

*Wilson Lopes*  
Universidade de Guarulhos  
Universidade de Mogi das Cruzes  
São Paulo – SP

## **I. Introdução**

Uma bola, de ótima elasticidade, cai, verticalmente, de uma altura  $h$  sobre um piso horizontal e fica pulando até parar. Medindo-se o intervalo de tempo em que ela permanece pulando, pode-se determinar o coeficiente de restauração (ou restituição) entre a bola e o piso.

## **II. Interação entre a bola e o piso**

A bola leva um tempo  $t$  para cair de uma altura  $h$ , dado por:

$$t = (2h / g)^{1/2}, \quad (1)$$

no qual  $g$  representa a aceleração da gravidade no local de experiência (assumimos  $g = 9,8 \text{ m/s}^2$ ). Para as demais alturas,  $h_1, h_2, \dots$ , como se pode ver pelo gráfico da Fig.1, as equações para os intervalos de tempo  $t_1, t_2, \dots$  são semelhantes à equação (1), a saber:

$$\begin{aligned} t_1 &= (2h_1 / g)^{1/2}, \\ t_2 &= (2h_2 / g)^{1/2}, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (2)$$

O intervalo de tempo em que a bola permanece pulando é dado por:

$$T = t + 2(t_1 + t_2 + \dots). \quad (3)$$

Quando a bola cai de uma altura  $h$ , sua velocidade, ao atingir o piso, é dada por:  $v = -(2gh)^{1/2}$ ; rebota com velocidade  $v_1 = (2gh_1)^{1/2}$ , na qual  $h_1$  é a nova altura atingida; cai da altura  $h_1$  e atinge o solo com velocidade  $v_1 = -(2gh_1)^{1/2}$ ; rebota com

velocidade  $v_2 = (2gh_2)^{1/2}$ ; e assim por diante. Pela definição de coeficiente de restauração, tem-se:

$$\begin{aligned}
 e &= -(v_1 / v) = -(v_2 / v_1) = \dots \\
 &= (h_1 / h)^{1/2} = (h_2 / h_1)^{1/2} = \dots
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

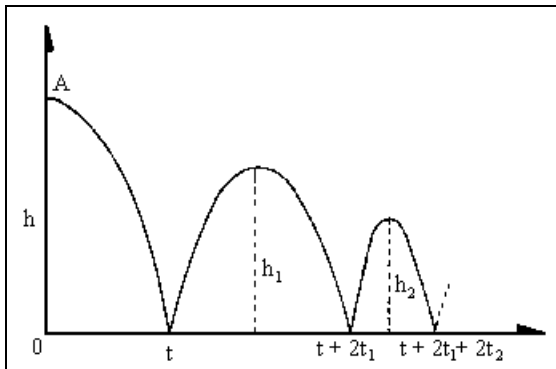


Fig.1- O gráfico mostra a bola sendo abandonada do ponto A, no instante  $t = 0$ , de uma altura  $h$ .

Admite-se, escrevendo-se a equação (4), que o coeficiente de restauração, entre a bola e o piso, permaneça constante, em todos os pulos realizados pela bola.

Da equação (4), pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
 h_1 &= e^2 h, \\
 h_2 &= e^2 h_1 = e^4 h, \text{ etc.}
 \end{aligned}
 \tag{5}$$

Substituindo-se as alturas  $h_1, h_2, \dots$ , obtidas em (5), nas respectivas equações dos intervalos de tempo, dados por (2), e substituindo-se esses resultados em (3), tem-se:

$$\begin{aligned}
 T &= (2h/g)^{1/2} + 2[e(2h/g)^{1/2} + e^2(2h/g)^{1/2} + \dots] \\
 &= (2h/g)^{1/2} [1 + 2(e + e^2 + \dots)].
 \end{aligned}
 \tag{6}$$

Como a bola, do ponto de vista matemático, efetua infinitos pulos até parar, a série, que representa uma progressão geométrica, decrescente e de razão  $e$ , tem infinitos termos. (O coeficiente de restauração pertence ao seguinte intervalo:  $0 < e < 1$ . Para um

choque perfeitamente elástico,  $e = 1$ ; para um choque perfeitamente inelástico,  $e = 0$ .) Assim,  $e + e^2 + \dots = e/(1 - e)$ . Substituindo-se em (6), obtém-se:

$$T = (2h/g)^{1/2} \{1 + 2[e/(1 - e)]\}$$

$$= (2h/g)^{1/2} [(1 + e)/(1 - e)]. \quad (7)$$

Finalmente, resolvendo-se a (7) em  $e$ , vem:

$$e = [T - (2h/g)^{1/2}] / [T + (2h/g)^{1/2}], \quad (8)$$

que fornece o coeficiente de restauração entre a bola e o piso do laboratório.

### III. Parte experimental e conclusões

Foram usados na experiência um cronômetro de décimos de segundo, uma trena de dois metros de comprimento e uma bola maciça, de origem japonesa, em torno de 4,0 cm de diâmetro e de muita boa elasticidade (para se fazer idéia, quando abandonada de 1,0 m de altura, rebotava a 0,85 m, aproximadamente, ou, então, permanecia pulando cerca de 9,0 s).

Nossos alunos, na Universidade de Guarulhos, ao realizarem esta experiência, encontravam alguma dificuldade em determinar o exato momento em que a bola deixava de pular. Daí, então, a escolha de uma bola de coeficiente de restauração com o piso, de, aproximadamente, 0,91. Com esse coeficiente de restauração, o intervalo de tempo em que a bola permanecia pulando era relativamente longo e a indecisão, citada acima, deixava de ser importante. Por outro lado, poder-se-ia dilatar o intervalo de tempo  $T$ , aumentando-se  $h$ . Porém, isto causava, na maioria das vezes, alguns transtornos: por irregularidades do piso do laboratório, e mesmo da bola, ela deixava de pular na direção vertical, chocando-se com bancadas, bancos, paredes, etc. Desta maneira, foram sugeridas as alturas indicadas na tabela 1, das quais os alunos mediam os correspondentes intervalos de tempo em que a bola permanecia pulando, e, com o auxílio da equação (8), calculavam o coeficiente de restauração entre a bola e o piso do laboratório.

Tabela 1

$h_i$ (m)	$T_i$ (s)	$e_i$
0,50		
0,60		
0,70		

---

0,80  
0,90  
1,00

---

Completando a tabela, nossos alunos deveriam responder às seguintes perguntas:

a) Qual é o valor médio do coeficiente de restauração entre a bola e o piso do laboratório?

$$\bar{e} = \sum_i e_i / 6$$
$$= \boxed{\phantom{000}}$$

b) Qual é o valor do desvio padrão, em relação ao valor médio, do coeficiente de restauração?

$$\sigma = \left\{ \sum_i (e_i - \bar{e})^2 / [n(n-1)] \right\}^{1/2}$$
$$= \left[ \sum_i (e_i - \bar{e})^2 / 30 \right]^{1/2}$$
$$= \boxed{\phantom{000}}$$

c) Qual é o valor do coeficiente de restauração, afetado de seu respectivo desvio padrão?

$$e = e \pm \sigma$$
$$= \boxed{\phantom{00} \pm \phantom{00}}$$

#### IV. Referências bibliográficas

1. MESHCHERSKY, I. V. **Collection of problems in theoretical mechanics**. p. 210. prob. 690.
2. BOAS, M. L. **Mathematical methods in the physical sciences**. John Wiley & Sons, 1966. p. 3.
3. WHITTLE, R. M.; YARWOOD, J. **Experimental physics for students**. London: Chapman e Hall, 1973. p. 4.