

---

# DETERMINAÇÃO DO MOMENTO DE INÉRCIA DE UM VOLANTE USANDO UM FAISCADOR\*

---

*Hamilton C. Pupo*

*Ervino C. Ziemath*

Departamento de Física - IGCE

UNESP Rio Claro - SP

## **Resumo**

*Neste trabalho, apresentaremos um método dinâmico para determinação do momento de inércia de um volante empregando um faiscador. Os resultados obtidos foram comparados com o processo tradicional no qual se mede as dimensões e a massa do corpo rígido. A precisão do método dinâmico é da ordem de 2%, e comparando seu valor absoluto com o valor obtido pelo tradicional, verificamos uma concordância melhor que 8%.*

**Palavras-chave:** *Momento de inércia, movimento circular, marcador de tempo, faiscador.*

## **I. Introdução**

A determinação experimental do momento de inércia de um corpo rígido, através do método dinâmico, constitui um desafio para alunos e professores, pois geralmente envolve medidas de intervalos de tempo muito curtos. É o caso do tempo de queda de uma massa suspensa na periferia de um disco rígido, um volante, onde o tempo é usualmente medido com o auxílio de um cronômetro acionado manualmente. A incerteza desse instrumento, aliada ao tempo de resposta do operador do mesmo, pode acarretar erros significativos na aceleração do deslocamento da massa suspensa. Uma redução do erro seria conseguida com medidas mais precisas desse tempo, ou então se houvesse possibilidade de determinar com precisão a variação da velocidade em função do tempo, ou seja, a aceleração dessa massa suspensa. Visando melhorar essa precisão, empregamos um faiscador com uma frequência conhecida. Durante o deslocamento da massa suspensa, as faíscas produzem marcas numa fita de papel termosensível. A análise do espaçamento dessas marcas com o tempo permite o cálculo da aceleração da massa se deslocando e, posteriormente, do momento de

---

\* Publicado no Caderno Brasileiro de Ensino de Física, v. 19, n. 1, abr. 2002.

inércia do volante. O procedimento experimental será apresentado neste trabalho, após uma breve abordagem teórica do problema.

## II. Momento de inércia de um volante: teoria

Na Fig. 1 está mostrado o esquema de um volante com massa  $M$ . Para determinarmos o seu momento de inércia, do ponto de vista estático (utilizando sua massa e suas dimensões), podemos considerar o mesmo como sendo constituído de duas partes: 1) um cilindro maciço com raio  $r$ , comprimento  $L$  e massa  $M_1$ ; 2) um disco com orifício no centro de raio  $r$ , raio externo  $R$ , espessura  $H$  e massa  $M_2$ . Os momentos de inércia de ambas as partes são, respectivamente (TIPLER, 1990):

$$I_1 = (1/2) M_1 r^2 \quad (1)$$

$$I_2 = (1/2) M_2 (R^2 + r^2). \quad (2)$$

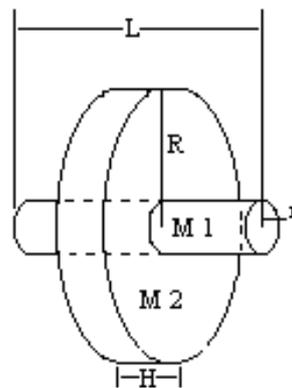


Fig.1 - Esquema de um volante.

Como os eixos de ambas as peças são coincidentes, o momento de inércia de toda a peça é:

$$I_g = I_1 + I_2 = (1/2) M_1 r^2 + (1/2) M_2 (R^2 + r^2), \quad (3)$$

No qual o sub-índice “g” refere-se a parâmetros de ordem geométrica para expressar o momento de inércia do volante de massa  $M = M_1 + M_2$ .

Para a determinação desse momento de inércia a partir de considerações dinâmicas geralmente emprega-se a montagem experimental esquematizada na Fig. 2.

A dedução da equação do momento de inércia pode ser feita analisando-se as forças que atuam no sistema, ou com base no princípio da conservação da energia mecânica. Neste último caso, a energia potencial da massa suspensa,  $E_p$ , é transformada em energia cinética rotacional do volante,  $E_r$ , e em energia cinética translacional da massa suspensa,  $E_t$ :

$$E_p = E_r + E_t$$

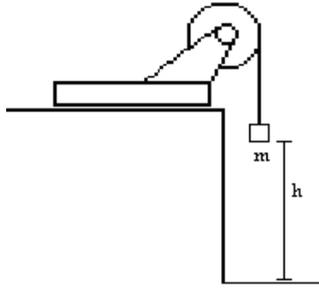


Fig. 2 - Esquema da montagem experimental para a determinação do momento de inércia de um volante.

Após percorrer a altura  $h$  (Fig. 2), a massa suspensa adquire uma velocidade linear  $v$ , e o volante gira com uma velocidade angular  $\omega$ . A aceleração linear  $a$  da massa suspensa é constante durante todo o seu movimento. Então, o momento de inércia do volante,  $I_d$ , é:

$$I_d = \frac{2m}{\omega^2} \left( gh - \frac{v^2}{2} \right). \quad (4)$$

Mas, como  $h = (1/2)at^2$ ,  $v = at$ , e  $\omega = v/R$ , então temos:

$$I_d = mR^2 \left( \frac{g-a}{a} \right) \quad (5)$$

Nessa equação, o valor da massa suspensa  $m$  e o raio  $R$  são medidos facilmente:  $g = 978,58 \text{ cm/s}^2$  (ZIEMATH et al., 1998; HINRICHSEN, 1994). Finalmente, apenas a aceleração  $a$  deve ser determinada com maior precisão.

Em seguida, descreveremos a montagem e o procedimento experimental adotados para a determinação dessa aceleração.

### III. Procedimento Experimental

A montagem experimental utilizada está apresentada na Fig. 3a. Para se reduzir o atrito nos mancais do volante, embutimos dois rolamentos pequenos, de “drivers” de disco rígido de computador, nas extremidades do cilindro de comprimento  $L$  (Fig. 1). A massa  $m$  foi suspensa na periferia do volante por uma fita de papel termosensível (papel de Fax). Esta fita passa por uma peça em forma de “U”, como mostra mais detalhadamente a Fig. 3b. Duas peças metálicas estão fixadas na parte interna desta peça, isoladas entre si, e conectadas a um faiscador (Ealing, mod. 33026)<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> Esse faiscador pode ser substituído por uma usina (transformador) de fogão doméstico. Nesse caso, as faíscas serão geradas com uma frequência constante de 60 Hz da rede elétrica.

As faíscas geradas com frequência  $f$  pré-estabelecida, sensibilizam a fita de papel, enquanto a massa suspensa se desloca verticalmente, desde uma velocidade inicial nula, de uma altura  $h$  qualquer. Nesse caso, não importa se conhecer previamente a altura, pois a mesma não está explicitada na eq.(5).

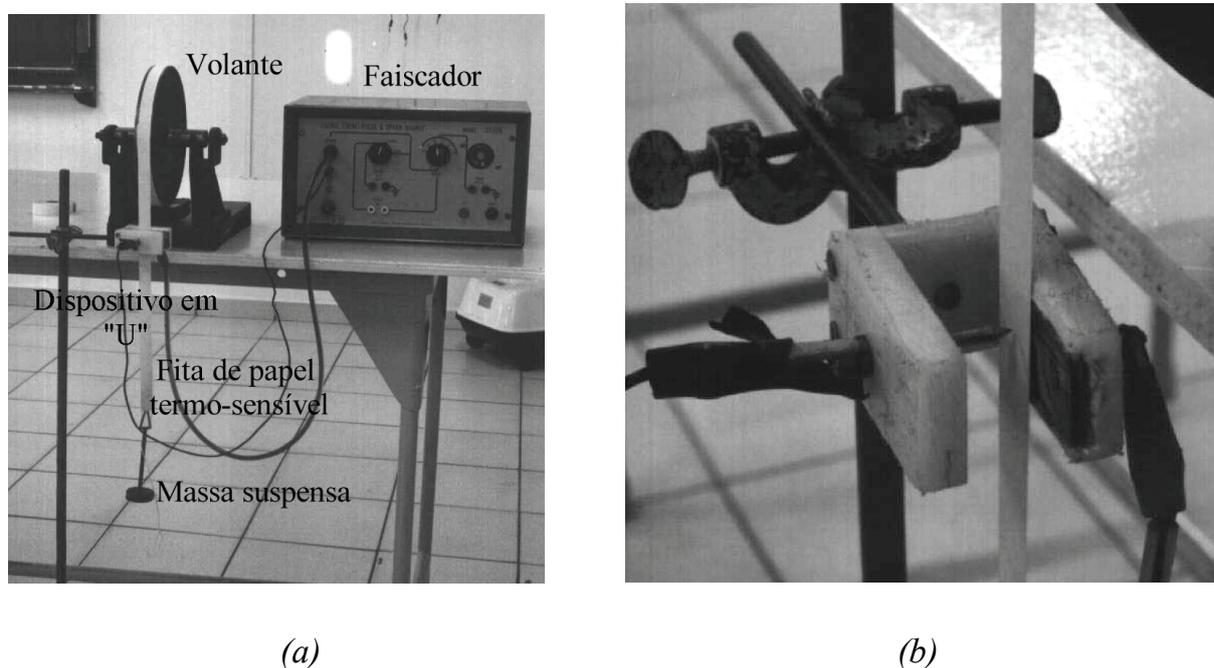


Fig. 3 - (a) Montagem experimental para determinar o momento de inércia do volante pelo método dinâmico. (b) Detalhe da fita de papel termosensível passando pelo dispositivo em forma de "U", conectado ao faiscador.

Na fita, ficam registradas marcas pontuais produzidas pelas faíscas. Os espaçamentos entre elas foram analisados segundo procedimento adotado no PSSC (1966). As marcas ficam cada vez mais distantes entre si com o tempo, e representam os movimentos translacional da massa suspensa e rotacional da periferia do volante. Para um número igual de marcas sucessivas na fita, temos intervalos de tempos iguais,  $i$ . Portanto, o intervalo de tempo  $i$  é uma unidade de medida de tempo específica para a metodologia experimental adotada aqui.

A extensão  $s$  de cada um desses intervalos de tempo ( $i$ ) é numericamente igual à velocidade linear média,  $v_m$ , no intervalo de tempo em questão:  $v_m = s/i$ . Se  $s$  for medida em centímetros, por exemplo, então a unidade de medida da velocidade média num determinado intervalo de tempo é cm/ $i$ . A conversão de  $i$  para segundos depende do número  $n$  de marcas dos intervalos de tempo considerados e da frequência do faiscador,  $f$  (Hz):  $i = n/f$ .

O incremento dessa velocidade em intervalos consecutivos é a aceleração linear ( $a$ ), que é determinada a partir de gráficos de  $v_m$  versus  $i$ . Podemos, portanto, calcular o momento de inércia a partir da eq. (5).

## IV. Resultados

Na Fig. 4 está representado um pedaço de uma fita na qual ficaram registradas as marcas produzidas pelo faiscador, com uma massa  $m = (111,9 \pm 0,2)$  g suspensa na fita. Definimos intervalos de tempo com  $n = 2$  marcas consecutivas. A distância  $s$  entre estas marcas foi medida, fornecendo a velocidade média,  $v_m$ , no intervalo de tempo considerado, em unidades de medida de cm/i. Traçamos os gráficos de  $v_m$  em função de  $i$  mostrados na Fig. 5. Os coeficientes angulares das retas são as acelerações lineares,  $a$ . A média da aceleração é  $a = (0,416 \pm 0,002)$  cm/i<sup>2</sup>. Como a frequência do faiscador é  $f = 20$  Hz, então  $1i = n/f = 2/20 = 0,1$  s. No sistema de unidades CGS, a aceleração é então  $a = (41,6 \pm 0,2)$  cm/s<sup>2</sup>. Substituindo finalmente esse valor na eq. (5) temos que:

$$I_d = (2,27 \pm 0,04) \times 10^5 \text{ g cm}^2.$$

Para confirmar esse resultado, empregamos a eq. (3). A massa do volante é  $M = M_1 + M_2 = (5,0 \pm 0,1) \times 10^3$  g. Para determinar as massas  $M_1$  e  $M_2$ , consideramos que a massa específica do volante seja uniforme:  $\rho = M_v/V_v = M_1/V_1 = M_2/V_2$ . A peça (1) tem raio  $r = (1,23 \pm 0,01)$  cm, comprimento  $L = (12,34 \pm 0,02)$  cm, de modo que o seu volume é  $V_1 = (0,059 \pm 0,001) \times 10^3$  cm<sup>3</sup>.

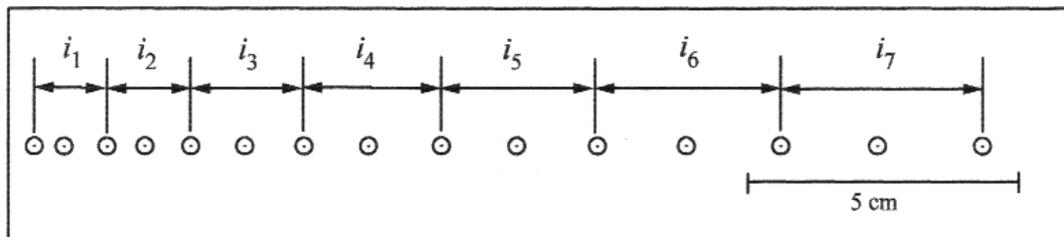


Fig. 4 - Representação de parte de uma das fitas usadas nos experimentos, onde ficaram registradas as marcas produzidas pelo faiscador ( $f = 20$  Hz). A massa suspensa foi de  $(111,9 \pm 0,2)$  g. O intervalo de tempo,  $i$ , usado foi de  $n = 2$  marcas consecutivas.

A peça (2) tem o raio externo  $R = (9,50 \pm 0,01)$  cm, espessura  $H = (2,340 \pm 0,005)$  cm, de modo que seu volume é  $V_2 = (0,66 \pm 0,01) \times 10^3$  cm<sup>3</sup>. O volume de todo o volante é então  $V_v = (0,72 \pm 0,01) \times 10^3$  cm<sup>3</sup>.

Portanto, a massa específica do material que o constitui é  $\rho = (6,9 \pm 0,2)$  g/cm<sup>3</sup> e, conseqüentemente,  $M_1 = (0,41 \pm 0,02) \times 10^3$  g e  $M_2 = (4,5 \pm 0,2) \times 10^3$  g. Então, o momento de inércia, segundo a equação (1) é:

$$I_g = (2,1 \pm 0,2) \times 10^5 \text{ g cm}^2.$$

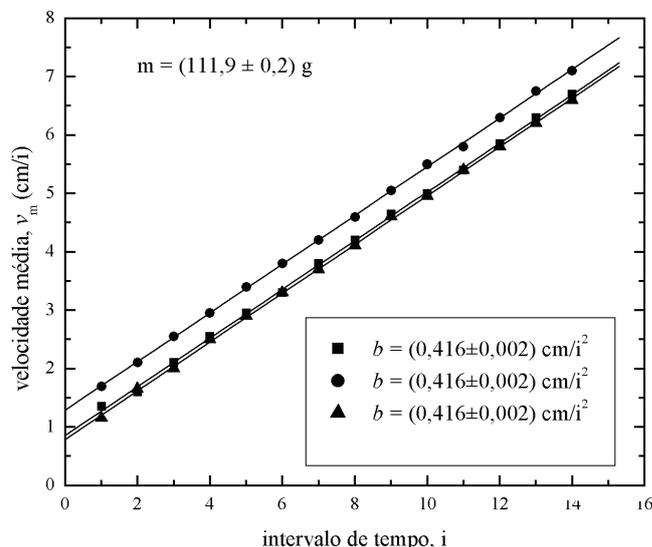


Fig. 5 - Gráficos de  $v_m$  em função de  $i$ , obtidos a partir das medidas feitas em fitas como aquela mostrada na Fig.4. Aqui foram analisadas fitas obtidas em três experimentos, usando  $m=(111,9\pm 0,2)$  g. Na legenda, a letra (b) refere-se ao coeficiente angular da reta em questão.

## V. Discussão

Em termos de valores absolutos,  $I_d$  é aproximadamente 8% maior que  $I_g$ , mas a incerteza no valor de  $I_d$  é menor que aquela no valor obtido para  $I_g$ . Isto se deve ao fato do método dinâmico envolver um número menor de variáveis, resultando em uma menor propagação dos erros. Adicionalmente, a aceleração linear,  $a$ , pôde ser determinada com uma precisão melhor que 2%, e com uma boa reprodutibilidade.

A utilização dos pequenos rolamentos auxiliou a reduzir substancialmente o atrito, principalmente quando comparamos os resultados obtidos em experimentos anteriores, onde havia o contato metal-metal (pinos cônicos pressionados contra sulcos cônicos no eixo do volante). A influência do atrito no experimento pode ser verificada analisando-se a equação (5): havendo atrito, a taxa de variação da velocidade, ou seja, a aceleração linear, deve diminuir, fazendo aumentar o termo entre parêntesis,  $(g-a)/a$ , e, conseqüentemente, o valor do momento de inércia  $I_d$ . E talvez devido a esse atrito, o valor experimental de  $I_d$  tenha sido um pouco maior que o valor de  $I_g$ . Outra explicação para a diferença nos resultados é pequenas variações de distribuição de massa do volante. Neste caso, o resultado obtido pelo método dinâmico apresenta uma maior confiabilidade que o geométrico.

## VI. Conclusão

Com base nos resultados obtidos, concluímos que a determinação do momento de inércia do volante pelo método dinâmico fornece valores com boa

precisão e uma boa reprodutibilidade. Atribuímos ambas à redução do atrito nos mancais utilizando pequenos rolamentos, e ao emprego do faiscador em substituição ao cronômetro acionado manualmente para determinar a aceleração linear.

## **Agradecimentos**

Agradecemos ao técnico da Oficina Mecânica do nosso Departamento, Cláudio L. Bocaiuva, pelos serviços de usinagem e retífica do volante.

## **Bibliografia**

TIPLER, P. A. **Física**. Rio de Janeiro: Guanabara, 1990. cap. 9.

HINRICHSEN, P. Correcting the correction. **Phys. Teach.**, v. 32, n. 7, p. 388, 1994.

ZIEMATH, E. C.; SANTARINE, G.; MALAGUTTI F<sup>o</sup>, W.; DOURADO, J. C. Determinação experimental da aceleração gravitacional no bairro Santana, 1998. Disponível em: <<http://www.rc.unesp.br/igce/fisica>>

PSSC (Physical Science Study Committee). **Física**. Brasília: Universidade de Brasília, 1966. cap. 20-21.