DETERMINISMO, PREVISIBILIDADE E CAOS[1]

Femando Lang da Silveira
Instituto de Física da UFRGS
Instituto de Física e Pós-Graduação em Educação da PUCRS
Porto Alegre - RS

Resumo

O caos (a forte influência das condições iniciais sobre estadas futuros em sistemas deterministas) implica em que mesmo que a natureza seja completamente determinada - regida por leis estritamente deterministas como supunha Laplace - as previsões a longo prazo nem sempre são possíveis de serem realizadas de maneira unívoca. Comportamentos caóticos ocorrem também em sistemas regidos por leis simples, ou seja, comportamentos complexos podem acontecer em sistemas descritos matematicamente por equações simples. São apresentados alguns exemplos de tais comportamentos.

I. Determinismo e indeterminismo

A concepção *determinista* afirma que todos os acontecimentos do mundo são pré-estabelecidos ou que o futuro é fixo como o passado. Em oposição, a concepção *indeterminista* a diz que existem acontecimentos que não são pré-estabelecidos, ou ainda, que o futuro não é fixo (Popper, 1988).

Os defensores da primeira concepção admitem que mesmo que o futuro esteja determinado, pode nos ser incerto. **Certeza** ou **incerteza** é uma propriedade do nosso conhecimento sobre as coisas, uma propriedade **epistemológica.** *Determinismo* ou *indeterminismo* é uma propriedade do mundo, das coisas, uma propriedade **ontológica.**

Historicamente a concepção determinista é muito antiga, sendo encontrada, por exemplo, nos filósofos atomistas gregos; ela foi fortalecida pela Mecânica Newtoniana. A teoria de Newton possibilitou representar matematicamente a evolução temporal de inúmeros sistemas e, então, prever estados futuros ou retrodizer estados passados destes sistemas. As corroborações que a Mecânica Newtoniana teve - entre outras, na previsão do retorno do cometa de Halley (cientista contemporâneo a Newton que previu o retorno do cometa que leva o seu nome) -e também o sucesso de suas aplicações tecnológicas, influiram decisivamente para que a concepção determinista do mundo fosse fortalecida. Podemos encontrá-la expressa magnificamente pelo

[1] Versão modificada da palestras "Caos, determinismo e indeterminismo" proferida durante a "5ª reunião Latino-Americana sobre Educação em Física".

grande físico e matemático Pierre Simon de Laplace (1724-1827) em sua obra sobre probabilidades:

"Devemos considerar o estado presente do universo como efeito dos seus estados passados e como causa dos que se vão seguir. Suponha-se uma inteligência que pudesse conhecer todas as forças pelas quais a natureza é animada e o estado em um instante de todos os objetos - uma inteligência suficientemente grande que pudesse submeter todos esses dados à análise -, ela englobaria na mesma fórmula os movimentos dos maiores corpos do universo e também dos menores átomos: nada lhe seria incerto e o futuro, assim como o passado, estaria presente ante os seus olhos" (Laplace. 1990, p. 326).

A *"inteligência suficientemente grande"* referida nessa citação passou posteriormente a ser conhecida por **"demônio de Laplace"**.

O determinismo, como pressuposto científico, não ficou restrito apenas à Física; abrangia todas as ciências naturais até a segunda metade do século XIX. As ciências humanas ou sociais também sofreram a influência desta concepção. O **determinismo histórico** (concepção segundo a qual existem leis históricas que permitem fazer predições sobre o futuro da humanidade) comtiano e marxista são exemplos importantes da aplicação de tais pressupostos à História.

A concepção determinista - segundo a qual o futuro está completamente determinado pelo que aconteceu no passado - conflita com o nosso senso comum pois acreditamos que o futuro não está ainda completamente fixado; muitas de nossas ações presentes são tentativas de influenciar o futuro aberto (Popper, 1988). Pode ser que esta suposta abertura seja apenas uma ilusão, iludo que não ocorreria ao **"demônio laplaciano".**

II. A estrutura das previsões científicas

Na citação de Laplace vamos encontrar uma importante característica das previsões científicas: elas não dependem apenas do conhecimento das leis naturais; exigem também o conhecimento das condições do sistema em um dado instante.

A estrutura das previsões científicas envolve sempre **algum (ns)** **enunciados(s) universal (is)** - as chamadas **leis da natureza,** que na Mecânica Newtoniana são as leis de Newton - e **enunciados particulares** que definem as **condições específicas**, o estado do sistema em um dado instante; **dedutivamente** obtém-se um enunciado, também particular, que se constitui na previsão.

Exemplifiquemos com a previsão de que um bloco de gelo colocado sobre a mesa derreterá. Esta previsão, que decorre do senso comum das pessoas, ao ser realizada cientificamente poderia envolver os seguintes enunciados universais (leis da natureza):

- O ponto de fusão da água à pressão de 1 atm é 0º C.

- Se um corpo está à temperatura mais baixa do que as vizinhanças, ele absorve calor das vizinhanças.

-Um corpo que interage com as vizinhanças apenas absorvendo calor, tem a sua energia interna aumentada.

-O aumento da energia interna de um corpo está associada à elevação de temperatura e/ou a mudança do seu estado de agregação.

As condições específicas poderiam ser explicitadas pelos seguintes enunciados particulares:

-Um pedaço de gelo a -5º C foi colocado sobre a mesa.

-As vizinhanças deste pedaço estão à temperatura superior a 0ºC e assim permanecerão.

-A pressão a que está submetido o pedaço de gelo é 1 atm.

Dos enunciados universais (leis) e particulares (condições específicas) obtém-se dedutivamente a conclusão (previsão) que o pedaço de gelo derreterá. As previsões científicas são sempre **condicionais**, pois, enquanto as leis da natureza são, supostamente, **necessárias**, as condições específicas são *contingentes* (não-necessárias), podendo ser diferentes e de fato o sendo para outros sistemas regidos pelas mesmas leis naturais. Se as vizinhanças do pedaço de gelo estivessem a uma temperatura inferior a ºC ele poderia não fundir; poderia ainda assim fundir se a pressão fosse aumentada (o ponto de fusão da água diminui quando a pressão aumenta).

Nos chamados sistemas dinâmicos o tempo aparece como variável independente e o estado do sistema é caracterizado por um conjunto de grandezas (variáveis dependentes) que dele dependem. As regras através das quais se pode calcular as variáveis dependentes são ou decorrem das leis naturais que regem o sistema.

Modelando o sistema solar como um sistema isolado e constituído por corpos puntuais que interagem gravitacionalmente, as variáveis dependentes podem ser a posição e a quantidade de movimento de cada corpo. As regras através das quais se pode calcular as variáveis dependentes decorrem da Lei da Gravitação Universal e das três Leis de Newton. As condições específicas explicitariam o valor das variáveis dependentes em um dado momento.

III. Um mundo determinista

Suponhamos agora um mundo determinista regido por uma lei simples. Imaginemos uma partícula movimentando-se sempre com a mesma velocidade em módulo mas que se choca com paredes lisas e rígidas (limites deste mundo), alterando a orientação da velocidade de acordo com a Lei da Reflexão (ângulo de incidência igual ao ângulo de reflexão). Suponhamos também que este mundo seja uma caixa quadrada com lado 4, no centro da qual há uma circunferência com diâmetro 2. Uma partícula contida na caixa pode inicialmente estar em qualquer ponto entre as paredes quadradas e a parede circunferencial, movimentando-se em qualquer direção do plano que contém as paredes (vide Fig. I).

Especificada uma posição inicial e a orientação da velocidade inicial podemos calcular o local da primeira colisão; a Lei da Reflexão permite calcular a direção da velocidade após a primeira colisão. Repetindo o mesmo raciocínio, podemos depois calcular o local da segunda colisão e a direção da velocidade em seguida e assim por diante. Desta forma estamos habilitados, em princípio, a calcular a posição da partícula ao se chocar com as paredes pela enésima vez, ou, a calcular a posição e a orientação da velocidade da partícula em qualquer instante futuro. Este é um mundo determinista regido por uma única lei extremamente simples, a

Lei da Reflexão, que combinada com as condições específicas determina univocamente os estados futuros (posição e direção da velocidade da partícula em qualquer instante subseqüente) da partícula. O "demônio de Laplace" para este mundo pode ser personificado por um sujeito que conhece um pouco de geometria (não precisa ser muito), a Lei da Reflexão e as condições iniciais.

IV. A previsibilidade no mundo determinista

Parece que no mundo determinista da Fig. 1 o ideal laplaciano de previsão é

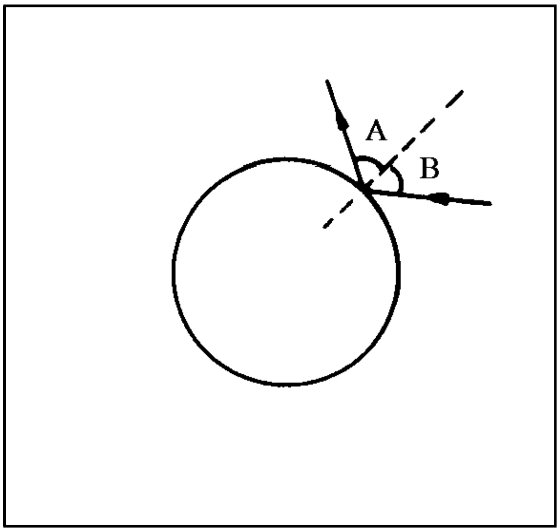

Fig. 1 - Um mundo determinista regido pela Lei da Reflexão ($\hat{A} = \hat{B}$).

concretizável. Entretanto podemos nos perguntar como ficam as previsões se as condições iniciais são conhecidas de maneira imprecisa. A questão é relevante para qualquer sistema determinista no qual as condições iniciais são grandezas que podem assumir valores contínuos (isto é o que acontece usualmente em sistemas dinâmicos regidos pelas Leis de Newton mas não apenas nestes). Colocando a questão de outra forma, como repercute na previsão dos estados futuros do sistema uma imprecisão, uma incerteza nas condições iniciais?

Durante muito tempo a resposta tácita a essa questão parece ter sido a seguinte: **uma imprecisão ou incerteza no conhecimento do estado inicial não impossibilita a previsão do estado final, acarretando apenas que o estado final seja conhecido de maneira aproximada.** Raciocinou certamente Laplace sobre esse pressuposto quando abordou o problema da estabilidade do sistema solar; pretendeu ele ter demonstrado que o sistema solar é estável, ou seja, que os planetas continuariam a manter para sempre as atuais distâncias médias ao Solar problema da estabilidade do sistema solar já havia sido formulado anteriormente; Newton pensava que ele fosse instável, a ponto de que Deus devesse intervir para manter a ordem (Verdet, 1991); os cartesianos discordaram de Newton, argumentando que Ele, infinitamente perfeito, teria criado o universo sem necessidade de ter que intervir posteriormente.

Vejamos como se comporta a suposição de que uma imprecisão inicial não impossibilita a previsão para o caso específico da trajetória de uma partícula no mundo da Fig. 1.

Para tanto vamos calcular duas trajetórias que iniciam exatamente no mesmo ponto, possuindo uma pequena diferença nas direções das velocidades iniciais. Elejemos um sistema de referência com a origem no centro da caixa e eixos paralelos aos seus lados. A posição inicial, arbitrariamente escolhida, é X = +1,800 e Y = +0,530; as direções iniciais diferem por cerca de 1/2 grau apenas, sendo as declividades das velocidades iniciais -0,200 e -0,190. A Tabela 1 apresenta as coordenadas dos pontos de colisão da partícula com as paredes da caixa (essas coordenadas foram calculadas com auxílio de um software criado pelo autor deste trabalho; os cálculos foram executados com muitos algarismos significativos mas os resultados da Tabela 1 são apresentados com apenas três ou quatro por serem suficientes aos objetivos deste trabalho).

TABELA 1 - Duas trajetórias inicialmente semelhantes no mundo determinista regido pela Lei da Reflexão.

DECLIVE INICIAL	-0,200	-0,190
COORDENADAS INICIAIS	(1,800; +0,530)	(+1,800; +0,530)
	COORDENADAS DO PONTO DE COLISÃO	
1ª colisão	(1,800; +0,760)	(+0,667; +0,745)
2ª colisão	(+0,193; +2,000)	(+0,280; +0,200)
3ª colisão	(-0,182; +0,983)	(-0,028; +0,999)
4ª colisão	(-1,074; +2,000)	(-0,400; +2,000)
5ª colisão	(-2,000; +0,944)	(-1,887; -2,000)
6ª colisão	(-0,974; -0,266)	(-2,000; -1,697)
7ª colisão	(-1,454; -2,000)	(-0,626; +2,000)
8ª colisão	(-2,000; +0,017)	(-0,243; +0,970)

A Fig. 2 apresenta as duas trajetórias calculadas até a sexta colisão.

A Fig. 2 mostra que as duas trajetórias se afastam rapidamente e após algumas colisões são totalmente diferentes. A Tabela 1 nos permite observar o que ocorre até a oitava colisão.

A Fig. 3 apresenta duas trajetórias para as mesmas condições iniciais da Fig. 2 em uma caixa sem a parede circunferencial, até depois da décima colisão com as paredes. Constata-se que as duas trajetórias agora se afastam lentamente.

A diferença inicial entre as duas trajetórias, na caixa com a parede circunferencial, é rapidamente amplificada; na outra caixa a diferença inicial também cresce com o passar do tempo mas muito mais lentamente. Por mais próximas que sejam duas trajetórias inicialmente, haverá a partir de um certo instante futuro uma diferença muito grande entre elas. Esse resultado implica que qualquer imprecisão inicial levará, a partir de um certo instante futuro, a urna imprecisão tão grande que não mais poderemos prever de maneira **unívoca** onde a partícula se encontrará.

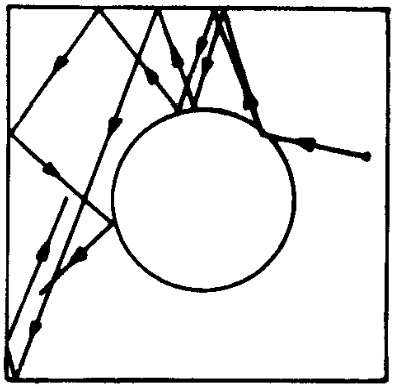

Fig. 2 - Duas trajetórias inicialmente semelhantes no mundo determinista regido pela Lei da Reflexão.

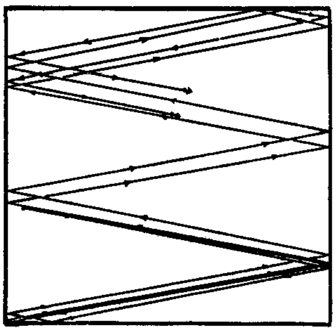

Fig. 3 - Duas trajetórias inicialmente semelhantes na caixa sem a parede circunferencial.

V. O caos determinista

O rápido crescimento da pequena diferença inicial entre duas trajetórias não é uma propriedade exclusiva do mundo determinista da Fig. 2. Ele pode ocorrer em muitos sistemas deterministas Quando um sistema determinista - isto é, um sistema regido por leis que permitem determinar univocamente os valores das variáveis que o caracterizam (essas variáveis não são necessariamente posições no espaço comum, mas podem ser variáveis que caracterizam estados possíveis em um espaço abstrato, o **espaço de fase**) partindo-se dos valores dessas mesmas variáveis anteriormente - ocorre que trajetórias próximas se afastam rapidamente ao passar o tempo (se afastam de maneira exponencial com o tempo (Prigogine e Stenger, 1990)), então este sistema tem comportamento **caótico.** Em outras palavras, **o caos determinista é a forte influência das condições iniciais sobre estados futuros em sistemas deterministas.** Em sistemas com tal comportamento uma pequena mudança das condições iniciais repercutirá, a partir de um certo instante futuro, em uma grande alteração do estado final.

O **caos determinista** pode ocorrer em sistemas regidos por leis não-lineares, podendo elas serem equações diferenciais ou equações de diferença finita O segundo caso está exemplificado pelo mundo determinista da Fig. 2, sendo a parede circunferencial responsável por introduzir um termo não-linear nas equações que regem esse sistema; sem a parede circunferencial as trajetórias se afastam de maneira não-exponencial com o tempo, ou seja, o sistema é regular, **não-caótico**. É importante enfatizar que o **caos** pode acontecer em sistemas regidos por leis simples; comportamentos complexos e imprevisíveis podem emergir em tais sistemas. Isto permite conjecturar que certos fenômenos naturais extremamente complexos - por exemplo, turbulência em fluidos, agregação cristalina, formas litorâneas geográficas -talvez sejam regidos por leis simples. Vejamos mais um exemplo da ocorrência de caos. Ele tem a ver com o comportamento de populações estudado por biólogos e ecólogos. Uma equação às vezes utilizada para prever os tamanhos futuros de uma população é a equação da diferença logística (May, 1991):

$$X_{i+1} = K.X_i(1 - X_i)$$

Ou:

$$X_{i+1} = K.X_i - KX_i^2$$

X_i é o tamanho da população em um certo instante X_{i+1}, é o tamanho da população após um certo período de tempo; pode ser, por exemplo, o tempo de um ciclo de reprodução. O tamanho da população é padronizado de tal forma que o tamanho máximo possível seja igual a um e o tamanho mínimo, que corresponde à extinção, seja zero A constante K é denominada parâmetro de crescimento, sendo um número real compreendido no intervalo fechado de zero a quatro. O termo linear desta equação representa a tendência que a população tem para aumentar; o termo não-linear (quadrático) representa a tendência contrária, tanto mais importante quanto maior for o tamanho da população.

Se o tamanho de uma população for regido por esta equação estamos habilitados a calcular tamanhos futuros, desde que conheçamos o tamanho inicial e o parâmetro de crescimento. Exemplifiquemos com uma população com tamanho inicial $X_o = 0{,}700$ e parâmetro de crescimento $k = 2{,}500$. O tamanho subseqüente da população será X_1=2,500 . 0, 700. (1-0, 700), ou seja, X_1=0,525. Depois calcularemos o próximo tamanho utilizando o valor encontrado na primeira iteração: X_2= 2,500.0,525.(1-0,525) = 0,623. Cada nova iteração produzirá o tamanho subseqüente, possibilitando desta forma se fazer previsões para qualquer tempo futuro.

O leitor poderá verificar facilmente que para K menor ou igual a um a população tenderá à extinção. Para K entre um e três a população tende para um tamanho igual a 1-1/K. Quando K é igual ou maior do que três começam a acontecer comportamentos estranhos. Por exemplo, para K igual a 3,100 e X_o igual a 0,700 obtemos a seguinte série de valores: 0,651, 0,704, 0646, 0,709, 0,639, 0,715, ..., 0623, 0,728, ., 0,614, 0,735, .., 0,558, 0,765, ..Percebe-se que o tamanho oscila entre dois valores. Aumentando-se mais ainda o parâmetro de crescimento, a população passará a oscilar entre quatro valores, depois entre oito valores e assim por diante. Quando o parâmetro de crescimento é próximo a quatro ocorre o **caos**. A Tabela 2 apresenta os tamanhos calculados para duas populações com o mesmo parâmetro de crescimento -K = 3,800 - mas com uma pequena diferença no tamanho inicial.

Tabela 2 - Tamanho de duas populações calculado através da equação da diferença logística com parâmetro de crescimento igual a 3,800.

	TAMANHO DA POPULAÇÃO	
ITERAÇÃO	INICIAL: 0,7000	INICIAL: 0,6999
1ª	0,7980	0,7982
2ª	0,6125	0,6122
3ª	0,9019	0,9022
4ª	0,3363	0,3354
5ª	0,8482	0,8471
10ª	0,9336	0,9345
16ª	0,2241	0,2004
17ª	0,6608	0,6089
19ª	0,4799	0,3269
20ª	0,9485	0,8361
22ª	0,5747	0,948
24ª	0,2514	0,5754
26ª	0,7741	0,2525
28ª	0,6645	0,7705

Observamos na Tabela 2 que os tamanhos das duas populações, muito parecidos inicialmente (diferença inicial no quarto algarismo significativo), tornam-se a cada nova iteração mais distanciados. Em menos de vinte iterações as duas populações são diferentes no primeiro algarismo significativo. Decorre daí que para uma pequena diferença inicial, haverá no futuro uma imprecisão tão grande que uma previsão unívoca não será mais possível.

O comportamento da equação da diferença logística pode ser descrito em um gráfico, (Vide Fig. 4) no qual o eixo horizontal representa o parâmetro de crescimento (K) e o eixo vertical o tamanho da população após um grande número de iterações (X_∞).

O gráfico é uma reta contida no eixo dos **K** para **K** entre zero e um, mostrando que a população se extingue, a longo prazo, quando o parâmetro de crescimento é menor ou igual a um. Em seguida é urna curva crescente até **K** igual a três, mostrando que a população se estabiliza em um valor bem definido a longo prazo. Depois de **K** igual a três aparece um bifurcação, isto é, a longo prazo a população oscilará periodicamente entre dois valores (período dois). Aumentando mais ainda o parâmetro de crescimento ocorrem novas bifurcações, ou seja, a população passará a oscilar entre quatro valores (período quatro), depois entre oito valores (período oito), dezesseis (período dezesseis),... Finalmente quando **K=3,57** o comportamento não é regular ou periódico mas sim **caótico**. Desta forma fica caracterizada uma **rota para o caos** por duplicação de período, que não é propriedade exclusiva da equação da diferença logística mas que ocorre em outros sistemas regidos por equações não-lineares.

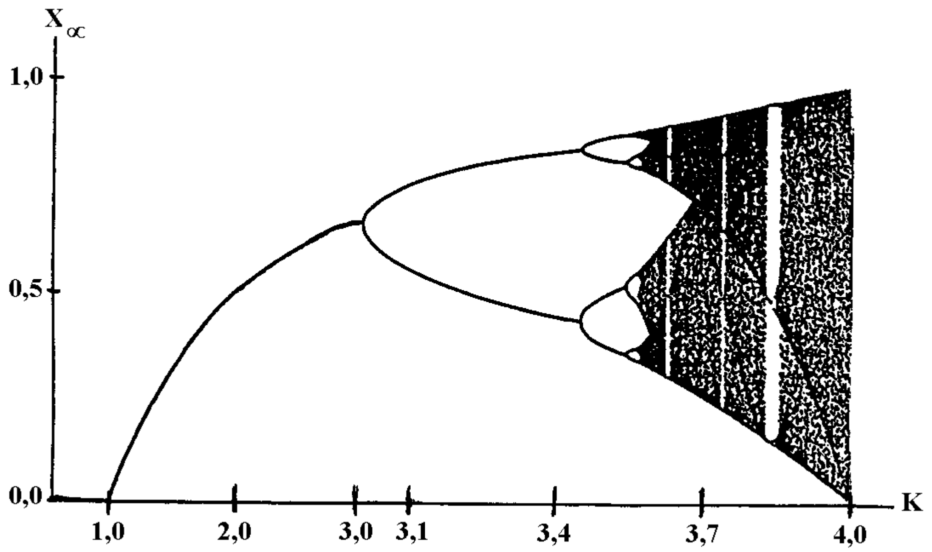

Fig. 4 - Gráfico do tamanho da população (X∞), após um grande número de iterações, em função do parâmetro de crescimento (K).

É importante ainda notar que sistemas deterministas regidos por equações não-lineares -como por exemplo a equação da diferença logística -podem apresentar comportamento caótico ou regular, dependendo do(s) valor(es) de certo(s) parâmetro(s). Conforme notado anteriormente, o caos é encontrado na equação da diferença logística para parâmetros de crescimento elevados, próximos a quatro; se assim não for, o comportamento será regular, não-caótico.

VI. O fim do sonho de Laplace

Os exemplos anteriores demonstram que em certos sistemas deterministas - os sistemas com comportamento **caótico** - previsões depois de algum tempo tomam-se impossíveis de serem realizadas **univocamente:** após esse tempo, que dependerá do sistema e da imprecisão no conhecimento das condições iniciais, já não é mais possível prevermos a trajetória do sistema. A pequena imprecisão inicial, por menor que seja, acarretará que o futuro nos seja **incerto** apesar de **determinado**, apresentando-se ao nosso conhecimento com muitas possibilidades. O pressuposto tácito acerca da previsibilidade unívoca em tais sistemas não mais pode ser sustentado Remonta a segunda metade do século XIX a percepção por parte de alguns cientistas que tal poderia acontecer (Thuillier, 1991; Moreira, 1992); pode-se apontar Maxwell, Poincaré e Hadamard como os primeiros a chamarem atenção para a forte dependência das condições iniciais -denominada recentemente de **caos** - presente em alguns sistemas deterministas. Citamos Henri Poincaré (1854-1912), ao tratar da previsibilidade, como exemplo:

"Se conhecêssemos perfeitamente as leis da natureza e a situação do universo no instante inicial, estaríamos aptos a predizer a situação do mesmo universo em um instante subseqüente. Mas mesmo quando as leis da natureza não são um segredo para nós, podemos conhecer a situação inicial apenas aproximadamente. Se tal nos permitisse prever a situação subseqüente com o mesmo grau de aproximação, isto seria tudo o que desejaríamos e diríamos que o fenômeno foi previsto, que ele é regido par leis. Mas não é sempre assim; pode acontecer que pequenas diferenças na situação inicial produzam grandes diferenças nos fenômenos finais; um erro antecedente pode produzir um erro enorme depois. A predição se torna impossível e temos um fenômeno fortuito" (Poincaré, 1990, p307).

Os sistemas regidos por equações não-lineares, candidatos a apresentarem comportamento caótico, começaram a ser estudados com detalhe após a segunda metade do século XX com o advento dos grandes computadores (Gleick, 1990). Hoje já sabemos que em muitos desses sistemas efetivamente ocorrem tais comportamentos.

Uma lição importante que podemos tirar do **caos determinista** é que mesmo que a natureza seja completamente determinada - regida por leis estritamente deterministas, conforme expresso por Laplace na célebre citação apresentada no inicio deste trabalho - o futuro ainda poderá se apresentar, até para aquele que detém o conhecimento das leis naturais, cheio de possibilidades. O **caos** não se constitui em um argumento contra o **determinismo** mas mostra que a **previsibilidade**, como sonhada por Laplace, não é sempre concretizável. Argumentos contra o determinismo, oriundos da Física, encontraremos principalmente na Mecânica Quântica. Na Biologia, ainda no século XIX, encontra-se o primeiro grande ataque ao determinismo através da teoria evolucionista de Darwin, na qual o acaso desempenha um papel de capital importância. Entretanto tais argumentos fogem do escopo deste trabalho.

VII. Agradecimentos

Agradeço aos árbitros do CCEF pelas sugestões que possibilitaram o aprimoramento deste trabalho.

Referências

GLEICK, J. Caos: a criação de uma nova ciência. Rio de Janeiro: Campus, 1990.

LAPLACE, P.S. Probability. In: HUTCHINS, M.A., ADLER, M.J., FADIMAN, C. Gateway to the great books. - Mathematics. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1990.

MAY, R.M. Le chaos en biologie. La Recherche, V. 232, n.21, p.588-598, 1991.

MOREIRA, I.C. Os primórdios do caos determinístico. Ciência Hoje, V. 14, n.80, p.10-16, 1992.

POINCARÉ, H. Chance. In: HUTCHINS, M.A, ADLER, MJ., FADIMAN, C. Gatewav to the great books. Chicago: Encyclopaedia Britannica, 1990.

POPPER, K.R. O universo aberto - Argumentos a favor do indeterminismo. Lisboa D. Quixote, 1988.

PRIGOGINE, I., STENGERS, I. Entre o tempo e a eternidade. Lisboa: Gradiva, 1990.

THUILLIER, P. La revanche du dieu chaos. La Recherche, V.232, n.21, p.542-552, 1991.

VERDET, J.P. Uma história da astronomia. Rio de Janeiro: Zahar, 1991.