ASTRONÁUTICA KEPLERIANA

Pedro W Lamberti[1]
FaMAF-UNC
Ciudad Universitaria
Córdoba -Argentina

Resumen

En el presente trabajo se propone el cálculo de la órbita de un satélite artificial utilizando solo las Leyes de Kepler. Se respeta el bagaje de conceptos disponibles en la época de Kepler y se aprovecha este enfoque del problema de dos cuerpos en interacción gravitatoria para repasar algunos aspectos históricos y conceptuales de las Leyes de Kepler.

I. Introducción

Al igual que podemos afirmar que la invención de la telegrafía sin hilos por parte de Marconi es una consecuencia tecnológica de la teoría electromagnética desarrollada previamente por Maxwell; o que la construcción del primer reactor nuclear es una consecuencia tecnológica del conocimiento completo de la estructura íntima del átomo y su núcleo, el lanzamiento del primer satélite artificial en 1957 se puede tomar como el producto tecnológico de los trabajos de Isaac Newton de casi trescientos anos antes. Por sorprendente que resulte, la realidad de tos viajes espaciales fue imaginada por el propio Newton. Mas aún, Johanes Kepler (1571-1630) vislumbró unos cuantos anos antes que Newton, la posibilidad de los viajes espaciales. En el que puede considerarse el primer libro de ciencia ficción jamás escrito, titulado *Somnium* (El Sueno), Kepler imaginó un viaje a la Luna y a los viajeros del espacio situados luego en la superficie lunar observando el encantador planeta Tierra que giraba lentamente en el cielo sobre ellos…[2].

---

[1] CONICET, Argentina

[2] En rigor de verdad, se encuentran referencias literarias a viajes espaciales en algunas obras de Cicerón (Siglo I antes de Cristo)

Podemos entonces realizamos la siguiente pregunta: hubiese sido posible concretar el "Sueno" de Kepler con los elementos teóricos que él disponía?; o expresado de otra manera: es posible calcular la órbita de un satélite artificial a partir de sólo las tres Leyes de Kepler?; o también: hubiésemos podido desarrollar la ciencia de la astronáutica si Newton no hubiera existido jamás? Por supuesto, la puesta en órbita de un satélite artificial en tomo a la Tierra, por ejemplo, no solo involucra el cálculo de su órbita; está el problema nada trivial de llevar el satélite hasta una cierta distancia de la Tierra[3]. Respecto a esto podemos aventurar que quizá se hubiese utilizado en la época de Kepler algún método heurístico, es decir de prueba y error, para el lanzamiento de la nave espacial. Por ejemplo se hubiese podido emplear un cañón de dimensiones más o menos importantes con una carga explosiva que se fuera aumentando paulatinamente hasta lograr que el proyectil (la nave espacial) escapara de la Tierra y quedase en órbita. Quizá el lector recuerde la novela de Julio de Veme, *Les cinq cents millions de la Bégum* en donde el genial autor sugiere que el uso de un gran cañón permitiría la puesta en órbita de uno de los proyectiles del siniestro profesor Schultze…. Pero no necesitamos hacer especulaciones al respecto. EI propio Kepler en su *Somnium* nos describe al lanzamiento de la siguiente manera: "El choque inicial es el peor momento, porque el viajero es proyectado como por una explosión de pólvora [...]. Es preciso que esté adormecido de antemano por opiáceos; sus miembros deben hallarse cuidadosamente protegidos para que no sean arrancados, y el efecto de retroceso se expande por todo su cuerpo. Tendrá entonces nuevas dificultades: un frío extremo y una respiración muy dificultada [...]. Tras cumplirse la primera parte del viaje todo se hace más sencillo, pues en el curso de un viaje tan largo el cuerpo escapa a la fuerza; matemática de la Tierra y penetra en la de la Luna. En este punto liberamos a los viajeros y les entregamos a sus propios medios. Se distienden y contraen como arañas, propulsándose por sus propias fuerzas. Como las fuerzas magnéticas de la a Tierra y la Luna atraen conjuntamente al cuerpo y lo mantienen suspendido, el efecto e es idéntico al que se produciría sino hubiese atracción alguna". Aquí la imaginación de Kepler nos vuelve a sorprender: en el último párrafo Kepler está sugiriendo zonas s de gravedad cero, las cuales fueron efectivamente comprobadas en los viajes espaciales del siglo XX.

Sin lugar a dudas, toda la dinámica Newtoniana nos provee de algunos de los elementos teóricos necesarios para realizar el lanzamiento de una nave espacial de

[3] A esta altura del siglo XX sabemos que la ciencia de la Astronáutica involucra mucho más que el cálculo de las órbitas de las naves espaciales. Tanto el titulo de este trabajo como la línea argumental de la introducción y de la sección 3 pretenden ser una propuesta pedagógica para la enseñanza de las leyes de Kepler en la escuela media. Nada de lo aquí expuesto debe llevarse más allá de ese propósito.

una manera mucho más “científica” que la imaginada por Julio Verne o que la “soñada” por Kepler.

Por otro lado, usualmente se nos muestra a un Kepler preocupado le fundamentalmente en el movimiento planetario. Tenía entonces la “valentía” o intelectual de generalizar la descripción del movimiento planetario al movimiento de otros cuerpos celestes, por ejemplo la Luna, y mas aún, extenderlo al movimiento de posibles naves espaciales construídas por el hombre? A nuestro entender esta pregunta tiene dos aspectos importantes: de tener una respuesta afirmativa, implicaría la aceptación por parte de Kepler y sus contemporáneos de que las leyes que gobiernan “los cielos” pueden tener algo que ver con las leyes que gobiernan a los objetos construídos por el hombre; el otro es la generalización al movimiento de objetos celestes distintos a los planetas. Respecto a este último punto el propio Kepler dice a Galileo: “Empecé a pensar inmediatamente en posibles adiciones al número de planetas que no transtornaran mi *Mysterium Cosmographicum*[4] según el cual los cinco sólidos regulares de Euclides no permiten más de seis planetas alrededor del Sol…. Desconfío tan poco de la existencia de los cuatro planetas circunjovianos que suspiro por tener un telescopio, para anticiparme a vos, si es posible, y descubrir dos más alrededor de Marte, como la proporción parece exigir, seis u ocho alrededor de Saturno y quizá uno alrededor de Mercurio y también de Venus”. Podemos deducir de estas afirmaciones su confianza en que los resultados de sus investigaciones deberían ser válidas tanto para el movimiento de los planetas como para el movimiento de los satélites de los distintos planetas. Más allá del entusiasmo que puede producir en nosotros un Kepler dispuesto a aplicar sus investigaciones a todos los cuerpos celestes, no podemos dejar de notar lo desconcertante que resulta su comentario a Galileo: los sólidos pitagóricos no dejaban lugar ni para la luna terráquea ni para las cuatro lunas de Júpiter que el gran físico italiano acababa de descubrir.

Más importante aún que un Kepler dispuesto a extender la aplicabilidad de sus descubrimientos al movimiento de otros cuerpos celestes distintos que los planetas, es un Kepler que pueda pensar en sus Leyes como instrumentos matemáticos para describir los cambios temporales futuros de las magnitudes físicas de los cuerpos. Llegamos así a la siguiente pregunta: Veía Kepler en sus Leyes las bases para desarrollar una dinámica? Quizás aquí no tengamos una respuesta tan entusiasta como en las preguntas anteriores. Analizar este punto nos llevaría, sin lugar a dudas, fuera del alcance que pretendemos darle al presente trabajo.

Sirvan los párrafos previos como una motivación para el problema que nos proponemos atacar: calcular la órbita de un satélite artificial que gira en torno a la

---

[4] Esta obra es escrita por Kepler en 1595. En ella defiende la teoría heliocéntrica de Copérnico y concibe cada una de las esferas planetarias como inscripta en uno de los sólidos perfectos.

Tierra utilizando únicamente las Leyes de Kepler (y respetando el bagage de conocimientos teóricos y "observacionales" disponible en la época de Kepler). La presentación que realizan los libros de texto del cálculo de órbitas planetarias o satelitales se hace a partir de la dinámica Newtoniana [1]. Lamentablemente esto exige recurrir a la "integración" numérica de ecuaciones diferenciales o al uso de conceptos no siempre disponibles en un curso de Física de la escuela media.

El propósito de este trabajo es presentar al docente de Física una propuesta didáctica para el estudio de las Leyes de Kepler, a través de su utilización en el cálculo de órbitas satelitales. Se aprovecha la discusión para revisar algunos aspectos históricos y conceptuales del trabajo de Kepler. Pensamos que este tipo de análisis permite realizar una comparación entre la Física pre y pos Newtoniana y así destacar los aspectos sobresalientes del trabajo de Newton.

Se incluye en la discusión, además, un breve desarrollo algorítmico del cálculo de la órbita con el fin de facilitar su implementación en una computadora personal.

II. Las Leyes de Kepler

El orden y enunciado usual en que se presentan las Leyes de Kepler es el siguiente [2]:

• Todos los planetas se mueven en órbitas elípticas con el Sol en uno de los puntos focales.
• El radio vector dibujado desde el Sol hasta cualquier planeta barre áreas iguales en intervalos de tiempos iguales.
• El cuadrado del periodo orbital de cualquier planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de la órbita elíptica.

Si T_1 y T_2 son los períodos de revolución de los planetas 1 y 2 y a_1, a_2 los respectivos semiejes mayores de sus órbitas, entonces:

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \tag{1}$$

Kepler arribó a sus Leyes de una manera notablemente intrincada. Quizá la descripción más adecuada de la forma en que Kepler fue avanzando en sus hallazgos es la que hace A. Koestler, quien describe a Kepler como un sonámbulo que va tropezando con los hechos, muchas veces con argumentos erróneos y concepciones falsas, pero que sin embargo conducen a resultados correctos [3].

Desde una perspectiva histórica es importante señalar que la Segunda Ley, o Ley de las áreas, fue enunciada por Kepler con anterioridad a la Primera. Con la Segunda Ley tiraba por la borda el "axioma" del movimiento uniforme; con la Primera daba el mismo destino a un preconcepto aún más sagrado en los tiempos de Kepler: el del movimiento circular. Es interesante notar que desde el punto de vista del razonamiento de la Física Newtoniana es precisamente el orden histórico en que Kepler dedujo sus Leyes, el que corresponde[5].

En efecto, la Segunda Ley es una consecuencia del hecho que la fuerza de atracción gravitatoria en una fuerza central, es decir cuya intensidad solo depende de la distancia al centro de atracción (o repulsión). Esto significa que esta Ley vale tanto para una fuerza que varíe como l/r^2 o como $1/r^3$, donde r es la distancia al "centro de fuerzas". En términos de conceptos Newtonianos ella significa la constancia en el tiempo del vector momento angular de una partícula que se mueve bajo la acción de un campo de fuerza central. Que el vector momento angular sea constante garantiza que el movimiento ocurra en un plano y que además valga la Ley de las áreas.

Por otro lado, la Primera Ley tiene dos aspectos importantes: uno es que la órbita es cerrada; el otro es que la forma de la órbita es una elipse. Solamente hay dos tipos de campos centrales en los cuales todos los movimientos acotados se realizan en trayectorias cerradas. Son aquellos en los que la fuerza varía como $1/r^2$ o como r. La condición de movimiento acotado está relacionada con el valor de la energía mecánica total del cuerpo. EI que la órbita sea una elipse es consecuencia de una "ley l/r^2".

La Tercera Ley implica que la constante de gravitación universales es efectivamente una constante independiente de la masa de los planetas. La formulación correcta de la Tercera Ley requiere una ligera modificación de la expresión (1). En la relación entre períodos y semiejes mayores, aparecen las masas del Sol y la de los correspondientes planetas:

$$\frac{T_1^2(M+m_1)}{T_2^2(M+m_2)}=\frac{a_1^3}{a_2^3} \qquad (2)$$

donde M es la masa del Sol y m_1, m_2 las masas de los respectivos planetas. Claramente esta corrección era imperceptible para Kepler, pues $M \gg m_1$ y $M \gg m_2$, con lo cual a ecuación (2) se aproxima con gran precisión a la ecuación (I).

Una cuestión fundamental debe tenerse presente al analizar las tres Leyes tal como fueron pensadas por Kepler: En ellas está totalmente ausente la noción de una **fuerza de atracción universal**. A pesar de eso, nuestro héroe estuvo muy cerca de

[5] En el libro clásico de F.R. Moulton *An lntroduction to Celestial Mechanics*, The MacMillan Company, 1902, se presentan las Leyes en el orden "lógico" e histórico. Entre los muchos libras consultados, este es el único que lo hace de esa manera.

descubrirla. En el prefacio de su *Astronomia Nova* Kepler expresa: “La gravedad es la mutua tendencia corporal entre cuerpos de la misma naturaleza hacia la unidad o el contacto (la fuerza magnética es también de esta clase), de tal modo que la Tierra atrae a una piedra mucho más de lo que la piedra atrae a la Tierra”. Luego agrega: “Si dos piedras se hallan situadas en un lugar cualquiera del espacio, la una cerca de la otra, y fuera del alcance de la fuerza de un tercer cuerpo de la misma naturaleza, entonces se unirán entre sí, a la manera de los cuerpos magnéticos, en un punto intermedio, cada una aproximándose a la otra en proporción a la masa de esta última”. Como se observa, Kepler intuye que la acción de la gravedad es proporcional a la masa de los cuerpos. No obstante al analizar el sistema solar el ve a la fuerza que ejerce el Sol sobre los planetas como una escoba barredora mas que como una fuerza de atracción [3].

Newton dedujo su Ley de Gravitación Universal a partir de las Leyes de Kepler. Por ejemplo, en la sección III, (proposición XI, problema III) de sus Principia, se puede leer: “Si un cuerpo gira en una elipse encuéntrese la Ley de fuerza centrípeta que tiende hacia el foco de la elipse” (sic). La solución de este problema le hace concluir: “...la fuerza centrípeta es inversamente como el cuadrado de la distancia...” (sic). Es interesante observar que los desarrollos de Newton son puramente geométricos. Una deducción “más moderna” de la Ley de Gravitación Universal a partir de las Leyes de Kepler puede encontrarse en varios libros de Física General, por ejemplo en la referencia [4]; para una deducción simplificada, ver la referencia [5].

III. Cálculo de Orbitas

En mecánica celeste la palabra órbita se usa para describir el conjunto de posiciones ocupadas por una partícula sin ninguna referencia al tiempo en el cual una cierta posición es ocupada. Para nosotros la palabra órbita no solo hará referencia a las distintas posiciones por la que transita la partícula, sino que también tendrá la información “temporal”, i.e., en qué instante de tiempo se encuentra aquella en una determinada posición.

Hecha esta aclaración, retomemos la línea argumental planteada en la Introducción. Pensemos en un grupo de técnicos de la Agencia Espacial de una de las Potencias del siglo XVI (o XVII) dispuestos a poner en órbita un satélite artificial en tomo a la Tierra. El primer pago que ellos deben dar es planificar las características de la órbita. Para ello pueden hacer uso de la Tercera Ley. En efecto, si T_L es el período de revolución de la Luna (27,32 días) y a_L el radio de la órbita lunar (384.400 km) [6], el

[6] Con cierta coherencia histórica deberíamos usar el valor calculado en la época de Kepler: 362.000 Km; sin embargo para evitar confusiones usamos el valor actualmente aceptado. La órbita de la Luna es ligeramente elíptica, con una excentricidad e=0,055.

período de rotación del satélite, $T_{S,}$ y el semieje mayor de su órbita, a_S están relacionados por la expresión:

$$T_S = T_L \frac{a_s^{3/2}}{a_L^{3/2}} \qquad (3)$$

Así si se pretende que el satélite tenga un período de rotación de 2 hs, deberá ser colocado en una órbita cuyo semieje mayor sea de 8077 km, i.e., a una "altura" de 1700 km. sobre la superficie terrestre.

La Primera Ley nos dice que el movimiento del satélite ocurrirá sobre una elipse, y por ello la relación existente entre el módulo del radio vector r y el ángulo e (ver figura 1) se expresa matemáticamente por:

$$r(\theta) = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos(\theta)};\ \theta\varepsilon[0,2\pi] \qquad (4)$$

donde a y b son los semiejes mayor y menor de la elipse que corresponde a la órbita y $e = \sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}$ su excentricidad[7]. El ángulo θ e es el que forma el vector posición con el semieje mayor de la elipse y se conoce en mecánica celeste con el nombre de anomalía verdadera.

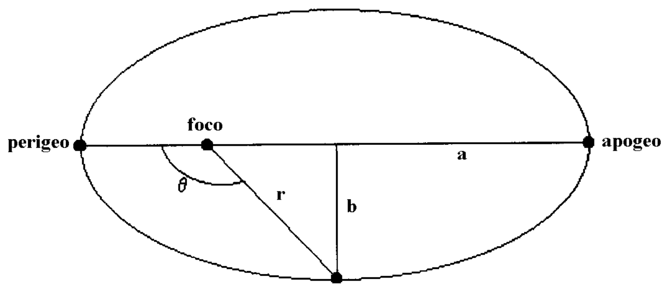

Fig.1: Coordenadas θ y r sobre la orbita

La Segunda Ley dice que la velocidad areolar es constante. El área de la elipse es π a *b*. Siendo T el período, la cantidad $\frac{\pi\, ab}{T}$ es la velocidad areolar. Por otro lado, y con referencia a la figura 2, el área del triángulo sombreado es $\frac{a(1-e)\Delta r}{2}$, con Δr la distancia entre el punto p (perigeo) y un punto (muy) cercano a p sobre la elípse.

[7] El matemático alemán George von Lauchen (1514-1576), quien fuera alumno de Copérnco, perfeccionó las tablas trigonométricas calculadas en la época de los griegos. Ello nos hace pensar que una relación como la (4) era perfectamente manejable para los contemporáneos de Kepler

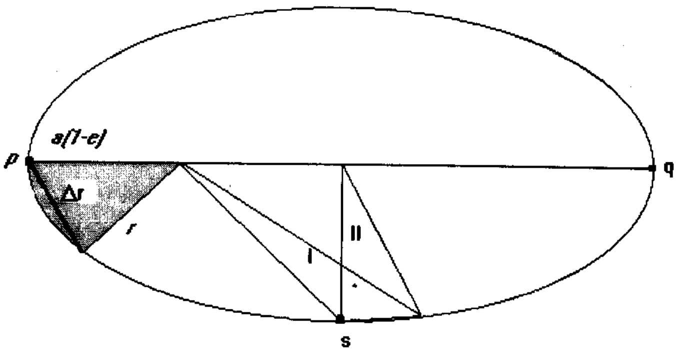

Fig. 2: Calculo de las velocidades en los puntos p, q y s.

Por lo tanto la velocidad areolar en el punto p es igual $\frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{(1-e)v_p}{2}$ con v_p la velocidad (media) del satélite en los puntos vecinos a p. Luego vale la igualdad

$$\frac{a(1-e)v_p}{2} = \frac{\pi ab}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi b}{v_p(1-e)} \tag{5}$$

Quizás aquí el lector quiera objetar que el haber tomado el área del triángulo mostrado en la figura 2 para determinar la velocidad areolar en el punto p es algo más cercano al cálculo infinitesimal de Newton que de lo que Kepler conocía. Una vez más el propio Kepler nos da el argumento. En su Astronomia Nova dice: "Puesto que era consciente de que existe un número infinito de plintos en la órbita, y en consecuencia un número infinito de distancias al Sol, se me ocurrió la idea de que la suma de esas distancias se halla contenida en el área de la órbita. Recordé también que Arquímedes había dividido de la misma forma el área de un círculo en un número infinito de triángulos".

La ecuación (5) da importante información a los técnicos en cuanto a las características del vuelo se refiere[8]. No obstante no deberíamos perder de vista que al

[8] Si repite este razonamiento para el punto *q* de la figura 2 (apogeo), se obtiene la relación. $T = \frac{2\pi b}{v_q(1-e)}$. Vemos así, directamente, que $v_p > vq$. Mas aún, por argumentos **puramente geométricos**, se puede ver que el área del triángulo I es igual al área del triángulo II, la cual es igual a $\frac{v_s b}{2}$. Así se puede arribar a la expresión $T = \frac{2\pi a}{V_s}$. Es interesante notar el significado de esta expresión: el período expresado en función de v_s, no depende de la longitud del eje menor ni de la excentricidad de la elipse. Por lo tanto, todas las órbitas cuyos semiejes mayores sean iguales y para las cuales v_s, sea la misma, tienen el mismo período. La dinámica Newtoniana

carecer de una dinámica, no se está en condiciones de aprovechar estas expresiones para planificar el vuelo, en el sentido moderno. Mas bien nos imaginamos que tras varios intentos fallidos de puesta en órbita, y al lograr hacerlo, los técnicos encontrarán en la expresión (5) una manera de "informarse" acerca de la velocidad del satélite en el punto p. A su vez, inmediatamente después de poner al satélite en órbita será necesario realizar dos observaciones consecutivas. Si en la primera observación las coordenadas del satélite son (r_2, θ_2), y en la segunda son (r_2, θ_2), utilizando la ecuación (4) podemos despejar los "parámetros" a y e:

$$r_1 = \frac{a\,(1-e^2)}{1+e\cos(\theta_1)} \qquad r_2 = \frac{a\,(1-e^2)}{1+e\cos(\theta 2)} \tag{6}$$

Con esto la forma y posición de la órbita quedan completamente determinadas[9].

Pasemos ahora a la determinación de la posición del satélite artificial en función del tiempo. Si A_1 es el área barrida por el radio vector en el intervalo $\Delta t = t_1$ y A_2 el área barrida en el intervalo $\Delta t = t_2$, la Segunda Ley nos permite escribir la proporción

$$\frac{A_1}{t_1} = \frac{A2}{t_2}$$

Y por lo tanto el área barrida en el intervalo $\Delta t = t$, A(t), está dada por:

$$A(t) = \frac{A_1}{t_1} t$$

---

permite llegar a una expresión para la velocidad del cuerpo en cualquier punto de la elípse en función de la distancia al centro de fuerzas: $v^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}(2/r - 1/a)$.

[9] Si usaramos los conceptos de energía (E) y momento angular (L), la órbita queda unívocamente determinada por los valores de estas constantes del movimiento. Basta con dar la posición inicial y la velocidad inicial para calcular E *y* L. A partir de ellos se pueden calcular todos los parámetros de la órbita; ver por ejemplo referencia [4]. En nuestro enfoque (no newtoniano) recurrimos a dos observaciones para determinar la órbita. Quizá el lector se sienta algo decepcionado por esto, pues pensará que el mismo seguimiento ocular se puede hacer en todos los tiempos posteriores y de esa manera saber en dónde está el satélite en cada instante. Sin embargo defendemos nuestro planteo enfatizando que, como veremos a continuación, bastan estas dos observaciones para saber en qué lugar ubicar al satélite en cualquier instante de tiempo (esté o no por encima del horizonte).

Obviamente la cantidad $\frac{A_1}{t_1}$ es la velocidad areolar, la cual es constante e igual a $\frac{\pi ab}{T}$.Luego:

$$A(t) = \frac{\pi ab}{T} t \tag{7}$$

Dividamos al intervalo $[0,2\pi]$ en N partes iguales y sea $\theta_j = 2\pi j / N, j = 0..N.$

Denotemos por A_j al área barrida por el radio vector al moverse desde la posición $\theta = 0$ hasta $\theta = \theta_j$. Utilizando la expresión (7), concluímos que el satélite se encontrará en el tiempo

$$t_j = \frac{A_j T}{\pi\ ab}$$

en la posición correspondiente a las coordenadas $\theta_j\ y\ \ r_j = r(\theta_j)$. De esta manera es posible construir una tabla en donde se escriban los tiempos t_j y los valores (θ_j, r_j). El problema reside ahora en determinar las áreas A_j. Una vez más es el mismo Kepler quien se ocupará del asunto. En su *Stereometría Doliorum* desarrolló métodos para el cálculo de áreas y volúmenes de figuras y cuerpos irregulares.[10] Con los valores de *a* y *e* prefijados él debería haber calculado una tabla con los valores del área de cada uno de los sectores de elipse correspondientes a cada valor θ_j[11].

A continuación y a modo de ejemplo, aplicaremos los desarrollos previos al cálculo de la órbita del Satélite Molniya[12]. La órbita de un satélite artificial queda completamente determinada con los siguientes parámetros: apogeo, perigeo, período e inclinación de la órbita respecto del ecuador terrestre. Para nuestro ejemplo estos valores son:

---

[10] Aparentemente, Kepler se sintió atraído hacia el problema de cálculo de volúmenes al observar la impresición del método usado por los vendedores de vino al calcular el volumen de los barriles.

[11] Hoy sabemos que el área del sector de elípse comprendido entre 0 y θ_j está dado por $A(a,e,\theta_j) = \frac{a^2(1-e^2)^2}{2} \int_0^{\theta_j} \frac{dx}{(1+e\cos(x))^2}$. Esta es una integral elíptica y puede calcularse rápidamente con una computadora personal; usando por ejemplo un utilitario como el MA THCAD.

[12] Satélite de comunicaciones, equivalente ruso de los Intelsat estadounidenses.

• Apogeo: 46.500 km
• Perigeo: 7.000 km
• Período: 12 hs
• Inclinación de la órbita: 60°.

De estos valores resulta: $2a = apogeo + perigeo \Rightarrow a = 6.750\ Km$. Además $r_p = a(1-e) \Rightarrow e = 0.74$. Con estos valores podemos calcular las áreas *Aj*, los tiempos *tj* e y los correspondientes valores de θ_j y r_j ; en este caso tomamos *N=10:*

$A_j(x10^7\,Km^2)$	$t_j(hs.)$	θ_j	$r_j(x10^4\,Km)$
0.00	0.00	0.00	0.69
1.58	0.14	0.63	0.75
3.81	0.35	1,26	0.97
8.46	0.77	1.88	1.52
22.73	2.07	2.51	2.84
65.99	6.00	3.14	4.23
109.25	9.93	3.77	2.84
123.52	11.23	4.40	1.52
128.16	11.65	5.03	0.97
130.40	11.86	5.65	0.75
131.97	12.00	6.28	0.79

En este ejemplo hemos tomado partes del intervalo *[0,2π]* iguales; esto no tiene porque ser siempre así. Para finalizar, dejamos al lector (y a sus alumnos) la inquietud de desarrollar un algoritmo con el cual se pueda graficar sobre la pantalla del monitor de una computadora personal la posición del satélite en función del tiempo.

Bibliografía

1. The Feynman Lectures on Physics, R.P. Feynman, R. Leighton y M. Sands, Vol. I, Versión Bilingue, Fondo Educativo Interamericano, 1971.

2. Física (tomo I), R. Serway, Ed. McGRAW-HILL, 1993.

3. Kepler, A. Koestler, Biblioteca Salvat de Grandes Biografías, 1986.

4. Introducción al Estudio de la Mecánica, Materia y Ondas, U. Ingard y W. Kraushaar, Ed. Reverté, 1966.