

Justificativas para o sucesso da Matemática na descrição da natureza como demanda epistêmica no ensino de Física⁺*

Arthur Couto Rosa Dutra de Oliveira¹

Licenciando em Ciências Exatas – Universidade de São Paulo

Cibelle Celestino Silva¹

Instituto de Física de São Carlos – Universidade de São Paulo

São Carlos – SP

Resumo

O ensino de física necessariamente envolve o ensino de matemática e de relações entre as duas disciplinas; relações essas que são de ordem instrumental, epistemológica, social e cultural. A falta de compreensão por parte dos estudantes sobre questões epistemológicas envolvendo a física e sua relação com a matemática se configura como uma demanda epistêmica. No presente trabalho examinamos algumas justificativas para o sucesso do uso da matemática na física por graduandos de cursos de ciências exatas. A metodologia utilizada envolveu o desenvolvimento, aplicação e análise de um questionário para investigar as visões dos graduandos com relação à efetividade da matemática na física. Noventa e dois estudantes de cursos de bacharelado e licenciatura responderam ao questionário, o que permitiu construir uma categorização das visões epistemológicas dos estudantes. Constatamos que os cursos analisados pouco contribuem para o refinamento da compreensão de aspectos epistemológicos dos estudantes acerca da questão investigada; e que os graduandos gostariam que questões de filosofia da ciência fossem incorporadas nos currículos de seus cursos.

Palavras-chave: *Ensino de Física; Matematização da Física; Ensino Superior; Epistemologia.*

⁺ Justifications for the success of Mathematics in the description of nature as an epistemic demand on Physics teaching

^{*} *Recebido: 23 de março de 2021.*

Aceito: 26 de outubro de 2021.

¹ E-mails: arthurcrdo@protonmail.com; cibelle@ifsc.usp.br

Abstract

Physics education necessarily involves teaching mathematics and the relationship between both subjects. This relationship is of instrumental, epistemological, social and cultural nature. Lack of comprehension by students of epistemological questions about physics and its relationship with mathematics is an epistemic demand. This article examines some of the justifications for the use and success of mathematics in physics among undergraduate students. The methodology involved the development, application, and analysis of a questionnaire to investigate undergraduate students' views concerning the effectiveness of mathematics in physics. Ninety-two undergraduate science courses students answered the questionnaire, which allowed us to categorize their epistemological conceptions. We found that the analyzed courses contribute little to fostering the students' epistemological understanding of some of the relations between physics and mathematics. The students would like to have more content of philosophy of science in the curricula of their courses.

Keywords: *Physics Education; Mathematization of Physics; Higher Education; Epistemology.*

I. Introdução

Ao longo da história, as maneiras de construir conhecimento sobre o mundo físico sofreram mudanças profundas, de forma que, nos dias de hoje, o uso extensivo da matemática e de técnicas dela derivadas nas teorias e análises são elementos intrínsecos da física. O processo de matematização da física não foi linear e tampouco livre de embates de natureza epistemológica e social.

No presente texto, quando nos referimos à matematização, estamos falando do processo assim descrito:

A tese da matematização significa, acima de tudo, a transformação de conceitos e métodos, especialmente os que dizem respeito à natureza da matéria, do espaço e do tempo, pela introdução de técnicas e ideias matemáticas (ou geométricas) (GORHAM et al., 2016, p. 1).

Como resultado do processo de matematização, a matemática assumiu um papel estrutural na física, um papel inclusive de fonte de descoberta e descrição de entes físicos (PATY, 2003). Entretanto, essa ampliação do papel da matemática não foi isenta de controvérsias. Particularmente entre os séculos XVI e XVII, houve vários debates de ordem

epistemológica e social na comunidade científica acerca das justificativas para a utilização e sucesso da matemática na mecânica (GINGRAS, 2001; FERREIRA; SILVA, 2020). Entre os séculos XIX e XX, principalmente nos estudos da eletrodinâmica, também ocorreram críticas ao excessivo caráter abstrato e supostamente descolado da realidade imediata que as teorias foram paulatinamente adquirindo (BACHELARD *et al.*, 1996; WIGNER, 1960; SILVA, 2002).

Concepções epistemológicas de estudantes podem prejudicar o seu aprendizado (MILLAR *et al.*, 1994; RYDER; LEACH, 1999; SINS *et al.*, 2009; LISING; ELBY, 2005), inclusive concepções acerca das relações entre a física e a matemática. Portanto, é relevante para a área de ensino de física aprofundar as reflexões sobre como as justificativas da utilização e do sucesso da matemática poderiam impactar o aprendizado da própria física. Neste trabalho temos como objetivo contribuir para o aprofundamento das reflexões sobre o tema trazendo um levantamento das visões epistemológicas entre graduandos sobre ele. Para isso, apresentamos algumas das visões sobre o tema presentes na literatura; elaboramos e aplicamos um questionário categorizando o que os estudantes de cursos de ciências exatas da Universidade de São Paulo entendem como motivos para o sucesso da utilização da matemática na física. Além disso, investigamos se os cursos influenciam a evolução de tais concepções ao longo da graduação.

II. Matematização da natureza

O processo de matematização dos estudos dos fenômenos que hoje estão catalogados sob o rótulo “física” desenvolveu-se em épocas distintas, acompanhando o florescimento e amadurecimento das subáreas, de forma que, em algumas áreas do conhecimento, a presença de elementos matemáticos seja muito mais antiga que em outras. Na Grécia antiga, por exemplo, Aristóteles considerava a ótica, harmônica e astronomia como disciplinas distintas das demais, tendo sido, posteriormente, chamadas por Tomas de Aquino de ciências intermediárias, pois, embora tratassem de aspectos do mundo natural, o faziam utilizando princípios matemáticos (NASCIMENTO, 2011; GORHAM *et al.*, 2016). Neste trabalho, focamos no processo de matematização que ocorreu a partir do século XVII, em especial sobre seus efeitos na mecânica².

Nesse período é possível observar um importante processo no qual o conceito de grandezas físicas se transforma, gradativamente, de algo qualitativo para algo quantitativo (PATY, 2003). Um dos autores envolvidos no processo de matematização dos estudos do movimento foi Galileu Galilei (1564-1642). A análise do físico florentino se concentra em como ocorre o movimento e não em por que ele ocorre (KLINE, 2012); com isso Galileu abandona as abordagens qualitativas que entendiam o movimento e o repouso como estados ontologicamente opostos e elabora uma descrição matemática e quantitativa do movimento.

² Para um estudo mais detalhado sobre esse processo ver (FERREIRA; SILVA, 2020).

Burt (2003) descreve o método de análise utilizado por Galileu em 3 etapas: “intuição” ou “resolução”, que consiste na abstração da situação física em uma estrutura matemática; “demonstração”, na qual ocorrem demonstrações feitas sobre a abstração matemática; e “experimentação”, que consiste em verificar experimentalmente as deduções obtidas. A incorporação da etapa da “demonstração” foi um grande passo no processo de matematização da mecânica³.

Outro marco importante no caminho da matematização da mecânica foi a publicação de “*Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*”, em 1687, por Isaac Newton (1643-1727). Partindo de um mesmo conjunto de hipóteses físicas, o inglês descreve tanto a queda livre quanto as órbitas dos planetas utilizando a linguagem geométrica⁴. Do ponto de vista do processo de matematização, o historiador da ciência holandês Eduard Jan Dijksterhuis (1991) também destaca a importância de a força gravitacional ser considerada uma ação à distância entre corpos, não permitindo uma “imagem visual” ou intuitiva da interação, e sendo tratada não como uma explicação mecanicista do fenômeno, mas como uma ferramenta matemática simples e útil.

Gingras (2001) defende que o sucesso do trabalho de Newton, do ponto de vista de suas previsões experimentais, contribuiu para que os elementos de matematização incorporados em sua mecânica fossem naturalizados pela comunidade científica. Entretanto, o autor ressalta que o fato de a mecânica newtoniana ser bastante precisa e estar de acordo com resultados experimentais conhecidos e outros novos para a época não foi fator suficiente para que ela fosse aceita pela comunidade científica, havendo críticas bastante consistentes à nova abordagem. O cartesiano Privat de Molières (1676-1742) foi um dos principais defensores de uma teoria gravitacional puramente mecânica, na qual pequenos vórtices substituem as interações à distância postuladas por Newton. Para Molières, a precisão oferecida por Newton não era motivo para defender uma física que o autor acreditava ser demasiadamente abstrata. Em um ensaio para a Academia de Paris, ele escreveu:

Ocorre que, somente de forma aproximada, os pontos dos vórtices apresentarão essa força que depende do quadrado da distância [...] mas isso simplesmente estaria mais de acordo com as observações astronômicas. Portanto as forças mecânicas dos vórtices nos dão mais precisamente as leis astronômicas como elas

³ Quando destacamos as contribuições de Galileu e Newton como tendo um papel importante no processo de matematização, não estamos dizendo que a obra ou o autor foram os únicos responsáveis por fazer avançar o nível de matematização, nem que esse avanço se deve à genialidade de alguns poucos indivíduos. Os avanços da matematização, como todo conhecimento humano, foram histórica e coletivamente produzidos. As obras citadas servem de marco, mas em todos os casos existem trabalhos anteriores com uma abordagem similar. Ver (TRUESDELL, 2012) para exemplos na mecânica.

⁴ Nos *Principia* Newton utilizou geometria plana e cônica, embora em suas deduções ideias de infinitésimos estejam presentes. O uso do cálculo infinitesimal só passou a ser amplamente usado em mecânica ao longo da primeira metade do século 18 (GUICCIARDINI, 1988). Émilie du Châtelet fez a primeira tradução completa dos três livros dos *Principia* para o francês, incluindo uma seção de comentários, onde fundiu os três livros em um resumo de fácil compreensão para os estudiosos da época. Ela incluiu uma seção analítica onde aplicou o novo cálculo a alguns problemas discutidos por Newton em seu livro (ZINSSER, 2001).

são de fato que as forças puramente metafísicas de Newton, que conseguem as leis com excessiva precisão geométrica (MOLIÈRES, 1733 apud GINGRAS, 2001, p. 6).

A citação acima exemplifica como a matematização da física não foi algo incontestado simplesmente pelo seu sucesso, sendo necessário também haver justificativas epistemológicas. Gingras (2001) mostra que, de fato, houve um trabalho de convencimento por parte dos físicos favoráveis à matematização. O autor também argumenta que, com o passar do tempo, a aceitação do trabalho de Newton se tornou tão ampla que contribuiu para que, durante os séculos XVIII e XIX, surgissem trabalhos em outras áreas da física com técnicas de matematização similares às utilizadas pelo físico inglês. Entre estes, os trabalhos de Joseph Fourier (1768-1830), na termodinâmica, e James Maxwell (1831-1879), no eletromagnetismo, incorporaram a abordagem quantitativa e a argumentação lógico-dedutiva newtonianas em suas respectivas áreas (SILVA, 2002).

Gingras (2001) aponta que a matematização do eletromagnetismo teve também críticos como, por exemplo, Michael Faraday (1791-1867). Ele criticava os avanços da matematização ao defender que a ciência deveria manter-se acessível para o público geral, não apenas aos especialistas que dominavam a linguagem matemática. Para além dos críticos, entretanto, houve também ponderações por parte dos favoráveis à matematização sobre seus limites. Maxwell, por exemplo, criticou algumas formas da utilização da matemática na física. Para ele, a utilização seria benéfica, mas o físico deveria estar sempre atento para que cada operação matemática pudesse ser interpretada fisicamente:

A parte intermediária da física matemática, que consiste em nossos cálculos e transformações de expressões simbólicas, é essencial para a ciência física, mas é, na realidade, matemática pura. [...] Como estamos engajados no estudo da filosofia natural, devemos nos esforçar para deixar nossos cálculos de tal forma que cada passo admita uma interpretação física (MAXWELL, 1990, p. 672).

A citação de Maxwell exemplifica uma parte do processo de convencimento necessário para que a matematização do eletromagnetismo fosse naturalizada. Ao criticar o que considerava excessiva matematização, o físico está defendendo a matematização que ele considera correta usando argumentos epistemológicos. A citação também serve de exemplo sobre como concepções epistemológicas podem influenciar profundamente o desenvolvimento da ciência já que a exigência colocada por Maxwell, de que cada passo admita interpretação física, não é de forma alguma irrelevante⁵.

Michel Paty (1995) defende que, durante o século XX, houve outro importante processo de matematização, afetando diversas áreas da física, cuja característica determinante é que a matemática passou a ter um papel estrutural na física, participando inclusive do

⁵ Um exemplo contemporâneo que não passaria pelo crivo de Maxwell são as técnicas de renormalização utilizadas na teoria quântica de campos.

processo de descoberta de entes físicos e de suas características. A descoberta do neutrino, segundo o próprio Paty (ibid.), exemplifica bem esse estágio de matematização. Vinte anos antes de qualquer indício experimental de sua existência, o neutrino havia sido proposto como uma partícula teórica a partir de modelos matemáticos. O mesmo ocorre com outras partículas subatômicas, tais como o méson de Yukawa (hoje conhecido como pión) que foi detectado cerca de 12 anos depois em raios cósmicos pelo grupo de Cecil Powell em Bristol, Inglaterra, do qual participavam o brasileiro César Lattes e o italiano Giuseppe Occhialini.

Teorias físicas nas quais a matemática desempenha papel estrutural, como a relatividade, mecânica quântica e física de partículas, obtiveram um sucesso estrondoso, o que fez com que o estágio de matematização fosse muito rapidamente naturalizado. Entretanto, isso não impediu que houvesse questionamentos, embora bem menos intensos do que os mencionados nos períodos anteriores.

Eugene Wigner (1902-1995), em seu famoso artigo “The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences” de 1960, expressa seu desconforto com o fato de que há sempre uma estrutura matemática para descrever um fenômeno físico e, principalmente, nas capacidades dessa estrutura matemática, a partir de deduções com sua lógica própria, conseguir desvendar novos mistérios sobre o mundo real. A conclusão de Wigner é que o sucesso da matemática é uma grande e agradável coincidência que ele espera que se mantenha.

O artigo de Wigner é um exemplo das formas de questionamento brando à matematização feitas por físicos ao longo do século XX, que se perguntam os porquês do sucesso da matemática, tomando como pressuposto que ela deva continuar a ser utilizada.

O século XX, entretanto, foi um período em que a matematização também avançou nas ciências humanas e biológicas. Nesses casos a resistência foi bem maior e mais vocal, como com a mecânica durante os séculos XVII e XVIII, havendo questionamentos severos sobre se a utilização da matemática não havia, na realidade, prejudicado algumas áreas, argumentando, por exemplo, que os cientistas favoráveis à matematização confundiam seus modelos excessivamente simplistas com a realidade⁶.

Portanto, a evolução do conhecimento físico nos últimos séculos foi acompanhada por transformações das concepções epistemológicas da comunidade científica e as justificativas para a aplicação e o sucesso da matemática na física configuram uma importante questão epistemológica em aberto.

⁶ Não vamos nos aprofundar nos debates que ocorreram em outras áreas neste trabalho; referências sobre o assunto podem ser encontradas em (Booß-Bavnbek 2009; Brooks and Aalto 1981; Yoshimi 2007; Bouleau 2011).

III. Papéis da matemática como demanda epistêmica

É muito comum, em todos os níveis do sistema educacional, a justificativa de que muitas das dificuldades dos estudantes em física são causadas por deficiências anteriores em matemática. Pietrocola (2008) argumenta que, no contexto universitário, essa justificativa se expressa também na estrutura curricular, que coloca como pré-requisitos para as disciplinas de física uma série de disciplinas matemáticas que são, muitas vezes, idênticas às oferecidas aos graduandos em matemática. Ainda segundo o autor, essa estrutura curricular contribui para o alto índice de desistência no curso de física, decorrente da quebra de expectativas dos estudantes, que, naturalmente, esperavam ter mais contato com a física.

Pietrocola (ibid.) aponta também que o mesmo problema curricular se expressa no ensino médio, dadas suas devidas particularidades, e com um agravante: como o ensino médio não tem o papel de formar cientistas, que vão necessariamente precisar das ferramentas matemáticas para atuar em sua profissão, a grande ênfase nos conteúdos matemáticos cobrados na disciplina de física desmotiva ainda mais o estudante, já que, sem a promessa de uma utilidade prática no futuro, a matemática adquire um caráter de “pedágio” para o aprendizado da física.

É impossível negar que a falta de bagagem matemática pode prejudicar muito o entendimento da física pelo educando. Meltzer (2002) mostra isso em um estudo com alunos de um curso introdutório de física no qual encontrou uma correlação entre o aprendizado dos alunos e seu conhecimento matemático anterior à disciplina. Essa correlação, entretanto, não implica que os conhecimentos matemáticos garantam o aprendizado da física. Meltzer (ibid.) aponta que, embora a correlação exista, os coeficientes de correlação são baixos, de forma que os conhecimentos anteriores em matemática não têm grande poder preditivo sobre o sucesso do estudante na física. O pesquisador sugere que pode haver uma “variável oculta” por trás dessa correlação, que é relacionada com o conhecimento matemático, mas que tem um efeito mais direto sobre o aprendizado em física.

Um possível candidato à “variável oculta” pode ser encontrado no trabalho de Redish (2005), que defende que a matemática utilizada na física e a matemática pura têm diferenças relevantes na atribuição de sentido aos símbolos utilizados. Nas palavras do autor:

Ela [a matemática utilizada na física] tem um propósito diferente – representar o conteúdo de uma realidade física, ao invés de expressar uma relação abstrata – e tem até uma semiótica distinta – a forma como sentido é atribuído a símbolos – da matemática pura (REDISH, 2005, p. 1).

Para Redish (ibid.), o educando poderia ser proficiente no conceito matemático utilizado na aula de física, mas ter seu aprendizado prejudicado por não entender as nuances da semiótica do contexto físico. A diferença semiótica apontada por Redish sugere que a “variável oculta” de Meltzer pode estar situada na interface entre a física e a matemática e explica o porquê de cursos de reforço em matemática não necessariamente resultarem em uma

melhora significativa no desempenho em física (OLATOYE, 2007), mostrando que esses cursos não devem ser somente cursos de matemática pura.

Vários estudos apontam o efeito que uma compreensão acerca de questões epistemológicas pode ter no desempenho dos estudantes. Por exemplo, Millar *et al.* (1994) acompanharam estudantes com idades entre 9 e 14 anos realizando atividades investigativas relacionadas à ciência e, após entrevistarem os estudantes, os pesquisadores constataram que o entendimento dos jovens sobre os objetivos e propósitos da investigação científica tinham uma relação notável com suas performances nas atividades investigativas.

Ryder e Leach (1999), em um estudo similar, acompanharam projetos de pesquisa de graduandos em física tentando relacionar suas concepções epistemológicas sobre ciência com possíveis dificuldades na realização da pesquisa. Os autores chamam essas concepções epistêmicas que prejudicam o aprendizado de “demandas epistêmicas”. Seria então trabalho do educador identificar essas demandas a partir de atividades que estimulem a investigação e o pensamento científico e auxiliar o aluno a atendê-las com debates e atividades voltadas para a sofisticação do entendimento filosófico sobre ciência.

Outros dois estudos que se aprofundam na descrição do efeito das demandas epistêmicas e reforçam a tese da importância desse fator na educação foram realizados por Sins *et al.* (2009) e Lising e Elby (2005). O primeiro consegue quantificar os efeitos das demandas epistêmicas no desempenho acadêmico. O trabalho consistiu em analisar um grupo de estudantes de ensino médio tentando modelar uma situação física, encontrando uma correlação entre uma epistemologia pouco sofisticada sobre modelos físicos, que considera que modelos são como cópias da realidade, e um processamento cognitivo superficial durante o processo de modelagem, que se expressa como modelagem por um processo de tentativa e erro e que geralmente não leva a uma modelagem bem-sucedida. Já o trabalho de Lising e Elby é um estudo de caso com uma estudante de graduação no qual os pesquisadores realizaram um conjunto de entrevistas e analisaram a estudante resolvendo problemas físicos tanto individualmente quanto em grupo em busca de concepções epistemológicas que estariam prejudicando seu desempenho em disciplinas de física. Com isso os pesquisadores buscavam evidências de como concepções epistemológicas podem impactar de forma causal o aprendizado. Eles concluíram que a aluna teve seu desenvolvimento prejudicado por uma concepção epistemológica que dicotomiza o pensamento formal e técnico com o pensamento intuitivo do dia a dia, dificultando relações entre esses dois tipos de conhecimento na resolução de problemas físicos.

Hofer (2001) expõe três visões distintas sobre como concepções epistemológicas sofisticadas podem afetar o desempenho dos estudantes: na primeira o desenvolvimento epistemológico seria o benefício em si, permitindo a evolução de estruturas complexas de pensamento e interpretação; na segunda ela contribuiria para o desempenho acadêmico dos estudantes, influenciando a escolha de estratégias de estudo e sua eficiência; na terceira o

desenvolvimento epistemológico criaria várias ferramentas e recursos cognitivos que seriam ativados na construção de conhecimento e no aprendizado.

Apesar de haver publicações como as mencionadas acima, há pouquíssimos estudos sobre as demandas epistêmicas dos estudantes quanto às relações entre física e matemática, principalmente no contexto brasileiro. Ataíde e Greca (2013) e Al-omari e Miqdadi (2014) trabalharam com grupos de estudantes universitários no Brasil e Jordânia, respectivamente, encontrando uma relação estatisticamente significativa entre as visões epistemológicas dos estudantes sobre como a matemática é utilizada na física com suas estratégias de resolução de exercícios. Ambos os artigos relacionam epistemologias mais ingênuas, que envolvem visões de que a matemática é utilizada na física somente para cálculos numéricos, com a estratégia de resolução por tentativa e erro, exemplificando um caso de como concepções epistemológicas sobre a interface entre a física e a matemática podem prejudicar o aprendizado.

Não encontramos nenhum estudo na literatura que considere a compreensão dos motivos de a matemática ser utilizada na física com tanto sucesso como demanda epistêmica por parte dos estudantes. Neste trabalho, contribuímos para a investigação dessa temática, desenvolvendo e aplicando um questionário para compreender melhor as concepções epistemológicas dos estudantes sobre a efetividade da matemática.

IV. Justificativas para o sucesso da matemática na física

Neste estudo, foi necessário o desenvolvimento de um conjunto de categorias epistemológicas com o objetivo de abranger uma gama de justificativas para o sucesso da utilização da matemática na física. Ataíde e Greca (2013) e Al-omari e Miqdadi (2014), em suas pesquisas, utilizam as mesmas categorias de análise, separando os participantes em 3 grupos: os que enxergam a matemática somente como uma ferramenta de cálculos, os que a veem como uma forma de traduzir a natureza, e os que consideram que a matemática desempenha um papel estrutural nas teorias físicas.

Utilizamos um enfoque distinto dos trabalhos das autoras supracitadas, focando não nas formas de utilização da matemática, mas nas justificativas para a sua utilização. Sendo assim, nos inspiramos nos debates históricos apresentados na seção II deste trabalho (Matematização da natureza) e nas categorias criadas por Dorato (2005), que justificariam a utilização da matemática: (i) antinaturalismo de Steiner (a matemática funciona, pois o universo se estrutura de maneira antinaturalista); (ii) resposta kantiana (a matemática funciona, pois se desenvolveu a partir de uma ferramenta biológica, selecionada naturalmente, para interpretar a realidade); (iii) matemática é um tipo de língua (ela funciona, pois línguas em geral têm uma grande capacidade descritiva); (iv) matemática como a ciência da

abreviação de sequências (ela funciona por ser um instrumento capaz de abreviar qualquer sequência⁷).

Adaptamos as categorias acima a fim de utilizá-las para analisar as concepções de estudantes reais (ver Tabela 1). Para isso, adicionamos às categorias propostas por Dorato (2005) a categoria ‘matemática como ferramenta de tradução’ baseada na categoria ‘matemática como uma forma de traduzir a natureza’, utilizada por Ataíde e Greca (2013) e Al-omari e Miqdadi (2014). Como as categorias propostas por Dorato (2005) pressupõem que a matemática é maleável e poderia descrever qualquer universo concebível, também agrupamos as categorias ‘matemática é um tipo de língua’ e ‘matemática como a ciência da abreviação de sequências’, de Dorato, em uma única categoria por nós chamada ‘matemática como língua’. Por fim, renomeamos as categorias ‘resposta kantiana’ e ‘antinaturalismo de Steiner’ como ‘matemática como um *a priori*’ e ‘resposta antinatural’. A seguir descreveremos as categorias, assim como possíveis argumentos que corroboram e contestam cada concepção epistemológica.

Tabela 1 – Categorias utilizadas.

Categorias utilizadas	Categorias de base	Autores de base
Matemática como ferramenta de tradução.	Matemática como uma forma de traduzir a natureza	Ataíde e Greca (2013); Al-omari & Miqdadi (2014)
Matemática como língua.	Matemática é um tipo de língua & Matemática é um tipo de língua.	Dorato (2005)
Matemática como um <i>a priori</i> .	Resposta kantiana.	Dorato (2005)
Resposta antinatural.	Antinaturalismo de Steiner.	Dorato (2005)

IV.1 Matemática como ferramenta de tradução

Esta categoria abrange os que entendem que a matemática descreve bem a natureza porque ela seria intrinsecamente matemática. Isso implica que a matemática teria sido descoberta pelos seres humanos a partir de suas interações com a natureza. Consequentemente, a matemática seria única, não podendo haver outras matemáticas desenvolvidas pela humanidade sem que fôssemos expostos a outras naturezas. Isso se adequaria aos momentos na história da ciência em que cientistas desenvolveram ferramentas matemáticas para resolver problemas físicos que estavam estudando, como é o caso de Newton e Leibnitz (BOYER, 1959) com o cálculo, e da representação vetorial desenvolvida por Gibbs e Heaviside (SILVA, 2002) para o eletromagnetismo.

A proposição desta categoria não está isenta de críticas, já que há casos em que ferramentas matemáticas foram desenvolvidas antes das teorias físicas nas quais elas seriam

⁷ O autor considera a evolução temporal de sistemas como uma sequência de estados e a matemática como capaz de abreviar essa sequência com uma lei geradora.

aplicadas e por pessoas que nada sabiam sobre a área de futura aplicação, como acontece com o cálculo tensorial, utilizado no desenvolvimento da teoria da relatividade geral (STRUIK, 1989). Além disso, a matemática tornou-se cada vez mais independente do mundo material. Isso se expressa tanto pelo fato de os matemáticos não necessariamente estudarem teorias com aplicações imediatas, quanto do ponto de vista da estruturação axiomática do conhecimento matemático (MOORE, 2012). É natural que se questione como muitas dessas estruturas e objetos matemáticos, criados e desenvolvidos a partir da lógica axiomática, sem qualquer relação com a realidade material, acabem se mostrando úteis para desvendar os mistérios do universo.

IV.2 Matemática como língua

Línguas conseguem descrever, explicar e prever aspectos do mundo. A partir do ponto de vista representado na categoria linguística, a matemática seria uma língua particularmente precisa e rigorosa, o que potencializaria as capacidades gerais presentes em todas as línguas e, portanto, conseguiria descrever o universo independentemente de como ele realmente seja (MCDONNELL, 2016). Vista sob a perspectiva da categoria linguística, a matemática seria algo inventado, não descoberto, e poder-se-ia *a priori* inventar outras línguas para cumprir o mesmo papel. O diferencial da matemática em relação às línguas vernáculas seria somente o rigor e a precisão, sendo inclusive possível desenvolver uma língua mais precisa e mais rigorosa que a própria matemática.

Segundo Dorato (2005), a visão da matemática como língua é embasada pelas teorias linguísticas de Chomsky (1986) (teoria gerativa) e de Fodor (2008) (teoria computacional), pois a matemática possui duas das principais características de línguas em geral: produtividade (um número potencialmente ilimitado de resultados podem ser gerados a partir de algumas premissas) e sistematicidade (as áreas da matemática são muito relacionadas, de forma que conseguir produzir resultados em uma área está intrinsecamente ligado a conseguir produzir resultados em outras)⁸.

Entretanto, ainda segundo Dorato (2005), a matemática tem um problema fundamental como língua: nem sempre é possível encontrar uma correlação não matemática para conceitos matemáticos. Isso é uma propriedade muito importante das línguas, significando que sempre conseguimos encontrar uma extensão clara dos conceitos na realidade ou no mundo natural. Na matemática conseguimos encontrar extensões somente em alguns casos. O conceito de subtração, por exemplo, é facilmente visualizado no mundo material separando-se objetos físicos. Porém, outros conceitos, inclusive com muita significância física, como a analiticidade de funções, não possuem correspondência alguma com o mundo material. Isso ocorre, pois, a atribuição de significados físicos para entes

⁸ Analisar de forma mais profunda o caráter linguístico da matemática foge bastante do escopo do nosso trabalho. Uma abordagem mais aprofundada sobre essas teorias linguísticas pode ser encontrada em (FODOR, 2008) e (CHOMSKY, 1986).

matemáticos não é uma mera relação semântica, mas depende de consensos construídos pela comunidade científica.

Outro problema que encontramos é o fato de que o único diferencial da matemática seria seu refinamento como língua, o que consideramos insuficiente para justificar sua utilização na ciência de maneira mais eficaz que as outras línguas. Também há de se questionar como, podendo a matemática formular uma infinidade de modelos possíveis para a realidade, conseguimos encontrar o modelo correto dentro de tantos modelos possíveis.

IV.3 Matemática como um *a priori*

Immanuel Kant (1724-1804), em seu livro *Crítica da Razão Pura*, de 1781, discorre sobre a diferença entre conhecimento *a priori*, que seria universal e logicamente dedutível, e conhecimento *a posteriori*, cuja justificativa depende de experiências com a realidade (RUSSELL, 2020). Por consequência, Kant defende que há estruturas e faculdades do pensamento que são inatas e que prescindem o conhecimento, as chamadas estruturas *a priori*.

Esta categoria supõe que o sucesso da matemática na física seria devido a seu caráter *a priori*. A matemática seria eficaz na descrição da natureza, pois interpretamos a realidade a partir de nosso aparato mental e sensorial, nos quais há ferramentas inatas necessárias para o raciocínio matemático tais como noções de tempo e espaço, que teriam sido naturalmente selecionadas. Quando utilizamos essa “intuição matemática primitiva” estaríamos essencialmente projetando a matemática na natureza, pois foi a partir dessas estruturas *a priori* que desenvolvemos a matemática.

A visão kantiana da matemática poderia ser justificada pela biologia evolutiva e a psicologia cognitiva, considerando-se que a matemática se desenvolveu a partir de intuições matemáticas instintivas (LONGO, 2003, 2005), o que justificaria sua efetividade na física. Devlin (2000) corrobora essa visão oferecendo exemplos de capacidades matemáticas que auxiliam a sobrevivência dos animais como, por exemplo, a capacidade de discernir qual árvore tem mais frutos ou se o seu grupo está em desvantagem numérica em um confronto.

Esta categoria também tem limitações. Não é fácil justificar porque uma ferramenta desenvolvida pela seleção natural para a sobrevivência dos seres humanos é tão eficaz em escalas como as da física quântica e mecânica relativística, estando inclusive em descompasso com nossa intuição, que falha de forma tão espetacular nessas escalas.

IV.4 Resposta antinatural

Esta categoria agrega as diferentes visões que afirmam não existir ou não ser possível encontrar uma explicação de ordem natural para o sucesso da utilização da matemática na física e também as visões instrumentalistas que não veem necessidade de encontrar uma explicação para tal sucesso. A famosa tese de Wigner (1960), que afirma que esse sucesso é uma agradável e desejável coincidência, é talvez a mais simples visão antinatural. O físico e filósofo Mark Steiner (1942-2020) também se enquadra na visão antinaturalista. Ele utiliza o

sucesso da matemática para defender a tese teísta de que o universo tem um caráter antropomórfico (STEINER, 2009). Quaisquer outras teses de caráter teísta sobre o sucesso da matemática também se enquadram nesta categoria. Dada a amplitude da categoria não é possível elaborarmos aqui consequências gerais ou problemas, sendo necessário analisar cada posicionamento específico. O que une todas essas visões é o fato de oferecerem como resposta para a questão da efetividade da matemática na física fatores religiosos e sobrenaturais, ou simplesmente alegarem que não há uma resposta acessível.

V. Metodologia

Utilizamos na pesquisa um questionário com uma escala Likert de 6 itens, constituído por diversas afirmações nas quais os estudantes tiveram de informar seu grau de concordância (entre “discordo totalmente” e “concordo totalmente”). Cada uma das frases que compõem o questionário representa o ponto de vista de uma das quatro categorias epistêmicas apresentadas na seção “IV. Justificativas para o sucesso da matemática na física”. Para cada categoria, foram criadas 5 afirmações, com exceção da categoria da matemática como antinatural, que conta com somente 3 afirmações⁹:

1. Matemática como ferramenta de tradução

- A matemática foi descoberta diretamente pela investigação da natureza;
- A matemática descreve a natureza com sucesso, pois é a linguagem intrínseca da realidade;
- As ferramentas matemáticas são descobertas à medida que são necessárias para o entendimento da natureza;
- Não é possível haver uma linguagem mais eficiente que a matemática para descrever a natureza;
- A matemática existe independentemente do ser humano.

2. Matemática como língua:

- A matemática é uma invenção humana;
- A matemática é uma língua como qualquer outra, só que mais logicamente rigorosa e precisa;
- A nossa matemática também poderia descrever as leis de um universo completamente diferente do nosso;
- É possível que seja desenvolvida uma língua não matemática que descreva a natureza tão bem ou melhor que a matemática;
- A matemática descreve bem a natureza, pois ela é uma ferramenta descritiva muito versátil;

⁹ Por questões de clareza, agrupamos as afirmações referentes a cada categoria em subtópicos, embora para os alunos as asserções tenham sido apresentadas em ordem aleatória e sem referência às categorias de análise.

3. Matemática como um a priori:

- Uma intuição matemática primitiva foi naturalmente selecionada durante a evolução humana;
- A matemática se originou tendo como alicerce uma intuição matemática natural do ser humano;
- Antes mesmo do desenvolvimento da matemática os seres humanos primitivos já tinham noções matemáticas rudimentares;
- A matemática descreve bem a natureza, pois ela surgiu como um refinamento de nossos instintos para interpretar a natureza;
- Alguns animais (não humanos) possuem algumas noções matemáticas básicas.

4. Resposta antinatural:

- O sucesso da matemática em descrever a natureza é somente uma útil coincidência;
- O sucesso da matemática em descrever a natureza mostra que o universo foi criado para que os seres humanos pudessem entendê-lo;
- O sucesso da matemática em descrever a natureza mostra que o Criador do universo pensa matematicamente.

Para além das afirmações acima, fizemos também 5 perguntas sobre o quanto os alunos haviam pensado sobre o sucesso da matemática na física, o quanto esse sucesso os surpreende e o quanto eles acham que o curso contribuiu para o entendimento das questões epistemológicas aqui tratadas:

- Quanto que o sucesso da linguagem matemática em descrever a natureza o/a surpreende?
- Você costuma pensar sobre o porquê de a matemática ter tanto sucesso em descrever a natureza?
- Você acha que o seu curso contribuiu para o seu entendimento do porquê de a matemática ter tanto sucesso em descrever a natureza?
- Você gostaria que o seu curso abordasse mais questões da filosofia da ciência, tais como o porquê de a matemática ter sucesso em descrever a natureza?

Havia também a questão dissertativa “Explique sucintamente o porquê, na sua opinião, a matemática é tão bem sucedida em descrever a natureza.” para que o aluno pudesse explicar por escrito sua visão epistemológica sobre o sucesso da matemática na física. Essa questão não era obrigatória, pois acreditamos que fazê-la obrigatória poderia diminuir o número de respostas ao questionário.

O questionário foi administrado online, enviado por e-mail aos estudantes, utilizando a plataforma Google Forms. As afirmações foram apresentadas para cada estudante em ordem aleatória, de forma a eliminar qualquer viés de ordenação. Enviamos o questionário para todos os estudantes matriculados nos 4 cursos de graduação do Instituto de Física de São Carlos (IFSC) da Universidade de São Paulo (USP): Bacharelado em Física (Física), Bacharelado em

Ciências Físicas e Biomoleculares (Biomol), Bacharelado em Física Computacional (Fiscomp) e Licenciatura em Ciências Exatas (Lic). Não aceitamos respostas de alunos que ingressaram antes de 2016.

VI. Resultados e discussão

O questionário foi respondido por 92 estudantes, distribuídos em função de seu ano de ingresso e curso, como mostrado nos Gráficos 1 e 2¹⁰.

Gráfico 1 – Distribuição dos alunos por ano.

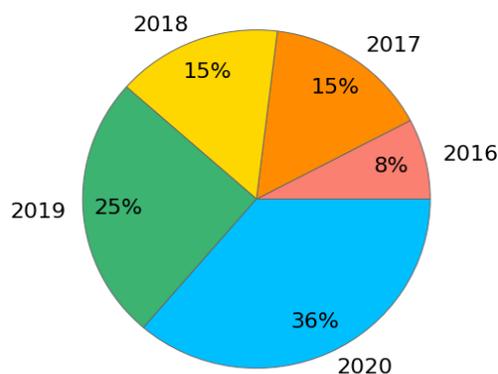
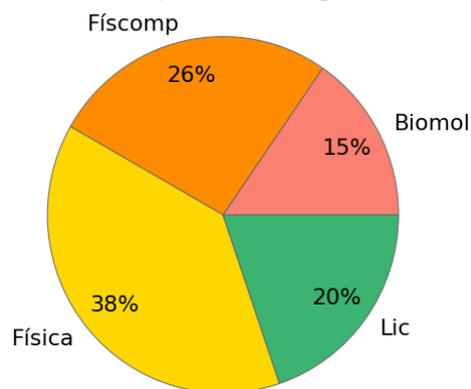


Gráfico 2 – Distribuição dos alunos por curso.



Consideramos todas as afirmações referentes a uma determinada categoria epistemológica como equivalentes. Assim, podemos visualizar a distribuição das respostas dos participantes por categoria no Gráfico 3. Conseguimos observar que a categoria ‘resposta antinatural’ tem uma grande rejeição entre os estudantes. As outras três categorias têm a concordância da maioria dos estudantes, sendo que a com maior nível de aceitação é a categoria ‘matemática como um *a priori*’, seguida da ‘matemática como língua’ e ‘matemática como ferramenta tradução’.

Testamos se o ano de ingresso e o curso impactam a inclinação dos estudantes a cada categoria epistemológica. Como analisamos dados ordinais, aplicamos dois testes de Kruskal-Wallis¹¹, que nos informam a probabilidade de cada parâmetro ter um impacto na distribuição de respostas dos estudantes para os itens de cada categoria. Os resultados dos testes, dispostos na Tabela 2, são um valor-P (também chamado de nível descritivo ou probabilidade de significância) para cada hipótese, que representa a probabilidade de se obter uma distribuição de respostas como a encontrada assumindo-se que a hipótese dada seja falsa. No contexto do nosso trabalho, isso significa que, com certeza, há influência do parâmetro (ano de ingresso ou curso) se o valor-P for igual a 0; com certeza não há influência se o valor-P for igual a 1.

¹⁰ As porcentagens dos gráficos de pizza não necessariamente somam 100% por conta do arredondamento.

¹¹ Para uma abordagem detalhada de estatística ordinal veja (HOLLANDER; WOLFE; CHICKEN, 2013).

Convenciona-se que há uma influência estatisticamente significativa caso o valor-P seja menor que 0,05.

Gráfico 3 – Distribuição de respostas por categoria.

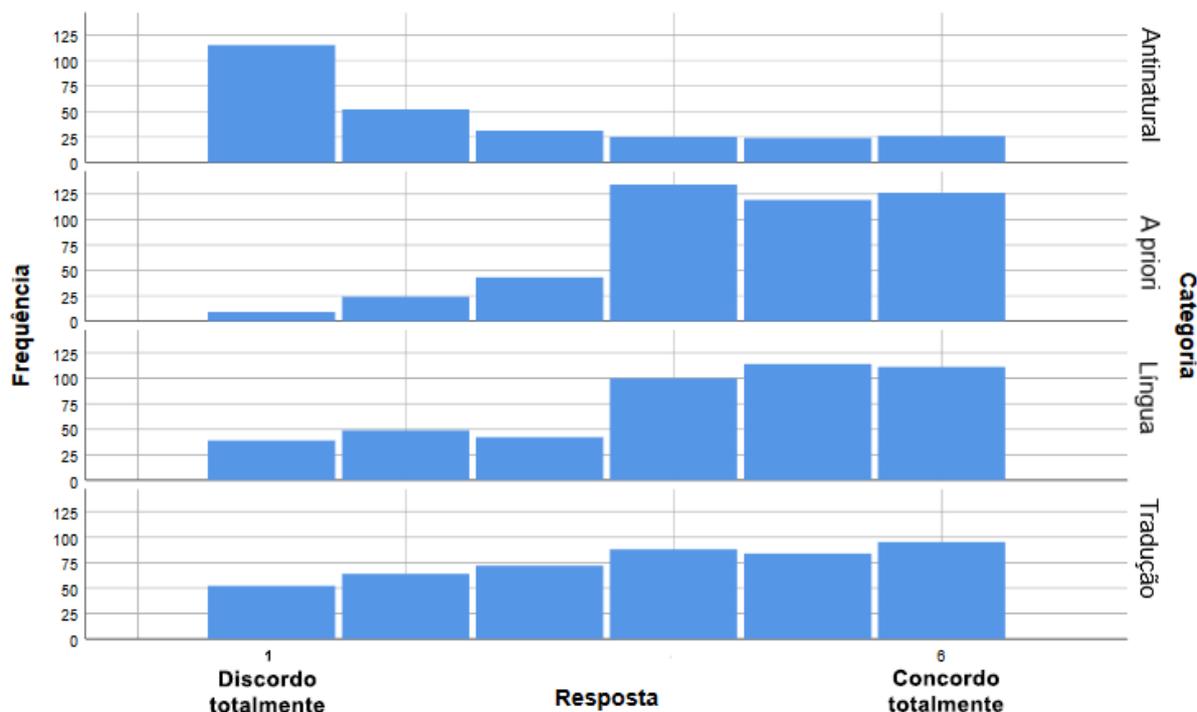


Tabela 2 – Resultados do teste de Kruskal-Wallis.

Hipótese	Valor-P
A distribuição de “Tradução” é a mesma entre os anos	0,329
A distribuição de “Língua” é a mesma entre os anos	0,253
A distribuição de “ <i>A priori</i> ” é a mesma entre os anos	0,979
A distribuição de “Antinatural” é a mesma entre os anos	0,137
A distribuição de “Tradução” é a mesma entre os cursos	0,412
A distribuição de “Língua” é a mesma entre os cursos	0,946
A distribuição de “ <i>A priori</i> ” é a mesma entre os cursos	0,074
A distribuição de “Antinatural” é a mesma entre os cursos	0,015

Os dados da Tabela 2 mostram que a única diferença estatisticamente significativa (valor-P<0,05) ocorre na distribuição de respostas na categoria ‘resposta antinatural’ entre os cursos. Para as outras categorias, as visões dos estudantes sobre as justificativas para o sucesso da matemática na física não se alteram no decorrer do curso.

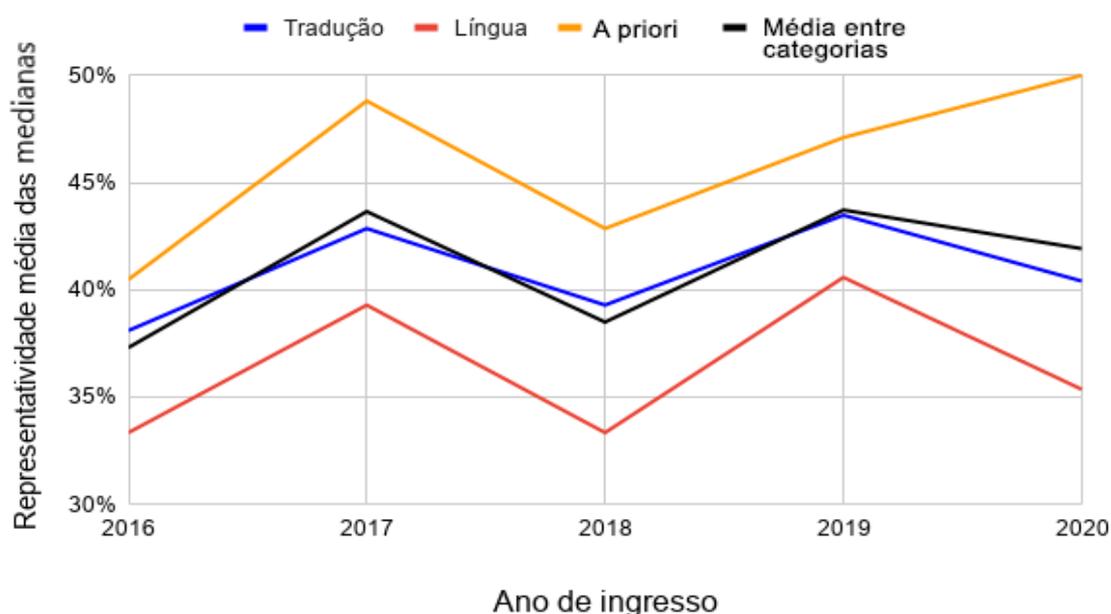
A partir dos resultados acima, checamos se as respostas ao longo do tempo de convívio entre pares e com professores vão se tornando mais consistentes internamente. Para isso, verificamos se estudantes com mais anos de curso tendem a ter respostas mais coerentes

calculando a dispersão das respostas de cada estudante em cada categoria. Nas análises subsequentes, portanto, estamos desconsiderando a categoria ‘resposta antinatural’, pois não faz sentido analisar a dispersão dentro dessa categoria já que, por ser uma categoria guarda-chuva, ela é um conjunto de concepções não necessariamente coerentes entre si.

A primeira variável que calculamos para entender a coerência dos estudantes é a representatividade média das medianas de cada categoria. A representatividade da mediana de um conjunto é a porcentagem de elementos do conjunto que são iguais à mediana do conjunto. Ela é uma medida análoga ao desvio padrão para dados ordinais.

Para cada aluno, calculamos a representatividade da mediana de suas respostas para as afirmações de cada categoria epistemológica, obtendo assim as representatividades da mediana do aluno para as categorias tradução, língua e a priori. Com isso, tomamos a média das representatividades de cada categoria entre todos os alunos com um mesmo ano de ingresso para obter a representatividade média das medianas de cada categoria por ano de ingresso. O Gráfico 4 apresenta os resultados desta análise.

Gráfico 4 – Representatividade média das medianas de cada categoria por ano.



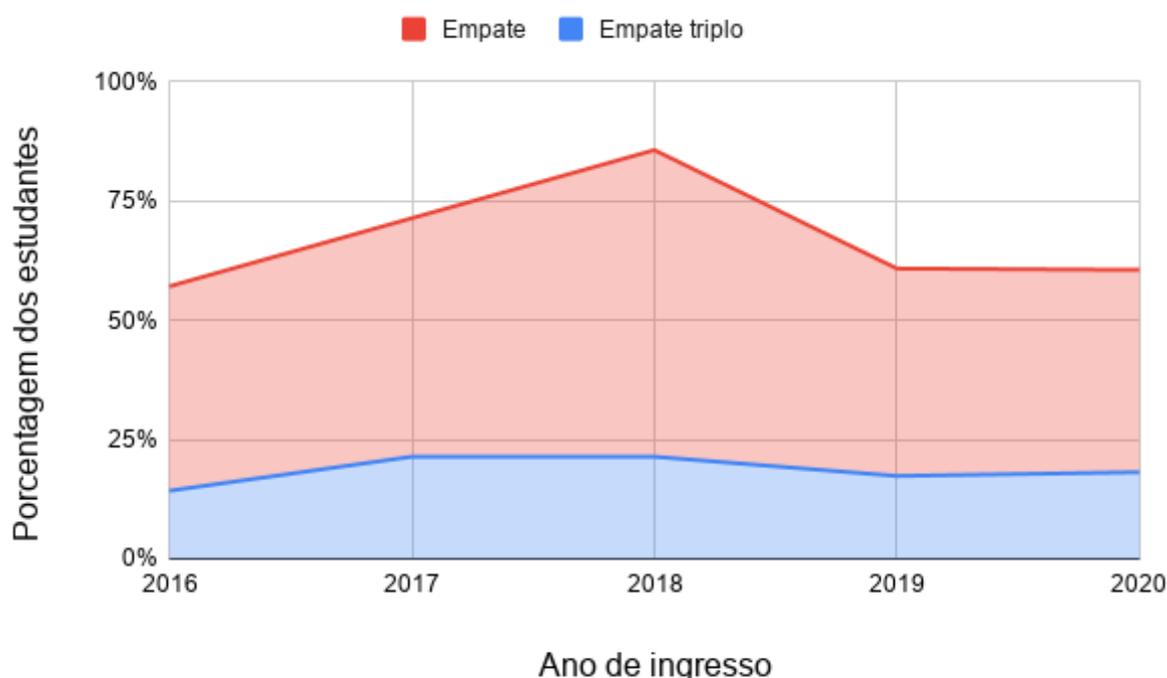
Fazendo uma regressão na média dos valores obtidos para cada categoria (média essa representada pela linha preta), obtemos um coeficiente angular de $\beta = 0,9 \pm 0,9$. Como o coeficiente angular indica a variação da representatividade da mediana dos alunos com o decorrer do curso, o coeficiente ser estatisticamente igual a zero mostra que os cursos não alteram significativamente, o que indica que não há uma solidificação ou sofisticação das concepções epistemológicas dos estudantes ao longo de seus respectivos cursos.

Os valores baixos da representatividade das medianas (abaixo de 50%) indicam que os estudantes não têm uma concepção epistemológica bem definida, já que, estatisticamente,

uma baixa representatividade da mediana representa um predomínio de respostas aleatórias. Do ponto de vista epistêmico, essa aleatoriedade indica baixa coerência interna nas respostas fruto de pouco domínio do tema.

A fim de obter uma medida quantitativa do domínio dos estudantes em relação ao tema do questionário, calculamos para cada aluno a mediana das respostas de cada categoria e consideramos a mediana mais alta entre as categorias como sendo a concepção dominante do graduando em questão. O Gráfico 5 mostra a porcentagem dos alunos de cada ano de ingresso em que houve empate e empate triplo para a categoria dominante. Pode-se observar que a porcentagem é bastante alta, indicando uma “indecisão epistemológica” o que caracteriza a ausência de visões consolidadas sobre o tema. Fazendo regressões lineares obtivemos para os coeficientes angulares das curvas para empate e empate triplo os seguintes valores: $\beta_{duplo} = -0.01 \pm 0.03$ e $\beta_{triplo} = 0.00 \pm 0.01$ que, sendo estatisticamente insignificantes, mostram que os cursos estudados não contribuem para diminuir a “indecisão epistemológica” dos estudantes.

Gráfico 5 – Porcentagem de empates para a categoria dominante por ano.

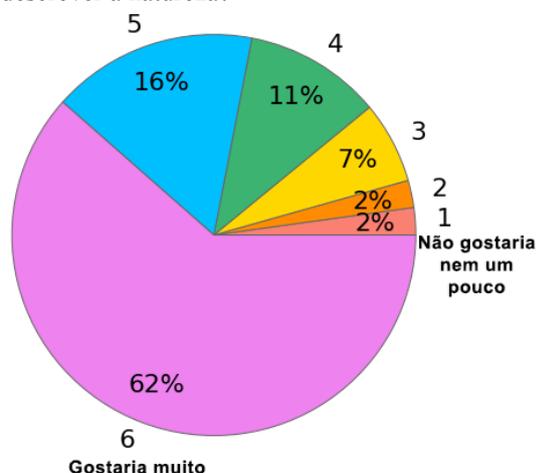


Os comportamentos da representatividade média da mediana (Gráfico 4) e da porcentagem de empates (Gráfico 5) nos mostram que os cursos analisados não contribuem para o desenvolvimento das visões dos estudantes acerca dos motivos para o sucesso da matemática na física. Além disso, os resultados apresentados nos Gráficos 6 e 7 mostram que, do ponto de vista dos estudantes, as questões epistemológicas que apresentamos são surpreendentes e que eles gostariam que questões semelhantes, relacionadas à filosofia da ciência, fossem abordadas em seus cursos.

Gráfico 6 - Quanto que o sucesso da linguagem matemática em descrever a natureza o surpreende?



Gráfico 7 - Você gostaria que o seu curso abordasse mais questões de filosofia da ciência como o porquê da linguagem matemática ter sucesso em descrever a natureza?



VII. Conclusão

Partimos de estudos anteriores que mostram que o sucesso da matemática na descrição da natureza é uma questão epistemológica importante para se compreender a matematização da física. No contexto do ensino, a falta de compreensão por parte dos estudantes sobre questões epistemológicas envolvendo a física e sua relação com a matemática se configura como uma demanda epistêmica, prejudicando o aprendizado e a aplicação de conceitos físicos já que afetam, por exemplo, as estratégias usadas pelos estudantes na resolução de problemas. Portanto, faz-se necessário conhecer quais são as concepções epistemológicas de alunos que cursam disciplinas de física no ensino médio ou cursos de graduação na área de exatas.

No presente trabalho, levantamos as concepções epistemológicas de bacharelandos e licenciandos em ciências exatas sobre as justificativas para a utilização e sucesso da matemática na física. Para isso, desenvolvemos e aplicamos um questionário, cujos resultados permitiram categorizar os estudantes sujeitos da presente pesquisa e mostramos que a maioria deles justifica o fato de a matemática ser adequada para os estudos na física de acordo com a categoria ‘matemática como um *a priori*’; seguidos das categorias ‘matemática como língua’, ‘matemática como ferramenta de tradução’ e ‘resposta antinatural’. Encontramos que os estudantes demonstraram uma falta de domínio sobre a questão do sucesso da matemática, uma “indecisão epistemológica”, que não evolui com a convivência entre os pares e professores ao longo da graduação.

Ademais, encontramos que os estudantes, em sua maioria, têm interesse no tema e gostariam que seus cursos abordassem questões envolvendo filosofia da ciência, o que

poderia ser algo benéfico, ao contribuir não só para enriquecer as reflexões de ordem epistemológica de futuros licenciados e bacharéis, mas também para amenizar demandas epistêmicas relativas às relações entre física e matemática. Tais fatos demonstram um déficit na formação dos cursos por si só, do ponto de vista de uma educação ampla e não apenas focada em aspectos técnicos da física.

Resultados como os apresentados neste trabalho são um primeiro passo para identificar demandas epistêmicas presentes entre os educandos, no entanto, é importante ressaltar a necessidade de outros estudos para demonstrar quais os efeitos de cada uma das categorias de concepções dos estudantes sobre o sucesso da matemática na física teriam (ou não) sobre o aprendizado. Olhar com mais atenção para a interface entre a física e a matemática, mais especificamente para as questões epistêmicas ali presentes, pode ajudar na elaboração de ações suplementares nos cursos de graduação, mostrando-nos como inserir uma matemática contextualizada para o ensino de física, que potencialize o aprendizado ao invés de servir como obstáculo a ele.

Bibliografia

AL-OMARI, W.; MIQDADI, R. The epistemological perceptions of the relationship between physics and mathematics and its effect on problem-solving among pre-service teachers at Yarmouk University in Jordan. **International Education Studies**, v. 7, n. 5, p. 39-48, 2014.

ATAÍDE, A. R. P.; GRECA, I. M. Epistemic Views of the relationship between Physics and Mathematics: its influence on the approach of undergraduate students to problem solving. **Science & Education**, v. 22, n. 6, p. 1405-1421, 2013.

BACHELARD, G. *et al.* **O Novo Espírito Científico**, Lisboa: Edições 70, 1996.

BOOß-BAVNBEK, B. The Mathematization of the Individual Sciences – Revisited. **Journal of Contemporary Mathematical Analysis**, v. 44, n. 2, p. 81-96, 2009.

BOULEAU, N. On Excessive Mathematization, Symptoms, Diagnosis and Philosophical Bases for Real World Knowledge. **Real World Economics**, v. 57, p. 90-105, 2011.

BOYER, C. B. **The History of the Calculus and Its Conceptual Development: (The Concepts of the Calculus)**. New York: Dover, 1959.

BROOKS, G. P.; AALTO, S. K. The rise and fall of moral Algebra: Francis Hutcheson and the Mathematization of Psychology. **Journal of the History of the Behavioral Sciences**, v. 17 n. 3, p. 343-56, 1981.

BURTT, E. A. **The Metaphysical Foundations of Modern Science**. New York: Dover, 2003.

CHOMSKY, N. **Knowledge of Language: Its Nature, Origin, and Use**. New York: Praeger, 1986.

DEVLIN, K. J. **The Math Gene: How Mathematical thinking evolved and why numbers are like gossip**. New York: Basic Books, 2000.

DIJKSTERHUIS, E. Ad Quanta Intelligenda Condita (Designed for Grasping Quantities) – Ej Dijksterhuis (Translation). Translated by HF Cohen. **Tractrix**, v. 2, p. 111-25, 1991.

DORATO, M. The laws of nature and the effectiveness of Mathematics. *In*: BONIOLO, G.; BUDINICH, P. (Org.). **The Role of Mathematics in Physical Sciences**. Dordrecht: Springer, 2005. p. 131-44.

FERREIRA, C. T. T.; SILVA, C. C. The Roles of Mathematics in the History of Science: The Mathematization Thesis. **International Journal for the Historiography of Science**, n. 8, p. 115-23, 2020.

FODOR, J. A. **LOT 2: The Language of Thought Revisited**. New York: Oxford University Press, 2008.

GINGRAS, Y. What did Mathematics do to Physics? **History of Science**, v. 39, n. 4, p. 383-416, 2001.

GUICCIARDINI, N. Did Newton use his calculus in the Principia? **Centaurus**, v. 40, n. 3-4, p. 303-344, 1988.

GORHAM, G. *et al.* **The Language of Nature: Reassessing the Mathematization of Natural Philosophy in the Seventeenth Century**. Minneapolis: Minnesota Press, 2016.

HOFER, B. K. Personal Epistemology Research: Implications for Learning and Teaching. **Educational Psychology Review**, v. 13, n. 4, p. 353-83, 2001.

HOLLANDER, M.; WOLFE, D. A.; CHICKEN, E. **Nonparametric statistical methods**. Hoboken: John Wiley & Sons, 2013.

KLINE, M. **Mathematics and the Physical World**. New York: Dover, 2012.

LISING, L.; ELBY, A. The Impact of Epistemology on Learning: A Case Study from Introductory Physics. **American Journal of Physics**, v. 73, n. 4, p. 372-82, 2005.

LONGO, G. The Constructed Objectivity of Mathematics and the Cognitive Subject. *In*: MUGUR-SCHÄCHTER, M.; VAN DER MERWE, A. (Org.). **Quantum Mechanics, Mathematics, Cognition and Action: Proposals for a Formalized Epistemology**. Dordrecht: Springer, 2003. p. 433-63.

LONGO, G. The Reasonable Effectiveness of Mathematics and Its Cognitive Roots. *In*: BOI, L. (Org.). **Geometries of Nature, Living Systems and Human Cognition: New Interactions of Mathematics with Natural Sciences and Humanities**. Singapore: World Scientific, 2005. p. 351-81.

MAXWELL, J. C. **The Scientific Letters and Papers of James Clerk Maxwell: 1846-1862**, v. 1. New York: Cambridge University Press, 1990.

MCDONNELL, J. **The Pythagorean World: Why Mathematics Is Unreasonably Effective in Physics**. Cham: Springer, 2016.

MELTZER, D. E. The Relationship Between Mathematics Preparation and Conceptual Learning Gains in Physics: A Possible “Hidden Variable” in Diagnostic Pretest Scores. **American Journal of Physics**, v. 70, n. 12, p. 1259-1268, 2002.

MILLAR, R. *et al.* Investigating in the School Science Laboratory: Conceptual and Procedural Knowledge and Their Influence on Performance. **Research Papers in Education**, v. 9, n. 2, p. 207-48, 1994.

MOORE, G. H. **Zermelo’s Axiom of Choice: Its Origins, Development, and Influence**. New York: Dover, 2012.

NASCIMENTO, C. A. R. Um pouco mais sobre Galileu e as Ciências Mistas. **Revista Brasileira de História da Matemática**, v. 11, n. 23, p. 15-26, 2011.

OLATOYE, R. A. Effect of further Mathematics on Students’ Achievement in Mathematics, Biology, Chemistry and Physics. **International Journal of Environmental and Science Education**, v. 2, n. 2, p. 48-53, 2007.

PATY, M. **Matéria Roubada**. São Paulo: Edusp, 1995.

PATY, M. The Idea of Quantity at the Origin of the Legitimacy of Mathematization in Physics. *In: GOULD, C. C. (Org.). **Constructivism and Practice: Toward a Historical Epistemology.** Lanham: Rowman & Littlefield Publishers, 2003. p. 109-37.*

PIETROCOLA, M. Mathematics as Structural Language of Physical Thought. *In: VICENTINI, M.; SASSI, E. (Org.). **Connecting Research in Physics Education with Teacher Education,** v. 2. Singapore: International Commission on Physics Education, 2008. p. 30-41.*

MOLIÈRES, J. P. **Mémoires de L'Académie Royale de Sciences.** Turin: Société royale de Turin, 1733.

REDISH, E. F. Problem Solving and the Use of Math in Physics Courses. *In: WORLD VIEW ON PHYSICS EDUCATION IN 2005: FOCUSING ON CHANGE, Delhi. **Proceedings...** Disponível em: <<http://www.physics.umd.edu/perg/papers/redish/IndiaMath.pdf>>. Acesso em: 03 ago. 2021.*

RUSSELL, B. A Priori Justification and Knowledge. **The Stanford Encyclopedia of Philosophy.** Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2020. Disponível em: <<https://plato.stanford.edu/archives/sum2020/entries/apriori/>>. Acesso em: 18 out. 2020.

RYDER, J.; LEACH, J. University Science Students' Experiences of Investigative Project Work and Their Images of Science. **International Journal of Science Education,** v. 21, n. 9, p. 945-56, 1999.

SILVA, C. C. **Da força ao tensor: evolução do conceito físico e da representação matemática do campo eletromagnético.** 2002. Tese (Doutorado) - Instituto de Física "Gleb Wataghin", UNICAMP, Campinas.

SINS, P. H. *et al.* The relation between students' epistemological understanding of computer models and their cognitive processing on a modelling task. **International Journal of Science Education,** v. 31, n. 9, p. 1205-1229, 2009.

STEINER, M. **The applicability of Mathematics as a Philosophical Problem.** Cambridge: Harvard University Press, 2009.

STRUIK, D. J. 1989. Schouten, Levi-Civita, and the Emergence of Tensor Calculus. *In: ROWE D. E.; MCCLEARY J. (Org.). **Institutions and Applications: Proceedings of the***

Symposium on the History of Modern Mathematics. Cambridge: Academic Press, 1989. p. 98-105.

TRUESDELL, C. **Essays in the History of Mechanics**. Berlin: Springer Science & Business Media, 2012.

WIGNER, E. P. The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences. **Communications in Pure and Applied Mathematics**, v. 13, n. 1, p. 1-14, 1960.

YOSHIMI, J. Mathematizing Phenomenology. **Phenomenology and the Cognitive Sciences**, v. 6, n. 3, p. 271-291, 2007.

ZINSSER, J. P. Translating Newton's 'Principia': The Marquise du Châtelet's Revisions and Additions for a French Audience. **Notes and Records of the Royal Society of London**, v. 55, n. 2, p. 227-245, 2001.



Direito autoral e licença de uso: Este artigo está licenciado sob uma [Licença Creative Commons](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/).