultados obtenidos mediante la condición puramente cinemática, ec. (II.1) (que llamaremos experimentales) y la condición de dos puntos de apoyo, ec. (III.8) (valor teórico) con sus correspondientes errores. En todos los casos se consideró la aceleración de la gravedad g con un valor exacto de 9.81 ms^{-2} .

Se puede observar la discrepancia entre los valores experimentales (primera columna de la Tabla II) y los calculados en la Tabla I debido a la dependencia de la aceleración con el radio de la esfera para un mismo ángulo de inclinación α y parámetro s . En cambio, los resultados mostrados en la segunda columna de la Tabla II (valores teóricos) describen con muy buena precisión la aceleración de la esfera en todos los rangos muestreados. Comparando los resultados de la Tabla I con los de la Tabla II, es posible notar que los valores de aceleración obtenidos mediante la expresión (II.7) (considerando un solo punto de apoyo) son comparables a los valores que figuran en la Tabla II cuando $2\frac{R}{s} = 2.82$ para los tres ángulos considerados, mientras que para relaciones menores entre el diámetro de la esfera y el ancho de la canaleta discrepan de esta aproximación notablemente. Con lo cual, si el diámetro de la esfera es del orden de tres veces el del ancho de la canaleta o mayor, la aproximación de la esfera que apoya en un punto es experimentalmente razonable.

En la Fig.4 se grafican las curvas de aceleración en función de $2\frac{R}{s}$ correspondiente a la esfera que apoya en dos puntos (línea continua) y su valor asintótico (línea de trazos) correspondiente a la esfera que apoya en un punto y los valores experimentales con sus respectivos errores (primera columna de la Tabla II) utilizando como parámetro los tres ángulos α .

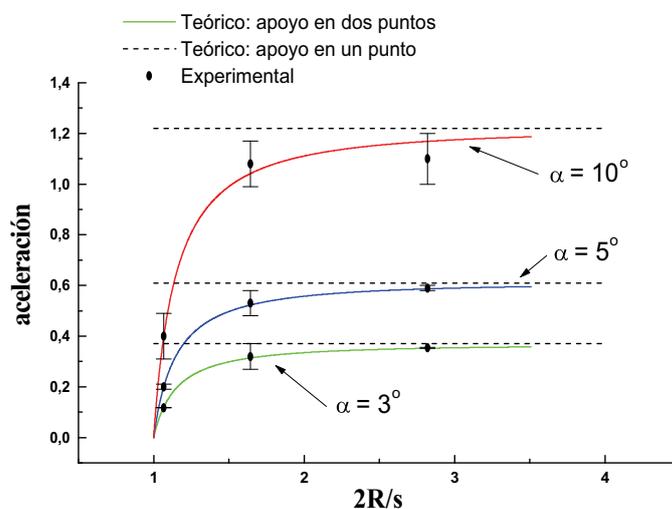


Fig.4: Grafico de la aceleracion en función de la relación $2\frac{R}{s}$ para los tres valores del ángulo α . La línea continua corresponde a la ecuación (3.8) (dos puntos de apoyo) y en línea de trazos a la ecuación (2.7) (solo punto de apoyo). Los puntos corresponden a los valores experimentales con sus errores (primera columna de la Tabla II).

En estos ejemplos se pone de manifiesto entonces que, a pesar de la sencillez que presenta el montaje de la experiencia en el laboratorio, la interpretación física de los resultados presenta ciertas dificultades y requiere del alumno un replanteo y maduración del problema para no incurrir en conclusiones erróneas.

Tabla I		
Angulo	Masa puntual	Esfera en un punto
$\Delta\alpha = \pm 0.5^\circ$	$A = g \operatorname{sen} \alpha$ [ms ⁻²] Erro! Indicador não definido.	$a = \frac{5}{7} g \operatorname{sen} \alpha$ [ms ⁻²]
3°	0.512 ± 0.09	0.37 ± 0.06
5°	0.85 ± 0.09	0.61 ± 0.06
10°	1.7 ± 0.2	1.22 ± 0.06

Cálculo de la aceleración considerando a la esfera como masa puntual (col. 2) y como sólido rígido que apoya en un punto (col. 3) para distintos ángulos de inclinación del plano (col. 1)

Tabla II			
	Valor experimental	Valor teórico	Angulo
2R/Erro! Indicador não definido.	$a = 2 \frac{d}{t^2}$ [ms ⁻²]	$a = \frac{[(2R/s)^2 - 1]}{(7/5)(2R/s)^2 - 1} g \operatorname{sen} \alpha$ [ms ⁻²]	$\Delta\alpha = \pm 0.5^\circ$
2.82	0.354 ± 0.001	0.35 ± 0.06	3°
	0.59 ± 0.01	0.59 ± 0.06	5°
	1.1 ± 0.1	1.17 ± 0.06	10°
1.644	0.32 ± 0.05	0.32 ± 0.02	3°
	0.53 ± 0.05	0.54 ± 0.05	5°
	1.08 ± 0.09	1.07 ± 0.05	10°
1.066	0.117 ± 0.001	0.12 ± 0.02	3°
	0.2 ± 0.01	0.2 ± 0.02	5°
	0.4 ± 0.09	0.39 ± 0.05	10°

Valor teórico y experimental de la aceleración para esferas que apoyan en dos puntos.

V. Bibliografía

FEYNMAN, R. P., LEIGHTON, R., SANDS, M. The Feynman Lectures on Physics, Vol. I, Versión Bilingüe, Fondo Educativo Interamericano, 1971.

SEARS, F. W. Mechanics, Heat and Sound, Ed. Addison Wesley, 1958.

ALONSO, M., FINN, E. Mechanics, Vol. I, Ed. Addison Wesley, 1967.