PRINCIPIA **30**(2): 533–576 (2026) doi: 10.5007/1808-1711.2026.e113981
Published by NEL — Epistemology and Logic Research Group, Federal University of Santa Catarina (UFSC), Brazil.

SOBRE UNA TEORÍA 'PURA' DE CASI-CONJUNTOS Y SU APLICACIÓN A UNA ONTOLOGÍA CUÁNTICA DE PROPIEDADES

DÉCIO KRAUSE
Universidad Federal de Río de Janeiro / CNPq, BRASIL
deciokrause@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-0463-2796

JUAN PABLO JORGE
Universidad de Buenos Aires, ARGENTINA
jorgejpablo@gmail.com
https://orcid.org/0000-0003-4517-8729

Abstract. In this paper, we introduce a quasi-set theory without atoms. Quasi-sets (qsets) can have as elements completely indiscernible things which do not turn out to be the very same thing as it would be implied if its underlying logic were classical logic. A quasi-set can have a cardinal, called its quasi-cardinal, but this is made so that, at least for the finite case, the quasi-cardinal is not an ordinal, and hence the indistinguishable elements of a quasi-set cannot be ordered. In the last sections, we show how the theory can be used to ground a quantum metaphysics of properties, which sees the quantum entities as bundles of properties, and we also introduce a new approach for the use of quantifiers in quantum physics.

Keywords: identity • indiscernibility • quasi-sets • quasi-cardinals • ontology of properties • quantum metaphysics • quantum quantifiers

RECEIVED: 09/12/2024 ACCEPTED: 31/08/2025

> La intuición y el método axiomático se apoyan mutuamente.
>
> Newton da Costa (1980, p.191)

Dedicado al Profesor Newton C. A. da Costa (1929-2024), que sugirió la expresión 'casi-conjunto'.

1. Introducción

La teoría de casi-conjuntos (q-conjuntos) nació motivada por la interpretación de uno de los creadores de la teoría cuántica, Erwin Schrödinger, sobre la identidad de las partículas cuánticas. Para Schrödinger, la noción de identidad carecería de sentido

para las partículas elementales de la física cuántica. El físico austríaco no dice lo que deberíamos entender por 'identidad' ni elaboró ningún sistema que considerase esa posibilidad. Para él, eso sería una simple consecuencia de la física. Pero es obvio que tal suposición trae consecuencias para la lógica, comprometiendo también a la teoría de conjuntos.[1]

Por otro lado, si intentamos analizar los aspectos lógicos de este compromiso, debemos centrarnos en la noción de identidad. ¿Qué es eso? Sabemos por la historia de la filosofía que desde la antigüedad hay discusiones sobre la identidad en el tiempo, sobre cómo una persona que llega a vieja puede ser la misma persona de siempre, o cuestiones como la del barco de Teseo, que trajo muchas discusiones a lo largo de la historia. Con respecto a nuestro trabajo, lo importante es el concepto lógico de identidad y cómo ese concepto se vincula con lo que dice la física cuántica.

Para nosotros, no hay *media identidad*, se trata de un concepto que o se lo toma totalmente o no se lo toma. Dos cosas son idénticas si son la misma cosa, esto es, si son contadas como una cosa sola. En caso contrario, son diferentes. Si comparten uno o más atributos, son indiscernibles con respecto a esos atributos y no algo como *relativamente idénticos*. La metafísica que heredamos en nuestra tradición occidental presupone que cuando hay dos o más cosas, estas son distintas y hay, por lo menos en principio, una diferencia entre ellas. Aunque esa suposición, según algunos autores como Max Jammer, viene por lo menos desde los estoicos (1966, p.339), fue sedimentada por la metafísica de Leibniz con su famoso Principio de la Identidad de los Indiscernibles, que fue incorporado a la lógica tradicional y está presente también en las matemáticas usuales y en la física clásica. En este marco, no se permite la existencia de 'otras cosas' que no sean propiedades o atributos que sirvan como Principios de Individuación, como todas las formas de *substancia*, *haecceities*, *thisness* o otras más.[2]

Entre otros, el matemático y físico Yuri Manin (1976) sugirió que la teoría usual de conjuntos no sería adecuada para tratar las colecciones de entidades cuánticas, así como Dalla Chiara y Toraldo di Francia (1986; 1993a) en su análisis de la estructura lógica de la física cuántica.

Nuestra intuición nos lleva a asumir la existencia de entidades que pueden ser completamente indiscernibles sin que resulten ser la misma cosa. Cuando cuestionó la definición de identidad de Whitehead y Russell en su célebre *Principia Mathematica*, que según el procedimiento usual define la identidad por medio de la completa indiscernibilidad, F. P. Ramsey defendió que no hay ninguna restricción lógica que nos impida suponer entidades completamente indiscernibles sin que sean "la misma cosa" (1950, pp.30-31). Es eso lo que pretendemos aquí: presentar una teoría matemática donde haya entidades que son "completamente indiscernibles" sin que resulten ser la misma entidad. Es claro que la teoría usual de la identidad debe ser cuestionada. La lógica que emplearemos, según la cual la noción usual de identidad

no se aplica a ciertas entidades, es un caso de lo que generalmente se denomina *lógicas no-reflexivas* (French and Krause 2006; da Costa and Bueno 2009).

Las motivaciones son varias: por una parte, podríamos simplemente seguir a Hilbert en que el matemático debe investigar todas las posibilidades lógicas (1976) y proceder de una manera puramente matemática. Pero no es así como pensamos actuar. Nuestra motivación proviene de la física cuántica. Recordando que la teoría usual de la identidad dice que siempre que tenemos dos o más cosas, esas cosas son discernibles por alguna propiedad (aunque no la conozcamos), no vemos cómo esa teoría puede ser aplicada en ciertas situaciones 'cuánticas', como en los condensados bosónicos, donde los bosones (que pueden compartir todas las propiedades) son *completamente indiscernibles* (Ketterle 1999; Evans et al. 2007).

Incluso cuando consideramos fermiones, que por definición no pueden compartir todas las propiedades (debido al Principio de Pauli), cuando están en un estado enredado (*entangled*), son tales que, a pesar de tener propiedades distintas, como el valor del espín, no son discernibles. No podremos decir cuál es cuál, y eso es contrario a lo que dicen la lógica y las matemáticas usuales. En efecto, si tenemos por lo menos una cantidad finita de cosas en la lógica clásica, y en especial si tenemos dos de ellas, *siempre* podemos dar nombres a ellas y esos nombres actuarán como designadores rígidos, comprobando su identidad y reidentificabilidad en otras situaciones, algo que ciertamente no se puede decir de cosas como, por ejemplo, los electrones. Para entidades de ese tipo, dicen esas teorías, podemos atribuirles nombres (designadores rígidos) que permitirán que los identifiquemos en otras ocasiones; creemos que el lector concuerda en que eso no es posible en la física cuántica. Por ejemplo, suponga que ψ_1 y ψ_2 sean las funciones de onda de los electrones de un átomo neutro de Helio; el sistema es descrito por una función anti-simétrica como la siguiente

$$\psi_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(\psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1\big).$$

Cabe destacar que mientras en ese estado entrelazado los electrones no tienen propiedades particulares, el sistema en su conjunto sí las tiene. Es en este sentido que decimos que no podemos decir cuál es cuál.

La teoría de casi-conjuntos fue propuesta para tener en cuenta colecciones de entidades que, sin que resulten ser la misma entidad, no pueden ser discernidas unas de otras, como los electrones del ejemplo arriba.[3] Esas colecciones *pueden* tener un cardinal, su *casi-cardinal*, o "q-cardinal" solamente, aunque sus elementos no puedan ser discernidos. Eso trae un problema. En las matemáticas usuales, como en sistemas comunes de teoría de conjuntos, la definición usual de cardinal viene dada por medio de ordinales (Jech, 2003, cap.3), o sea, los cardinales son ordinales especiales. De esta manera, al atribuir un cardinal a una colección, estaremos atribuyendo un ordinal, y eso hace que los elementos de la colección puedan ser discernidos. Ese

problema es superado en la teoría de casi-conjuntos y en particular en la teoría que presentamos en ese artículo.

La principal diferencia entre la teoría aquí presentada y las propuestas anteriores es que no se compromete con átomos (urelementos): es una teoría 'pura'. De este modo, 'todo lo que tenemos' son casi-conjuntos, que pueden ser considerados como extensiones de predicados (en un sentido distinto al de ZFC); así, podremos más fácilmente concebir una ontología cuántica de propiedades de manera más directa que si tuviéramos urelementos. Esa ontología dice que las entidades cuánticas son tomadas como colecciones de propiedades en un sentido que será presentado más adelante.

Para la teoría que presentamos abajo, dividimos el universo intencional (o del discurso) en dos categorías de cosas: los casi-conjuntos y los q-cardinales, que son dados por una teoría de apoyo (o auxiliar), de la misma forma que la teoría de los tensores es una teoría de apoyo a la relatividad general o la teoría de los números complejos es una teoría de apoyo a la mecánica cuántica usual. Dentro de los casi-conjuntos, se encuentran los conjuntos, los cuales obedecen los axiomas usuales de ZFC y, por lo tanto, cumplen la Teoría Estándar de la Identidad.

Después de presentar la teoría, proponemos algunas consideraciones filosóficas y posibles aplicaciones. Pero como la teoría que aquí presentamos está basada fuertemente en la teoría previa con átomos, que denotamos por '$\mathfrak{Q}$', daremos en la sección siguiente una presentación básica a las ideas principales de esa teoría, para luego adentrarnos en la nueva teoría $\mathfrak{Q}^{-}$.

2. La teoría $\mathfrak{Q}$ con átomos

Como es sabido, los átomos en una teoría de conjuntos como ZFA (Zermelo-Fraenkel con Átomos) son entidades que no son conjuntos, pero pueden ser elementos de conjuntos. En 1908, Zermelo los llamó urelementos (*Urelemente*) (1967). Los átomos, a pesar de no tener elementos, son distintos del conjunto vacío[4]. La teoría de conjuntos necesita adaptación para soportar su existencia; una buena exposición está en Suppes (1972).

La teoría $\mathfrak{Q}$ French and Krause (2006) encierra dos tipos de átomos: M-átomos y m-átomos. Los M-átomos desempeñan el papel de los urelementos de Zermelo y para ellos vale la teoría usual de la identidad. Los m-átomos son introducidos para interpretar a las entidades cuánticas, bajo la hipótesis de que el concepto usual de identidad de la lógica clásica no vale para ellos. Los q-conjuntos son aquellas cosas que no son átomos, y entre ellos hay casos especiales para los cuales los axiomas usuales de ZFA son aceptados; los llamamos *conjuntos*. Así, hay q-conjuntos que son conjuntos y otros que no lo son. Tanto unos como otros pueden admitir un cardinal,

que llamamos *casi-cardinal* (q-cardinal). Pero los q-cardinales, introducidos como una noción primitiva, son cardinales construidos por medio de conjuntos, y sabemos que la manera usual de definir cardinales es por medio de ordinales (Jech 2003).[5]

Así, si un q-conjunto x tiene un cardinal, digamos m, hay una biyección entre x y m y, por lo tanto, con el ordinal m, lo que hace que los elementos de x puedan ser discernidos por la ordenación impuesta por el ordinal. Este es de hecho un problema para la teoría $\mathfrak{Q}$. Con la teoría que presentamos en este artículo, ese problema es eliminado adoptando una *teoría de apoyo* para los q-cardinales, que no los ve como ordinales. Esa teoría es esencialmente la Aritmética de Peano y entonces los q-cardinales son cosas como $\overline{0}$, $s\overline{0}$, $ss\overline{0}$, etc. Es importante tener en cuenta que no se debe confundir esos q-cardinales con los números naturales que se pueden definir en la teoría, y que forman un modelo posible para los q-cardinales. Los números naturales, siguiendo a von Neumann, son los ordinales $\emptyset$, $\{\emptyset\}$, $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ etc., pero éstos son entes distintos de los q-cardinales de arriba.

Entonces, la nueva teoría $\mathfrak{Q}^{-}$ sirve al menos para dos propósitos; por un lado, permite que un q-conjunto sea formado por elementos indiscernibles y aun así tenga un q-cardinal finito sin que eso implique una ordenación de sus elementos.[6] Por otro lado, sin átomos, puede ser útil para fundamentar una *ontología cuántica de propiedades* (ver Krause et al. (2025)).

3. La teoría $\mathfrak{Q}^{-}$

En esta sección, presentamos los aspectos formales de una teoría de casi-conjuntos, pero ahora sin átomos (la teoría $\mathfrak{Q}^{-}$ es $\mathfrak{Q}$ sin los átomos).[7] Como es sabido, en una teoría de conjuntos con átomos, como la ZFA (Jech 2003; Suppes 1972), los átomos son entidades que no tienen elementos, pero son distintas del conjunto vacío. Así, en una teoría *sin* átomos, la única entidad que no tiene elementos es el conjunto vacío.

Para formular la teoría $\mathfrak{Q}^{-}$, postularemos la existencia de un universo $\mathfrak{B}$ (*Bereich*, según terminología de Zermelo) cuyos elementos son entidades de dos tipos: los *casi-conjuntos*, o *q-conjuntos*, y los *casi-cardinales*, o solamente *q-cardinales*. Los conjuntos son casos especiales de casi-conjuntos para los cuales vale la Teoría Estándar de la Identidad. Usaremos dos tipos de variables individuales: $x, y, z, \ldots$ para conjuntos y q-conjuntos, utilizando predicados unarios S y Q para distinguirlos respectivamente, y $m, n, p, \ldots$ para los q-cardinales. Los conjuntos son q-conjuntos, pero no vale la recíproca. Para los q-conjuntos que no son conjuntos, no se aplica la teoría usual de la identidad, sino una noción más débil de *indiscernibilidad*, representada por un predicado diádico '$\equiv$', que se aplica también a los conjuntos[8].

Además de los predicados anteriores, entre los símbolos primitivos del lenguaje $\mathscr{L}^{-}$ de $\mathfrak{Q}^{-}$, tenemos los predicados diádicos $\in$ (pertenencia), $=$ (identidad), que se

aplicará sólo a conjuntos y q-cardinales, y $\equiv$ (indiscernibilidad, o indistinguibilidad). El símbolo relacional binario K es también primitivo, indicando q-cardinalidad. Así $K(x,m)$ dice informalmente que el q-conjunto (o conjunto) x tiene q-cardinal m. Sin embargo, tenemos que tener cuidado con los q-cardinales por las razones que serán expuestas a continuación. Cuando tratamos con conjuntos finitos, sus q-cardinales pueden ser pensados como números naturales definidos por medio de conjuntos de la manera usual (cardinales clásicos). Pero si tratamos con q-conjuntos sus q-cardinales no son cardinales en el sentido de ordinales límite. Abajo esa analogía es puesta en detalles. Vamos a asumir que nuestro lenguaje tiene también los siguientes símbolos específicos: una constante individual $\overline{0}$, un símbolo funcional unario s y dos símbolos funcionales binarios $\otimes$ y $\oplus$.

Los *términos* de nuestro lenguaje son las variables individuales $x, y, z, \ldots$ y m, n, p,..., la constante $\overline{0}$, las expresiones de la forma $s(t)$, que denotaremos por st solamente, siendo t un término que se obtiene aplicando una cantidad finita de veces la operación s sobre $\overline{0}$ y, si t_1 y t_2 son términos de ese tipo, entonces $t_1 \oplus t_2$ y $t_1 \otimes t_2$ también lo son.

Diremos que son S-términos aquellos que denotan conjuntos, Q-términos los que denotan q-conjuntos y C-términos los que denotan q-cardinales. Las *fórmulas atómicas* son de la forma $S(x)$, $Q(x)$, $t_1 = t_2$ si ambos t_1 y t_2 son S-términos o ambos C-términos y $K(x,m)$, donde x es una variable para q-conjuntos o conjuntos y m variable para q-cardinales. Así, la identidad se aplica para conjuntos y q-cardinales, pero no para q-conjuntos. Además, están entre las fórmulas atómicas las expresiones de la forma $t_1 \equiv t_2$, para t_1 y t_2 términos cualesquiera[9], $t_1 \in t_2$ sólo si son S-términos o Q-términos; así, un conjunto puede pertenecer a un q-conjunto. Las fórmulas generales son obtenidas de forma habitual (Mendelson 2009). Las definiciones de variable libre y ligada en una fórmula, de variable libre o ligada en un término, etc., son las usuales.

Los postulados de $\mathfrak{Q}^{-}$ son divididos en tres grupos.

Grupo I – La lógica Si α, β y γ son fórmulas, los postulados lógicos de $\mathfrak{Q}^{-}$ son los siguientes, adoptando $\neg$, $\rightarrow$ y $\forall$ como primitivos:

(1) $\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)$

(2) $(\neg\alpha \rightarrow \neg\beta) \rightarrow ((\neg\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha)$

(3) $(\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)) \rightarrow ((\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \gamma))$

(4) $\forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow (\alpha \rightarrow \forall x\beta)$, donde x no aparece libre en α.

(5) $\forall x\alpha \rightarrow \alpha(t)$, donde t es un término libre para x en α[10]. Pero si la formula α es $K(x,m)$, el término t debe estar de acuerdo con el tipo de entidad que substituye, o sea, q-conjuntos o conjuntos para x y q-cardinales para m.

(6) Las reglas de inferencia son Modus Ponens y Generalización, esto es,

$$\frac{\alpha, \alpha \to \beta}{\beta}, \qquad \frac{\alpha}{\forall \nu \alpha},$$

donde ν es una variable para q-conjuntos o para q-cardinales. Además, estamos suponiendo que se satisfacen las condiciones habituales.

(7) $\forall_S x(x = x)$

(8) $\forall_S x \forall_S y(x = y \to (\alpha(x) \to \alpha(y))$

(9) $\forall m(m = m)$

(10) $\forall m \forall n(m = n \to (\alpha(m) \to \alpha(n))$

Las condiciones (8) y (10) tienen las restricciones usuales, que indicamos en la observación arriba con respecto a $K(x, m)$.

Vemos entonces que para los conjuntos y para los q-cardinales, vale la lógica clásica de primer orden con igualdad, y la lógica elemental clásica *sin* igualdad para los q-conjuntos. Los demás conectivos proposicionales y el cuantificador existencial son definidos de forma habitual. El carácter "no-reflexivo" de esa lógica está en que la noción usual de identidad no se aplica para todos los objetos de los cuales se puede hablar.

Grupo II - q-cardinales Los axiomas para los q-cardinales se asemejan a los axiomas para la aritmética elemental presentados en (Mendelson, 2009, Cap.3). Presentamos los respectivos axiomas a continuación recordando que $m, n, p, \ldots$ son variables para q-cardinales. Como es usual, $m \neq n$ abrevia $\neg(m = n)$ y así para otras situaciones similares.

(1) $\forall m(\overline{0} \neq sm)$

(2) $\forall m \forall n(sm = sn \to m = n)$

(3) $\forall m(\overline{0} \oplus m = m)$

(4) $\forall m \forall n(m \oplus sn = s(m \oplus n))$

(5) $\forall m(\overline{0} \otimes m = \overline{0})$

(6) $\forall m \forall n(m \otimes sn = (m \otimes n) \oplus m)$

(7) $\forall m(m^{\overline{0}} = s\overline{0})$

(8) $\forall m \forall n(m^{sn} = m^n \otimes m)$

(9) Si P es una propiedad que se aplica a q-cardinales, entonces

$$P(\overline{0}) \wedge \forall m(P(m) \to P(sm)) \to \forall m P(m).$$

De esos postulados, podemos derivar los resultados similares a los que derivan Mendelson *op.cit.* y Franco de Oliveira en (2004), así como definir cosas habituales de la aritmética en términos de q-cardinales, como $(\overline{2})^n$, que serán usados abajo y cuyo sentido se torna bastante obvio.

Definición 1 (q-cardinales) *Denotaremos los q-cardinales de la siguiente manera:*

1. $\overline{1} := s\overline{0}$
2. $\overline{2} := s\overline{1}$
3. *etc.*

Así, podemos escribir, como hicimos arriba, cosas como $K(x, \overline{1})$, $K(x, \overline{2})$ o, más generalmente, $K(x, s^n\overline{0})$.

Grupo III - conjuntos y q-conjuntos

(1) Los axiomas de ZFC para los conjuntos.

(2) $\forall x(S(x) \rightarrow Q(x))$

Debido a (1), podemos definir los *números naturales* en términos de conjuntos de la manera usual (al estilo de von Neumann), esto es,

1. $0 := \emptyset$
2. $1 := \{\emptyset\}$
3. $2 := \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$
4. etc.

Podemos aun establecer una correspondencia entre q-cardinales y números naturales como sigue; definimos una función f así, con x denotando un conjunto:

(1) $f(\overline{0}) = \emptyset$

(2) $f(s^{m \oplus \overline{1}}) = f(m)^+$, con $x^+ = x \cup \{x\}$.

Llamaremos ω al conjunto de los números naturales e introducimos las operaciones usuales entre esos números, como la adición '+', la multiplicación '·' y otras más. Los modelos de números naturales (o *estructuras de Peano* (Enderton 1977)) que existen en ZFC, como el modelo *estándar*, o sea, $\mathcal{N} = \langle \omega, 0, ^+ \rangle$, con n^+ denotando el sucesor conjuntista de n (es decir, $x^+ = x \cup \{x\}$), son también modelos de los q-cardinales. Pero el lector debe prestar atención al siguiente hecho: los q-cardinales *no son* los números naturales, o sea, no son ordinales. La idea es *no considerar* a los

q-cardinales como números naturales, así cuando atribuimos un q-cardinal a un q-conjunto, no estaremos asociando a él un ordinal, lo que haría que sus elementos puedan ser discernidos por medio de la biyección. La situación es similar a la que encontramos cuando verificamos que los espacios vectoriales de las matrices reales de orden 2 y el de polinomios reales de grado menor o igual a 3 son isomorfos. Pero una matriz no es un polinomio.

En conclusión, podemos razonar sólo intuitivamente como si los q-cardinales fueran los números naturales de ZFC. Por esa razón, pensamos que es bueno introducir el axioma (2) a seguir (escrito en una notación abreviada), que de cierto modo une los q-cardinales a los números naturales, y luego a conjuntos:

(2) $\forall m(s^m\overline{0} \equiv 1 + \cdots + 1)$, donde se suma 1 m veces. Como dicho arriba, este axioma (o esquema de axiomas) establece un vínculo entre los q-cardinales y los números naturales de manera bastante intuitiva: el q-cardinal $s \ldots s\overline{0}$ (m veces) se asocia al número natural $1 + \cdots + 1$ (m veces). En otras palabras, ellos tienen los mismos modelos, pero no pueden ser pensados como siendo la misma cosa; los números naturales, obtenidos de los axiomas de ZF, son ordinales, pero los q-cardinales no lo son.

Para uno de los axiomas siguientes, necesitamos de una definición. La definición introduce los *q-conjuntos "legítimos"*, o sea, los q-conjuntos que no son conjuntos. Entonces,

Definición 2 (Casi-conjuntos legítimos)

$$L(x) := \neg S(x)$$

Tenemos entonces los siguientes axiomas, recordando que variables como x pueden representar un q-conjunto legítimo o un conjunto:

(3) $\forall_S x \forall_S y(x \equiv y \rightarrow x = y)$

(4) $\exists_L x(x \equiv x) \wedge \forall x(x \equiv x)$

(5) $\forall x \forall y(x \equiv y \rightarrow y \equiv x)$

(6) $\forall x \forall y \forall z(x \equiv y \wedge y \equiv z \rightarrow x \equiv z)$

(7) $\forall y(S(y) \rightarrow \forall x(x \in y \rightarrow S(x)))$. Este axioma dice que los elementos de conjuntos son conjuntos. Así, un q-conjunto puede pertenecer a un conjunto si y solo si es un conjunto.

Un importante axioma es el Esquema de Separación, que nos permitirá formar q-conjuntos a partir de un q-conjunto dado. El lector debe prestar atención a su formulación, ya que no es estándar. No estaremos formando q-conjuntos de elementos que

pertenecen a un q-conjunto dado, porque sin la identidad, no podríamos saber si los elementos tomados son de hecho *aquellos* elementos. Así, la idea es la siguiente: dado un q-conjunto x con un q-cardinal m y una condición φ (fórmula de $\mathscr{L}^{-}$), formamos un q-conjunto con un q-cardinal no mayor que m, cuyos elementos son indiscernibles de elementos de x que satisfacen la condición φ[11]. Así, usando una analogía un tanto grosera, si tenemos una molécula de cafeína $C_8H_{10}N_4O_2$ y la vemos como un q-conjunto, podemos formar otro q-conjunto con, digamos, 2 carbonos, tres hidrógenos y un nitrógeno, pero no necesariamente con *aquellos* átomos que pertenecen a la molécula inicial. Además, si los átomos no pueden ser discernidos, como ya dice John Dalton en 1808, ¿cómo saber si son los mismos? (Dalton, 1808, p.143).[12]

Así, nuestro Esquema es formulado de la siguiente manera:

(8) [Esquema de Separación] Sea α una fórmula de $\mathscr{L}^{-}$. Entonces

$$\forall x \forall m(K(x,m) \rightarrow \exists y \forall z(z \in y \leftrightarrow \exists w \forall n(w \in x \wedge z \equiv w \wedge K(y,n) \wedge n \leq m) \wedge \alpha(z)))$$

Ese q-conjunto y será denotado del siguiente modo: $[z : \alpha(z)]_x$, observando que su q-cardinalidad no debe exceder la q-cardinalidad de x. En el axioma anterior, $n \leq m$ debe ser interpretado como $\exists p(m = n \oplus p)$.

Podemos asumir la existencia de clases de equivalencia de un cierto q-conjunto por la relación de indiscernibilidad, que como vimos por los axiomas anteriores, tiene las propiedades de una relación de equivalencia. O sea, dado un q-conjunto x y $z \in x$, sea α la fórmula definida por $\alpha(w) \leftrightarrow w \equiv z$. Entonces, del axioma (8) inferimos la existencia de un q-conjunto $[w : z \in x \wedge w \equiv z]_x$, que es una *clase de equivalencia* de indistinguibles de z que eventualmente, pero no necesariamente, están en x[13]. Con el axioma de la unión siguiente, podemos reunir esas clases de modo que formemos el conjunto cociente $x/_{\equiv}$, que será usado más adelante.

El Esquema de Separación nos permite mostrar la existencia de q-conjuntos sin elementos, que llamaremos *vacíos*, pero sin la identidad no podemos probar su unicidad. Sin embargo, debido al Axioma de la Extensionalidad Débil, que veremos abajo, podremos probar que todos esos vacíos son indiscernibles.

El modo de inferir la existencia de un q-conjunto sin elementos es adoptar una fórmula contradictoria, como $x \not\equiv x$ en el Esquema de la Separación. Denotaremos los q-conjuntos vacíos indiferentemente con '$\emptyset$'. Como no se puede utilizar la identidad para los q-conjuntos vacíos, y dado que los postulados de ZFC que valen para los conjuntos permiten que derivemos la existencia de un *conjunto* vacío, la única relación que tenemos entre los q-conjuntos vacíos y el conjunto vacío es la indiscernibilidad, y eso podrá ser demostrado a partir de las definiciones y del axioma de la extensionalidad débil que mostraremos abajo.

Para un mejor entendimiento de lo que viene después, es conveniente conocer más algunos axiomas estructurales.

(9) La q-cardinalidad de cualquier conjunto vacío es cero:

$$\forall x(K(x,\overline{0}) \leftrightarrow \neg\exists y(y \in x)).$$

El axioma de unión para q-conjuntos puede ser formulado para obtener, imitando a los conjuntos usuales, un q-conjunto $\bigcup x$ a partir de un q-conjunto x, cuyos elementos son q-conjuntos no vacíos. Admitimos esa generalización, pero lo formularemos solamente para q-conjuntos; así, dados x e y, el axioma dice que existe un q-conjunto, denotado por $x \cup y$, cuyos elementos son indiscernibles de los elementos de x o de y, y que su q-cardinalidad no es mayor que la suma de las q-cardinalidades de x e y.

(10) [Unión]

$$\forall x\forall y\exists z\forall w(w \in z \leftrightarrow \exists w'\exists w"((w' \in x \wedge w \equiv w') \vee (w" \in y \wedge w \equiv w")) \wedge \forall m\forall n(K(x,m) \wedge K(y,n) \rightarrow K(z,p) \wedge p \leq m \oplus n))$$

Con respecto a este axioma, queremos hacer las siguientes observaciones. De ser necesario, podríamos separar este axioma en al menos tres casos: i) el caso en el cual solo uno de los qsets es legítimo y el otro es un conjunto, ii) el caso donde ambos son conjuntos (no tan importante, ya que está considerado dentro de los axiomas de ZF) iii) el caso donde ambos qsets son legítimos. En el caso i), especialmente si son disjuntos, se podría imponer una restricción más fuerte sobre la cardinalidad del qset unión. Algo similar podría aplicarse al caso iii), esto es, al separarse, podríamos tener axiomas más fuertes. Pero dejaremos el axioma como se presenta, porque contempla los casos que deseamos y de ser necesario podemos presentar otros más específicos.

Note una vez más que los elementos del q-conjunto unión $x \cup y$ no necesitan ser elementos de cualquiera de esos conjuntos, bastando que sean indiscernibles de elementos de ellos.

El próximo axioma dice que si tenemos un q-conjunto con un cierto q-cardinal m, entonces si le agregamos un elemento que no le pertenece, el q-cardinal del nuevo q-conjunto es incrementado en una unidad. Observamos que en el axioma, sm denota el 'sucesor' de m, que podemos también escribir $m \oplus \overline{1}$.

(11) $\forall x\forall y\forall m(K(x,m) \wedge K(y,\overline{1}) \wedge \neg\exists z(z \in x \wedge z \in y) \rightarrow K(x \cup y, sm))$.

En una teoría usual de conjuntos, el axioma de par nos dice que, dados dos conjuntos cualesquiera x e y, existe un conjunto que tiene a ellos como elementos y nada más. Pero ese 'nada más' requiere de la identidad. En $\mathfrak{Q}^{-}$, lo más que podemos hacer es requerir que haya un q-conjunto con elementos indiscernibles de x o y, pero en ese caso perdemos, por así decir, el control de la cantidad de elementos, porque

no hay ninguna restricción sobre la cantidad de elementos indiscernibles de un elemento dado. Así, para evitar que hablemos de *clases* (en particular de *clases propias*), tomamos los indiscernibles de x y de y de algún q-conjunto w dado previamente que tenga un q-cardinal dado. Para formular el axioma de manera más fácil, vamos a considerar la siguiente definición de 'unitario' de un elemento.

Definición 3 (Unitario Débil) *Sea w un q-conjunto y sean x, y elementos de w. Por medio de la condición $\alpha(t) \leftrightarrow t \in w \wedge t \equiv x$, obtenemos por Separación el q-conjunto de los indiscernibles de x que pertenecen a w, que denotamos $[x]_w$.*

Entonces el Axioma de Par puede ser formulado así:

(1) $$\forall_L w \forall x \forall y (x \in w \wedge y \in w \rightarrow \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow (t \in [x]_w \vee t \in [y]_w)))$$

El caso donde w es un conjunto ya está considerado en el axioma de par de ZFC. Denotamos ese q-conjunto por

$$[x, y]_w.$$

Es claro que no hay, en principio, nada que indique la q-cardinalidad de ese q-conjunto, salvo que no supera la q-cardinalidad de w. Si $x \equiv y$, incluso puede ser $\overline{1}$. El axioma podría ser mucho más general y decir que formamos $[x, y]_w$, no tomando elementos que estén en w, sino que sean indiscernibles de elementos de w, mientras limitemos su q-cardinalidad para no formar q-clases propias.

El unitario débil puede ser establecido por una definición, como la siguiente:

Definición 4 (Unitario Débil)

$$[x]_w \coloneqq [x, x]_w.$$

Una observación es importante en este punto. Filósofos como Otávio Bueno dicen que la teoría de q-conjuntos tiene problemas con respecto a cosas como la definición precedente, porque, según él, la variable x en el *definiens* necesitaría hacer referencia a *un mismo* elemento, y eso requiere identidad (Bueno 2023). Esa afirmación no procede, porque la definición simplemente establece un caso particular del Axioma de Par, que podemos indicar mediante el siguiente teorema, cuya prueba es inmediata:

Teorema 1

$$\forall_L w \forall x (x \in w \rightarrow \exists z \forall t (t \in z \leftrightarrow t \in [x]_w)).$$

Si w es un qset legítimo, entonces z puede ser tanto un conjunto como un qset legítimo en función del x.

Retornando al q-conjunto cociente, note que utilizando el axioma de arriba, podemos formar los elementos del q-conjunto $t/_{\equiv}$, a saber, $[x]_t$, $[y]_t$, etc., para $x, y, \ldots \in t$.

(13) [Axioma de la Extensionalidad Débil, AED]

$$\begin{aligned}\forall x \forall y \forall n \big((\forall z \in x/_{\equiv})(\exists w \in y/_{\equiv})(K(z,n) \rightarrow K(w,n)) \wedge \\ \forall u \forall v (u \in z \wedge v \in w \rightarrow u \equiv v)) \\ \wedge (\forall w \in y/_{\equiv})(\exists z \in x/_{\equiv})(K(w,n) \rightarrow K(z,n) \\ \wedge \forall u \forall v (u \in w \wedge v \in z \rightarrow u \equiv v))) \rightarrow x \equiv y \big)\end{aligned} \tag{2}$$

Note el lector que si utilizamos la relación de identidad ($=$) en lugar de la relación de indiscernibilidad, entonces las clases de equivalencia de $x/_{\equiv}$ serán unitarias (lo mismo con $y/_{\equiv}$) y el axioma se reduce al Axioma de Extensionalidad de ZFC; en ese caso, $x \equiv y$ no es más que $x = y$.

¿Qué dice este axioma? Una lectura cuidadosa mostrará que nos dice que si los q-conjuntos x e y tienen 'la misma cantidad' (dada por q-cardinales) de elementos indiscernibles, entonces x y y son indiscernibles.

El axioma EAD permite probar lo que dijimos anteriormente, que todos los q-conjuntos sin elementos son indiscernibles. La prueba es inmediata, recordando que el q-cardinal de esos q-conjuntos es $\overline{0}$.

La noción de sub-q-conjunto también es importante y necesita consideración. Primero, podemos decir que $x \subseteq y$ si todos los elementos de x son también elementos de y, como es usual. Pero tendremos un problema. Para saber si un determinado elemento $z \in x$ es elemento de y, debemos ser capaces de mostrar (designar) un elemento $w \in y$ que sea *idéntico* a z, y eso requiere la identidad. Por ese motivo, introducimos dos definiciones de sub-q-conjuntos; la nueva definición dice que dado un q-conjunto y, podemos formar un q-conjunto x (por ejemplo, usando el Esquema de la Separación) con elementos indiscernibles de elementos de y, mientras que la q-cardinalidad de x no supere la q-cardinalidad de y. Observamos que eso ya fue hecho arriba, pero ahora le daremos un nombre.

Definición 5 (Sub-q-conjuntos) *Definimos sub-q-conjuntos de dos modos:*

(1) $x \subseteq y :\equiv \forall z (z \in x \rightarrow z \in y)$.

(2) $x \subseteq^* y :\equiv \forall z (z \in x \rightarrow \exists w \forall m \forall n (w \in y \wedge z \equiv w \wedge K(x,m) \wedge K(y,n) \rightarrow m \leq n))$

Como siempre, ejemplos tomados de situaciones de las ciencias particulares son importantes. Supongamos que tenemos un átomo de Litio, Li, cuya descomposición

electrónica es $1s^2\ 2s^1$. Podemos pensar en un q-conjunto con tres elementos que simule los electrones de ese átomo, y también en sub-q-conjuntos de él, por ejemplo uno conteniendo como elemento solamente al electrón que está en el segundo nivel de energía. En ese caso, estamos pensando en un electrón *que está* en el átomo y entonces usaríamos el símbolo $\subseteq$. Pero podemos también pensar en la ionización del átomo que eliminaría el electrón más externo, dándonos un catión Li^+. Podemos también hacer la operación inversa, haciendo al catión capturar un electrón de modo de obtener un átomo neutro nuevamente. En ese caso, no podemos decir ni que el electrón capturado es el mismo que aquél que fue eliminado ni que el 'nuevo' átomo neutro es el mismo que el primero. Son indiscernibles. Pero ahora, tratándose del primer átomo y del electrón capturado, sería más apropiado decir que el q-conjunto formado por el electrón capturado es un sub-q-conjunto del primer átomo en el sentido de $\subseteq^*$.

Eso tiene consecuencias interesantes. Por ejemplo, del Esquema de Separación, dado un q-conjunto x y una condición α, cuando inferimos la existencia de un q-conjunto *de elementos de* x que obedecen α, en verdad deberíamos decir que obtenemos un q-conjunto de elementos que son indiscernibles de los elementos de x que obedecen α, así que si llamamos y a ese q-conjunto, deberíamos escribir $y \subseteq^* x$. De ahora en adelante, vamos escribir **subq** para indicar sub-q-conjuntos en el sentido de $\subseteq$ y **subq*** para los q-conjuntos formados en el sentido de $\subseteq^*$.

Algunas consecuencias de la definición precedente son las siguientes, que son fáciles de comprobar:

1. $x \subseteq y \rightarrow x \subseteq^* y$
2. $x \subseteq^* y \wedge y \subseteq^* x \leftrightarrow x \equiv y$

Es inmediato verificar que si x es un conjunto, entonces $x \subseteq y \leftrightarrow x \subseteq^* y$.

Utilizando este nuevo concepto, podemos introducir una nueva relación de pertenencia, que la denotaremos mediante $\in^*$:

Definición 6 (Pertenencia débil) $x \in^* y := \exists w(w \in y \wedge w \equiv x)$

También se prueba que si x o y son conjuntos, entonces $x \in y \leftrightarrow x \in^* y$.

Con esa noción, podemos hablar de *elementos potenciales* de un q-conjunto del modo siguiente. Suponga que tenemos un q-conjunto w y que x sea uno de sus sub-q-conjuntos. Definimos entonces la *nube* de x relativa a w como (hablando intuitivamente) siendo formada por los elementos de w que tienen indiscernibles en x, esto es, que 'podrían' estar en x. Intuitivamente, si tenemos una muestra de un elemento que puede cambiar componentes con otros elementos o con el ambiente, entonces podemos hablar de entidades que *podrían* pertenecer a la muestra debido a la posibilidad de cambio entre entidades de la misma naturaleza (por ejemplo, electrones por electrones).[14]

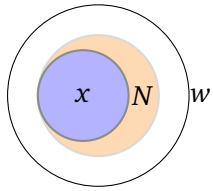

Figura 1: Un q-conjunto x y su nube N relativa al q-conjunto w.

Estas nuevas nociones de $\subseteq^*$ y $\in^*$ son interesantes. Si en el axioma de par (1) y Teorema 1, pidiésemos $x \in^* w$ (en vez de $x \in w$), resultarían equivalentes $t \in [x]_w$ y $t \in^* [x]_w$. En otras palabras, se podría pedir que, en vez de elementos de w, se tomen otros elementos indiscernibles de los de w, quizás de otro sub-q-conjunto más amplio w'. Los siguientes resultados se siguen directamente de las definiciones, pero es conveniente remarcarlos.

Teorema 2 *Sea w un q-conjunto y $x \in w$. Entonces tenemos que*

1. $t \in [x]_w \leftrightarrow t \equiv x \wedge t \in w \wedge x \in w$
2. $t \in^* [x]_w \leftrightarrow \exists t'(t' \in [x]_w \wedge t' \equiv t) \wedge x \in w$.

Note que t' no pertenece necesariamente a w, pues la definición de pertenencia débil no impone ninguna restricción al respecto.

Definición 7 (Nube de un q-conjunto) *Sea w un q-conjunto y sea $x \subseteq w$. La nube de x relativa a w es el q-conjunto $N(x,w)$ definido como sigue:*

$$[y \in w : \exists z \in x \wedge z \equiv y]$$

Claro que es deseable que la q-cardinalidad de x sea mantenida. Así, su nube sería algo como su extensión a w.

Tomemos otra analogía física para remarcar la importancia y sentido físico de este concepto. Consideremos nuevamente un átomo de sodio. Sabemos que hay ocho electrones en el segundo nivel de energía. Sabemos discernir los electrones de ese nivel por sus números cuánticos (Mahan 1975, §10.6). Pero no podemos saber cuáles de los once electrones son los electrones que, en un cierto momento, están en ese nivel,[15] ya sea porque los electrones están sujetos a los saltos cuánticos, como también porque cambian de niveles de energía manteniendo la estabilidad del átomo. En otras palabras, una formalización más precisa que indicase que la colección de los electrones del segundo nivel de energía es una subcolección de la total colección de electrones sería utilizando la noción de $\subseteq^*$.

Otra observación interesante es la siguiente. Si consideramos todas las nubes de los elementos de un q-conjunto w, podemos definir operaciones entre ellas, como la intersección, el complemento y la unión de nubes. Lo que obtenemos es un *álgebra de nubes* cuya estructura no es booleana, como pasaría en el caso de subconjuntos de un conjunto clásico. La estructura obtenida es un retículo diferente, que se asemeja a un retículo ortomodular, como es el caso del álgebra de los subespacios en física cuántica; los detalles están en Nascimento et al. (2011). Con las nubes, podemos también aproximar la idea de *quasets* de (Dalla Chiara y Toraldo di Francia 1993b), como es indicado en Jorge et al. (2023).

Retomando con la axiomática de $\mathfrak{Q}^{-}$, el axioma de q-conjunto potencia sigue, en principio, a su análogo de ZFC.

Si x es un q-conjunto, entonces existe un q-conjunto, denotado por $\mathscr{P}(x)$, que tiene como elementos los **subq** de x. O sea, [16]

(14) $\forall x \exists y(\forall z(z \in y \leftrightarrow z \subseteq x))$.

El próximo axioma necesita explicaciones y tiene relaciones con el anterior. Ese axioma nos permite razonar como si la cantidad de **subq** de un q-conjunto x fuera la misma que en el caso de conjuntos; si su q-cardinal es n, entonces es consistente con la teoría suponer que hay n **subq** unitarios, C_2^n **subq** con dos elementos (número de combinaciones de los n elementos tomados dos a dos), etc. En símbolos y recordando las notaciones anteriores,

(15) $\forall x(K(\mathscr{P}(x), \overline{2}^n) \leftrightarrow K(x, n))$.

El próximo axioma es importante para que podamos razonar con los q-conjuntos del modo usual. Él dice que si el q-cardinal de un q-conjunto x es n, entonces x tiene un **subq** de q-cardinalidad p para cualquier $p \leq n$. En símbolos podemos escribir

(16) $\forall x \forall n(K(x, n) \rightarrow (\forall p(p \leq n) \rightarrow \exists y(y \subseteq x \wedge K(y, p))))$.

Lo más importante para nosotros es que, dado un q-conjunto x tal que $K(x, n)$, podemos pensar (consistentemente) que hay por lo menos un sub-q-conjunto de x con q-cardinal uno. Si todos los elementos de x son indiscernibles entre ellos, entonces todos esos 'unitarios' serán indiscernibles, de acuerdo con la extensionalidad débil, 2.

Recordemos que $p \leq n$ en el axioma de arriba significa $\exists m(p \oplus m = n)$.

Teorema 3 *Si $K(x, n)$ y los elementos de x son todos indiscernibles, entonces todos los **subq** de x con la misma q-cardinalidad son indiscernibles.*

Prueba: Consecuencia inmediata del axioma de extensionalidad débil (2). ∎

Este resultado trae consecuencias interesantes. Por ejemplo, sea $K(x, n)$, esto es, un q-conjunto que (intuitivamente) tiene n elementos ($n \geq \overline{1}$) y supongamos que

esos elementos son indiscernibles. ¿Cuántas posibilidades tenemos de distribuir los n elementos en $p \leq n$ sub-q-conjuntos de x (que podemos entender como denotando 'estados cuánticos')?[17] Un simple razonamiento convencerá al lector de que el número se obtiene mediante la fórmula que expresa la estadística de Bose-Einstein, es decir,[18] utilizando la notación de los números naturales por simplicidad,

$$C_{p-1}^{n+p-1} = \frac{(n+p-1)!}{n!(p-1)!}.$$

Con los axiomas de arriba, podemos inferir que si un q-conjunto tiene un q-cardinal $n \geq \overline{1}$, entonces hay n **subq**s de él con q-cardinales unitarios; a esos los llamamos de *unitarios fuertes*, o sea,

Definición 8 (Unitarios Fuertes) *Sea x un q-conjunto con q-cardinal n distinto de $\overline{0}$. Si $y \in x$, decimos que un q-conjunto es un* unitario fuerte *de y relativo a x, y lo denotamos por $[\![y]\!]_x$, si su q-cardinal es $\overline{1}$.*

La no exigencia de que y pertenezca a x se explica así (el lector puede notar que en la definición de arriba se pide $y \in x$): supongamos tener un átomo cualquiera con muchos electrones, que los describimos como siendo un q-conjunto x, y dejemos que y denote un electrón. Entonces, $[\![y]\!]_x$ designa un q-conjunto formado por un electrón del átomo en cuestión. Es evidente que no podemos 'identificar' el electrón, aunque podamos individualizarlo, por ejemplo, por sus números cuánticos específicos.

Es importante enfatizar que eso marca una distinción, generalmente no hecha en la filosofía de la física, entre *identidad* e *individuación*. En nuestro entendimiento, la primera es un concepto *absoluto*: no hay media identidad; o una cosa tiene identidad o no la tiene, y ese segundo caso, para nosotros, ocurre con las entidades cuánticas[19]. Una cosa con identidad puede (por lo menos en principio) ser reconocida como tal cosa en todos los contextos en que esté presente (o en todos los mundos en que exista), no pudiendo ser confundida (a no ser por algún lapso epistemológico) con otra entidad. Por otro lado, la individuación dice respecto a algún principio metafísico que establece una relación ontológica entre entidades; como dice J. Lowe, "lo que 'individualiza' un objeto es cualquier cosa que haga del objeto el objeto singular que es", o sea, "cualquier cosa que haga de él *un* objeto, distinto de los demás, y el mismo objeto que él es en oposición a cualquier otra cosa" (Lowe 2003).[20]

Realicemos una observación importante respecto a los unitarios fuertes. Eliza Wajch insiste (correspondencia privada) en que no podemos probar que un unitario fuerte tenga sólo un elemento. Nuestra respuesta es la siguiente: lo que no podemos hacer es saber qué elemento particular pertenece a un unitario fuerte $[\![y]\!]_x$, esto es, atribuirle un nombre propio que actúe como un designador rígido.[21] Lo único que podemos decir es que su elemento pertenece a x y es indiscernible de y. Pero como

el q-cardinal de $[\![y]\!]_x$ es uno, podemos razonar, al menos metamatemáticamente, concluyendo que tiene un solo elemento.

Por otro lado, podríamos realizar el siguiente razonamiento. Supongamos tener un unitario fuerte $[\![y]\!]_x$, que por definición tiene q-cardinal $\overline{1}$. Usando la noción de pertenencia débil $\in^*$, podríamos pensar en sub-q-conjuntos de $[\![y]\!]_x$ con q-cardinales mayores que uno. Eso podría ser lo que E. Wajch quiere decir cuando dice que no se puede probar que un unitario fuerte tiene solamente un elemento, como vimos arriba.

Pero para que la idea de Wajch fuese posible en $\mathfrak{Q}^-$, deberíamos sacar la restricción sobre la cardinalidad que impusimos en la definición 5-(2) de $\subseteq^*$. Con la definición tal cuál está ahora, lo que está pasando es que Wajch piensa estar consiguiendo sub-q-conjuntos de $[\![y]\!]_w$ con más de un elemento, pero, en realidad, debido a la restricción impuesta en nuestra definición sobre la q-cardinalidad, lo que está pasando es que está poniendo todos los elementos sobrantes en "otros" q-conjuntos indiscernibles del singulete fuerte. Así, ella piensa tener un sub-q-conjunto del singulete fuerte con n elementos, pero lo que tiene son n sub-q-conjuntos del singulete fuerte, indiscernibles entre sí y que tienen un único elemento cada uno.

Los unitarios fuertes nos permiten hablar de una sola entidad cumpliendo una cierta condición sin que seamos capaces de decir de qué entidad se trata. Sea $\alpha(x)$ una condición que se aplica a q-conjuntos y sea y un q-conjunto tal que $x \in y$; por ahora, denotaremos el q-cardinal de y por $|y|$, suponiendo que $|y| \geq \overline{1}$. Dicho lo anterior, podemos escribir

$$\exists x \exists y \exists z (y \in z \wedge x \in [\![y]\!]_z \wedge \alpha(x)).$$

Esa expresión puede ser entendida como una *descripción definida cuántica*, pues está hablando de una sola entidad que cumple la condición dada pero que no puede ser identificada. Para más detalles sobre las descripciones cuánticas, vea de Barros et al. (2024).

De ser necesario, podemos fortalecer la teoría con los axiomas de infinito, regularidad, reemplazo, par y elección para el caso de los q-conjuntos, como haremos abajo.

Definición 9 (Diferencia de q-conjuntos) *Sean x e y q-conjuntos, tales que $x \subseteq y$. Definimos la diferencia $y \setminus x$ como un q-conjunto cuyos elementos son los elementos de y que no pertenecen a x.*

La definición anterior tiene también consecuencias interesantes. Sea $x \subseteq y$ y tome z como q-conjunto $y \setminus x$. Supongamos que los elementos de y son indistinguibles. Entonces, ¿cómo podemos saber qué elementos de y pertenecen a z (o a x)? No existe

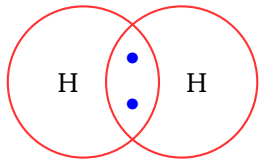

Figura 2: Un enlace covalente de dos átomos de hidrógeno en una representación antigua (con los electrones representados como bolas pequeñas). No se puede decir cuál electrón pertenece a cuál átomo.

una forma "objetiva" de saberlo. Eso es como preguntarse cuál electrón pertenece a cuál átomo de hidrógeno en una enlace covalente, como ilustrado en la figura abajo.

Estas preguntas que se refieren a una posible identidad de las entidades cuánticas no tienen sentido. Simplemente sabemos que allí (en el enlace covalente) hay dos electrones y esto es suficiente, o sea, lo que importa es el *tipo* de las entidades y su cantidad, pero no su identidad, y esa posibilidad es lo que la teoría de los q-conjuntos ofrece.

Alguna persona puede pensar que la situación cambia si uno de los electrones está en Marte y el otro está en la Luna, pero debemos tener cuidado en no concluir apresuradamente. Los electrones no son pequeñas bolitas que se puedan pensar localizadas en puntos específicos. Debemos recordar que al considerar el sistema conjunto formado por los dos electrones (uno en Marte y otro en la Luna), la función de onda que representa el sistema total es antisimétrica y cuando tomamos su cuadrado para obtener alguna probabilidad, sí aparece un término de interferencia, que rigurosamente no se puede eliminar excepto para algunos propósitos prácticos[22]. Ignorar el término de interferencia, como suelen hacer los físicos en su "práctica física", proporciona buenos resultados, pero es algo similar a ignorar los infinitesimales en el cálculo anterior; como ha demostrado George Berkeley, los resultados pueden ser buenos, pero los fundamentos lógicos se vuelven extraños; ver (Krause 2024) para una discusión.

Sobre la *heterodoxia*, una visión que procura mantener la identidad clásica de las entidades cuánticas haciendo sus descripciones en términos de proyectores simétricos, véase (Bigaj 2022; Dieks 2023). En nuestra opinión, ésa es una tentativa más para que no se necesite cambiar la lógica — pero no ayuda a captar la metafísica de no-individuos. Insistiendo, lo que importa en física cuántica es que existen tipos de cosas con las que estamos tratando y sus cantidades, y la teoría de casi-conjuntos nos permite considerar esta idea de manera bastante detallada, no importa si se trata de excitaciones de campo o de otra cosa. Nosotros concordamos (también en las teorías de campos) con Anthony Zee, cuando él afirma que "en el mundo cuántico, la identidad individual no existe" (2023, p.299). En la misma línea, podemos suponer que

si existe algún elemento de y que no pertenece a x, entonces el q-conjunto z (o sea, $y \setminus x$) de la discusión anterior no está vacío y esto es suficiente cuando los elementos de y son indiscernibles.

(17) El siguiente axioma dice que si sacamos un elemento de un q-conjunto, su q-cardinalidad decrece de una unidad:

$$\forall x \forall n(K(x,n) \rightarrow (\forall y \subseteq x)(K(y,\overline{1}) \rightarrow K(x \setminus y, n-\overline{1}))).$$

Donde $K(x \setminus y, n-\overline{1})$ significa "$K(x \setminus y, m) \wedge n = sm$". Así, podemos "eliminar" un elemento de un q-conjunto x admitiendo la existencia del q-conjunto y, a pesar de que no podamos identificar el elemento eliminado. La situación es similar a lo que sucede cuando ionizamos un átomo de helio neutro. El átomo de He tiene dos electrones y al darle cierta cantidad de energía, podemos eliminar uno de los electrones obteniendo un catión He^+. Para este catión, se cumple que $K(He^+, \overline{1})$, mientras que para el átomo original, se tiene $K(He, \overline{2})$. Pero nada puede decirnos qué electrón fue eliminado.

Esa posibilidad de 'retirar' un elemento de un q-conjunto fue considerada por G. Domenech y F. Holik y también por J. Arenhart para atribuir un q-cardinal para q-conjuntos finitos. La idea es que, si hay n elementos en un q-conjunto, podemos realizar n pasos retirando sus elementos uno a uno hasta que resulte el q-conjunto vacío. El número de pasos es el cardinal del q-conjunto; vea (Domenech and Holik 2007; Arenhart 2011).

El resultado siguiente es importante:

Teorema 4 ("Inobservabilidad" de permutaciones) *Sean x, y, z q-conjuntos, tales que $x \subseteq y$ y sea $w \in x$. Si $z \in y$ y $z \equiv w$, pero $z \notin x$, entonces*

$$(x \setminus [\![w]\!]_x) \cup [\![z]\!]_y \equiv x.$$

Prueba: Si $K(x,n)$, entonces $K(x \setminus [\![w]\!]_y, n-\overline{1})$ por axioma (17). Por otro lado, $K([\![z]\!]_y, \overline{1})$ implica que $K(x \setminus [\![w]\!]_y \cup [\![z]\!]_y, n)$ por el axioma (10). Como $w \equiv z$, tenemos que $[\![w]\!]_y \equiv [\![z]\!]_y$ de lo cual se sigue el teorema. ∎

Este es otro resultado polémico de la teoría de los q-conjuntos, aunque nos parezca intuitivo. El teorema dice que si "intercambiamos" un elemento de x por uno indiscernible, el q-conjunto resultante es indiscernible del original. Esto es análogo al átomo de He del ejemplo anterior; si hacemos otro experimento con el catión He^+ haciendo que él capture un electrón, quedando un nuevo átomo neutro, no tiene sentido preguntarse si el electrón capturado es el mismo que el electrón emitido, ni si el nuevo átomo neutro es lo mismo que el original.

A. Sant'Anna (2023) critica este resultado diciendo que el teorema no es verdadero en ningún modelo de permutación de $\mathfrak{Q}$ (la teoría con átomos) sin los axiomas de elección y q-cardinalidades de esa teoría.[23] Como él enfatiza, la prueba del teorema depende de la noción de q-cardinalidad. Por tanto, si se eliminan los axiomas correspondientes como hizo él, el resultado no se puede demostrar. Estamos de acuerdo en este punto: sin axiomas acerca de q-cardinales, la teoría, al ser expresivamente más débil, no permite tal prueba. Sin embargo, sería un error decir que algo es falso si no puede ser probado. Observe que en ningún modelo de permutación hay m-átomos como plantea $\mathfrak{Q}$.

En efecto, el truco para construir los modelos de permutación para una teoría de conjuntos con átomos es hacer que la estructura utilizada como modelo sea tal que admita automorfismos no triviales. Los objetos serán indiscernibles (en la estructura) si hay un automorfismo que asocie un objeto al otro. Por ejemplo, las 'células' $\{a, \overline{a}\}$ de Fraenkel (1967) son tales que a y $\overline{a}$ son urelementos que no se distinguen *dentro* del modelo, y eso hace que no se pueda definir una función de elección, demostrando que el Axioma de Elección es falso en ese modelo. Pero *vistos de fuera*, los urelementos son discernibles; en efecto, la teoría (ZFA) tiene un Axioma de Par, que permite formar los unitarios $\{a\}$ y $\{\overline{a}\}$, y esto los distingue, puesto que la teoría usual de la identidad vale para ellos. O sea, los urelementos son indiscernibles solamente para quién habita el modelo, no para los extraños a él. En los modelos de permutaciones para ZFA, hay átomos que pretenden desempeñar el papel de los m-átomos de $\mathfrak{Q}$, pero detrás de la cortina (o sea, en el universo de conjuntos) se revelan como individuos de ZFA. El lobo con cara de oveja.

Para que veamos eso, podemos razonar de la siguiente manera. Para simplificar, tomemos una reconstrucción del modelo de segunda permutación original de Fraenkel. En ZFA, sea $x = \{a, \overline{a}\}$ una de las células de Fraenkel (1967). En el modelo de permutación adecuado, $\pi(a) = \overline{a}$, siendo π un automorfismo del modelo, obtenido de cualquier permutación de los átomos. Por tanto, los dos elementos de la célula son indiscernibles dentro del modelo, o sea, invariantes por automorfismos, pero pueden ser discernidos *desde fuera* del modelo. Sea $x' = x \setminus \{a\}$ y luego $x'' = x' \cup \{a\}$. Se sigue que $x = x''$. Estas operaciones se pueden realizar porque los elementos son individuos dotados de identidad, por lo que podemos identificar a a como siendo el mismo átomo en ambas situaciones. Esto es exactamente lo que dice el teorema anterior, pero utilizando la relación de indistinguibilidad en lugar de igualdad. No vemos razones por las que el teorema pueda ser problemático.

Dicho esto, una pregunta puede intrigar al lector atento. Si α es una fórmula y alguna x satisface α, ¿todo y, tal que $y \equiv x$, la satisface también? Como explicitamos anteriormente, la relación de indiscernibilidad no implica necesariamente substitutividad. Observe que si esto fuera cierto, dado que la indiscernibilidad es reflexiva, sería la identidad estándar.[24] Por lo tanto, debemos demostrar que este no es el caso.

Consideremos un unitario fuerte x cuyo único elemento se denota por y (recuerde que no hace sentido preguntarse sobre la identidad de y), por lo que podemos tomar α como $y \in x$. Por supuesto, no podemos saber qué entidad es y, pero, como $K(x, \overline{1})$, sabemos que hay algo en el q-conjunto y que 'no hay nada más allí'. Supongamos que $z \equiv y$, ¿podemos concluir que $z \in x$ sólo porque z (sea lo que fuere) es indiscernible de y? Por supuesto que no. Esto implicaría que x contendría como elementos todos los indiscernibles de y, lo que significaría que su q-cardinalidad no sería uno, ya que habría más indisceribles de x disponibles. En otras palabras, de $y \in x$ y de $z \equiv y$, no podemos concluir que $z \in x$. Entonces, la relación de indiscernibilidad no es una congruencia, siendo distinta de la relación de identidad estándar.

Dado que estamos preparando la teoría $\mathfrak{Q}^{-}$ para aplicaciones en el dominio cuántico, pensamos que no necesitamos, en principio, una versión del Esquema de Reemplazo. De cualquier modo, pensamos que si llegara a necesitarse, se podría asumir exactamente como en $\mathfrak{Q}$ (ver de Barros et al. (2024) y también (French and Krause, 2006, §7.2.4)). Más relevante parece ser la versión "problemática" del axioma de elección.

El postulado siguiente se denominó "Axioma de elección" en French and Krause (2006) y "Axioma de quasi-elección" en de Barros et al. (2026). Debido a las críticas, que nos parecen discutibles, preferimos cambiar su nombre una vez más para evitar (eso esperamos) cualquier asociación con el *Axioma de Elección* estándar, a pesar de las similitudes. Por otro lado, es natural que tal axioma despierte polémica e intercambios de puntos de vista, ya que esto ha pasado ininterrumpidamente también en el marco de ZF. Incluso ZF no es lo suficientemente fuerte sin este axioma para probar algunos resultados de gran interés en física, como, por ejemplo, la existencia de base para cualquier espacio de Hilbert o la unicidad de dimensión para las bases posibles.[25]

Es por eso que el próximo axioma es denominado de *Selección de indiscernibles*. Simplemente establece que algunas selecciones son posibles en la teoría. La idea es bastante simple y se puede explicar de la siguiente manera. Supongamos que tenemos un q-conjunto cuyos elementos también son q-conjuntos (ya que no hay átomos) que no están vacíos ni tienen elementos comunes (disjuntos de a pares), digamos una colección imaginaria de colecciones de electrones, protones y neutrones. Queremos suponer que existe un q-conjunto cuyos elementos son indiscernibles de un elemento de cada uno de los elementos del q-conjunto dado, es decir, una colección con un electrón, un protón y un neutrón. No es necesario que los elementos del q-conjunto selección sean elementos de los q-conjuntos del q-conjunto dado, como se hace con el Axioma de Elección usual. Lo importante es que él tenga elementos indiscernibles de elementos de esos q-conjuntos.

Hablando más específicamente, sea x un q-conjunto, tal que si tanto y como z

son elementos de x, entonces los mismos no son vacíos, pero su intersección es vacía. Entonces, existe un q-conjunto u de la misma q-cardinalidad que x, tal que para cualquier $w \in u$, existe un elemento s que pertenece a algún elemento y de x que es indiscernible de w. El requisito de que la q-cardinalidad de u sea la de x garantiza que estemos tomando un elemento de cada elemento de x. Podemos formular el axioma de esta manera, donde $|x|$ representa la q-cardinalidad de x:

(18) [Selección de Indiscernibles]

$$\begin{aligned}(3)\qquad \forall x(\forall y \forall z(y \in x \wedge z \in x \rightarrow \neg\exists t(t \in y \wedge t \in z) \rightarrow \exists u\ (K(u,|x|) \wedge \\ \forall w(w \in u \rightarrow \exists y\ (y \in x \wedge \exists s\ (s \in y \wedge s \equiv w))))\end{aligned}$$

La explicación intuitiva de este axioma es tan evidente que parece extraño cuestionarlo. De todos modos, formalmente, las cosas pueden ser diferentes. Sant'Anna presenta un modelo de permutación de ZFA que, según él, es un modelo para $\mathfrak{Q}$ (recuerde que es la teoría con átomos) menos elección y menos los axiomas sobre quasi-cardinales. Luego afirma que el axioma de elección de $\mathfrak{Q}$ no es verdadero en su modelo; observe que no está hablando del axioma anterior. Si el axioma de elección de $\mathfrak{Q}$ es falso en el modelo de Sant'Anna, la conclusión es que tal modelo no modela el Axioma de Elección de $\mathfrak{Q}$. Pero él va más allá. Define otro modelo de permutación en el que el axioma es verdadero. Esto no debería ser una sorpresa, ya que se supone que este axioma es independiente de los restantes axiomas de $\mathfrak{Q}$. Todo lo que ha hecho, si sus resultados son correctos, es mostrar que el axioma de elección de $\mathfrak{Q}$ es independiente de los axiomas restantes (bajo supuesto de consistencia). No obstante, las conclusiones de Sant'Anna dicen que "dentro del contexto de los modelos de permutación, la teoría de q-conjuntos [es decir, $\mathfrak{Q}$] es inconsistente o equivalente a ZFU + Axioma de Elección [él llama ZFA], siempre que no haya microátomos [m-átomos]". Esto se basa en la conclusión de que en su nuevo modelo no hay m-átomos. El motivo no nos queda claro. De hecho, la afirmación no está clara, en primer lugar porque ZFU (o ZFA) ya implica un axioma de elección. Entonces, ¿cuáles son los axiomas que Sant'Anna agrega a ZFU? En segundo lugar, la teoría $\mathfrak{Q}$ es consistente con la existencia de m-átomos, pero no postula su existencia. Entonces, si no hay m-átomos, por supuesto la teoría colapsa en ZFA, pero este es un resultado bien conocido ya expuesto en French and Krause (2006). El hecho interesante es suponer que los m-átomos existen, esto es lo que vincula la teoría con la física cuántica.

Para finalizar, introducimos el Axioma de Regularidad, diciendo que todo q-conjunto no vacío x tiene un elemento que no tiene elementos en común con x, o sea

(19) [Regularidad]

$$\forall x(\exists y(y \in x) \rightarrow \exists y(y \in x \wedge \neg\exists z(z \in x \wedge z \in y))).$$

Acreditamos que el desarrollo hecho arriba es suficiente para dar una idea de la teoría sin átomos. Es evidente que podríamos continuar su desarrollo y mostrar las diferencias con una teoría como ZFC. Pero eso no será hecho aquí.

4. Una presentación alternativa para los casi-conjuntos sin átomos

En esta sección, expresamos algunos aspectos del formalismo de $\mathfrak{Q}^{-}$en función del concepto de pertenencia débil. El objetivo es tratar de embeber la propia relación de indiscernibilidad en todas las operaciones entre casi-conjuntos a través del concepto de pertenencia débil ya presentado. Esto permitirá una comparación particular con las correspondientes operaciones entre conjuntos de ZF.

Utilizando la definición 6 de pertenencia débil, podemos reescribir la definición 5-(2) de sub-q-conjunto de la siguiente manera:

Definición 10 (Sub-q-conjunto)

(4) $\quad x \subseteq^{*} y := \forall z(z \in x \rightarrow z \in^{*} y) \wedge \forall m \forall n(K(x,m) \wedge K(y,n) \rightarrow m \leq n)$

También podríamos expresar que la nube de un q-conjunto x, relativa a cualquier q-conjunto ω, está incluida (en el sentido de $\subseteq$) en el q-conjunto y de la siguiente manera. Si $x \subseteq y \subseteq \omega$,

$$N(x,\omega) \subseteq y \leftrightarrow \forall z(z \in^{*} x \leftrightarrow z \in y)$$

Como hemos remarcado anteriormente, $x \subseteq^{*} y \wedge y \subseteq^{*} x$ implica la indiscernibilidad entre x e y. En da Costa and Holik (2015) se presenta una mereología cuántica donde la noción de "ser parte física de", denotada por $\sqsubseteq$, que es un primitivo de su formalismo, puede ser utilizada de una manera similar para obtener una relación de indiscernibilidad entre sistemas físicos. En nuestro caso, el concepto primitivo fundamental es la relación de indiscernibilidad (y la relación de pertenencia de ZF), con el cual definimos la pertenencia débil y las inclusiones débiles entre q-conjuntos. Sin embargo, si nuestro concepto primitivo pasara a ser la pertenencia débil (o podría ser también alguna de las inclusiones), la definición 6 podría interpretarse como una definición implícita del concepto de indiscernibilidad. También podríamos definir la indiscernibilidad a través de la doble inclusión de q-conjuntos $\subseteq^{*}$, que a su vez descansan en los conceptos de pertenencia débil y estándar.

Utilizando la pertenencia débil, podemos definir la siguiente operación entre q-conjuntos.

Definición 11 (*Unión de q-conjuntos) *Sean x e y q-conjuntos. Definimos el q-conjunto $x \cup^* y$ de la siguiente manera:*

$$z \in x \cup^* y \leftrightarrow z \in^* x \vee z \in^* y \wedge \forall m \forall n(K(x,m) \wedge K(y,n) \rightarrow K(x \cup^* y, p) \wedge p \leq m \oplus m))$$

El axioma de unión (1) asegura la existencia de este casi-conjunto.

Por la definición 6, si solo estuviésemos trabajando con conjuntos clásicos, la pertenencia débil colapsaría a la pertenencia estándar. Sin embargo, existen algunas situaciones en las cuales, aunque estemos tratando con q-conjuntos ambas pertenencias son equivalentes. Por ejemplo, consideremos la expresión $\forall z \neg(z \in x)$. Expresando que x es un q-conjunto (o conjunto) vacío. Como todo q-conjunto vacío tampoco puede admitir pertenencia débil (consecuencia de la definición 6), lo anterior implica que $\forall z \neg(z \in^* x)$. Por otro lado, como la implicación estándar implica a la débil, por contrarecíproco, obtenemos que $\forall z \neg(z \in^* x)$ implica $\forall z \neg(z \in x)$. Con lo cual obtenemos la equivalencia de las expresiones. Esto es, mostramos un caso en el cual es equivalente usar cualquiera de las dos pertenencias (además del relativo a los unitarios fuertes, que se comentó más arriba).

De la misma forma que definimos la operación $\cup^*$, podemos definir una operación $\cap^*$.

Definición 12 (*Intersección de q-conjuntos) *Sean x e y q-conjuntos. Definimos el q-conjunto $x \cap^* y$ de forma tal que*

$$\begin{aligned} z \in x \cap^* y \quad \leftrightarrow \quad & (z \in^* x \wedge z \in^* y) \wedge \forall m \forall n(K(x,m) \wedge K(y,n) \\ & \rightarrow K(x \cap^* y, p) \wedge p \leq max\{m,n\} \end{aligned}$$

Definida de esta manera, no se cumple $y \cap^* y \subseteq y$ (ni en general $x \cap^* y \subseteq x$), pero se cumple $x \cap^* y \subseteq^* x \wedge x \cap^* y \subseteq^* y$. Hay que observar que esta operación, al igual que en los casos de unión y q-conjuntos vacíos, aunque no define unívocamente un q-conjunto, todos los definidos por ella son indiscernibles.

Podríamos continuar y desarrollar, por ejemplo, una topología métrica definiendo los abiertos utilizando $\in^*$ o, dada la colección de los abiertos de cierto espacio, utilizar $\cup^*$ e $\cap^*$ para operar con ellos. Sin embargo, esto quedará para futuros trabajos.

Algunas relaciones entre las nuevas operaciones y las de ZF

Las 'operaciones de ZF' son obviamente las sin la marca '*'.

1) Sean x e y q-conjuntos incluidos en w (en el sentido de ZF). Sean $N(x,w)$ y $N(y,w)$ sus nubes relativas a w. Entonces, podemos probar que

$$x \cup y \subseteq x \cup^* y \subseteq N(x,w) \cup N(y,w).$$

2) De la misma forma, tenemos que $x \cup y \subseteq x \cup^* y \subseteq^* x \cup^* y$.
3) También puede probarse que
   a) $x \cap y \subseteq x \cap^* y \subseteq^* x$
   b) $x \cap y \subseteq x \cap^* y \subseteq^* y$
4) Pero debido a que $w \in (y \cap^* z)$ no implica $w \in^* (y \cap z)$, entonces no se verifica la siguiente fórmula, que parece intuitiva:

$$(x \cup^* y) \cap (x \cup^* z) \subseteq^* x \cup^* (y \cap z).$$

   Sin embargo, la inclusión inversa sí se verifica. De ese modo, la unión de q-conjuntos $\cup^*$ es candidato para la disyunción en un retículo cuántico Dalla Chiara et al. (2004), y la intersección $\cap$ (clásica) lo es para la conjunción.
5) Los siguientes resultados pueden ser probados directamente de las definiciones:
   a) $(x \cup y) \cap^* (x \cup z) \equiv x \cup (y \cap^* z)$
   b) $x \cup^* (y \cap z) \subseteq^* (x \cup^* y) \cap (x \cup^* z)$
   c) $(x \cup^* y) \cap (x \cup^* z) \not\subseteq^* x \cup^* (y \cap z)$

La afirmación a) nos lleva a pensar que, respecto de la distribución, la intersección de q-conjuntos $\cap^*$ se comporta clásicamente, ya que valida distributividad con la unión estándar. Es decir, los entes indiscernibles no generarían ningún cambio pertinente. Sin embargo, no pasa lo mismo con la unión de q-conjuntos $\cup^*$. La unión de q-conjuntos no es distributiva respecto de la intersección clásica y esto nos lleva a pensar que es esta operación la que no se comporta clásicamente. Esto puede relacionarse con la disyunción del retículo de proyectores cuánticos, que para varios autores es la responsable de la pérdida de distribución en la lógica cuántica Aerts et al. (2000). También podríamos destacar que la pérdida de distributividad entre $\cup^*$ y $\cap$ implica que entre $\cup^*$ y $\cap^*$ tampoco puede existir distribución, ya que

$$(x \cup^* y) \cap (x \cup^* z) \not\subseteq^* x \cup^* (y \cap z) \rightarrow (x \cup^* y) \cap^* (x \cup^* z) \not\subseteq^* x \cup^* (y \cap z),$$

como consecuencia de

$$(x \cup^* y) \cap (x \cup^* z) \subseteq^* (x \cup^* y) \cap^* (x \cup^* z).$$

Lo presentado arriba puede tener implicaciones interesantes a la hora de evaluar el límite clásico de la mecánica cuántica, ya que el retículo no distributivo se transforma en booleano cuando $\cup^*$ tiende a la unión de ZF. Es decir, el retículo que estamos analizando, con la unión de q-conjuntos e intersección clásica, se vuelve distributivo

(e idéntico al booleano clásico) cuando la relación de indiscernibilidad colapsa en la identidad. Por lo tanto, desde este punto de vista, la existencia de entes sin identidad sería la responsable de la pérdida de distribución de nuestro retículo. Esto será más desarrollado en próximos trabajos.

Por último, analizaremos otra característica de la pertenencia de $\mathfrak{Q}^{-}$. La noción de pertenencia débil permite que dividamos el universo q-conjuntista de la siguiente manera. Dados q-conjuntos x e y, tenemos las siguientes opciones excluyentes y exhaustivas:

$$(x \in y) \vee (x \notin y \wedge x \in^{*} y) \vee (x \notin^{*} y).$$

Comparando con las correspondientes posibilidades que se presentan en la teoría de quasets QST Dalla Chiara and Toraldo di Francia (1993a); Dalla Chiara et al. (1998), podríamos destacar algunas diferencias. En QST, existen dos primitivos de pertenencia: la pertenencia con certeza ($\in$) y la no pertenencia con certeza ($\notin$), que determinan también regiones excluyentes dentro del dominio de quasets. Si definimos la pertenencia débil o indeterminada de QST como $x \in^{*} y := \neg(x \in y) \wedge \neg(x \notin y)$, entonces tenemos que, dados quasets x e y,

$$(x \in y) \vee (x \in^{*} y) \vee (x \notin y).$$

Así, tanto en QST como en $\mathfrak{Q}^{-}$ tenemos tres regiones excluyentes de pertenencia que cubren todo el abanico de posibilidades. La diferencia se encuentra a nivel lógico, es decir, en las relaciones de consecuencia que mantienen estas posibilidades.

En $\mathfrak{Q}^{-}$, se verifica que $\forall x \forall y(x \in y \rightarrow x \in^{*} y)$, y consecuentemente $\forall x \forall y(x \notin^{*} y \rightarrow x \notin y)$. Sin embargo, en el marco de QST, lo que se cumple es $\forall x \forall y(x \notin y \rightarrow \neg(x \in y))$, y consecuentemente $\forall x \forall y(x \in y \rightarrow \neg(x \notin y))$. Por supuesto, en QST, $x \notin y$ no es equivalente a $\neg(x \in y)$.

Estas implicaciones entre primitivos de pertenencia forman la principal diferencia (a nivel estructural) que, dentro de esta presentación, mantienen estas teorías. Podríamos acentuar sus parecidos si, en el marco de $\mathfrak{Q}^{-}$, propusiéramos desde el comienzo dos primitivos de pertenencia, $\in$ y $\notin^{*}$, y a partir de ellos definiéramos las relaciones de indiscernibilidad y **subq***. De esta manera, podríamos expresar las tres posibilidades q-conjuntistas como:

$$\forall x \forall y(x \in y \vee (\neg(x \in y) \wedge \neg(x \notin^{*} y)) \vee (x \notin^{*} y)).$$

Esto podría sugerirnos la siguiente definición:

$$x \in_{*} y := \neg(x \in y) \wedge \neg(x \notin^{*} y).$$

Así, podemos expresar lo anterior como: $(x \in y) \vee (x \in_{*} y) \vee (x \notin^{*} y)$.

Con estos símbolos de pertenencia, queda expresada en su mejor forma la semejanza entre QST y $\mathfrak{Q}^{-}$. En función de esta nueva pertenencia, que podríamos llamar *extra débil*, las posibilidades del universo de q-conjuntos pueden ahora expresarse de una manera equivalente a la de QST. Esto puede tener interesantes consecuencias para la semántica de la lógica cuántica. En Jorge et al. (2023), se presenta una generalización de las semánticas no deterministas de Nmatrices para el retículo de proyectores cuánticos en el marco de QST (ver también Jorge and Holik (2020, 2022, 2023)). En función de las similitudes lógico-estructurales recién mostradas, tales resultados podrían ser extendidos a $\mathfrak{Q}^{-}$y tener aplicaciones de interés para el teorema de Kochen-Specker. Una Nmatriz cuántica fundada en $\mathfrak{Q}^{-}$podría utilizarse para dar una semántica que evite la contradicción de Kochen-Specker, debida a considerar que los proyectores asociados con un mismo observable, son idénticos (en vez de indiscernibles) en diferentes contextos no compatibles de Barros et al. (2021).

5. Modelos y 'cuantificadores cuánticos'

Por cuestiones de extensión, daremos sólo una breve idea sobre los modelos de $\mathfrak{Q}^{-}$, ya que en la próxima sección queremos mostrar una aplicación de la teoría: utilizarla para fundar una metafísica cuántica de propiedades.

La discusión sobre los modelos de una teoría de conjuntos es sutil, y no será diferente con relación a $\mathfrak{Q}^{-}$. En la matemática intuitiva, que es usada libremente, una estructura para interpretar una teoría como ZFC es un par ordenado (intuitivo) $\mathscr{M} = \langle M, E\rangle$ donde M es un conjunto (intuitivo) y E es una relación binaria sobre M. La intención es que M congregue todos los *conjuntos* y que E interprete la relación de pertenencia. Esa estructura será un *modelo* de ZFC si los axiomas son *verdaderos* en él. La noción de 'verdad' es intuitiva, como todo lo demás. El modelo más inmediato es la *jerarquía acumulativa*, que se atribuye a von Neumann, pero que en verdad fue presentada por Zermelo, que denotamos por $\mathscr{V} = \langle V, \in\rangle$, donde $V = \bigcup_{\alpha\in On} V_\alpha$, siendo On la clase de los ordinales. Para detalles, ver (Roitman 2013, pp.77-78).

Formalmente, no podemos construir un modelo de ZFC en la propia ZFC si la suponemos consistente, y eso se debe al segundo teorema de incompletitud de Gödel, pero podemos encontrar modelos de la teoría en teorías más fuertes, como KM (el sistema Kelley-Morse, vea Rubin (1967)), o incluso en la jerarquía acumulativa, mientras tomemos V_κ, siendo κ un cardinal inaccesible (la prueba está en (Roitman 2013, p.134).

¿Qué decir de una estructura para $\mathfrak{Q}^{-}$?

Podemos pensar en una n-tupla de la siguiente forma:

$$\mathscr{Q} = \langle Q, S, K, E, I, k, a, f, g, R\rangle$$

donde

1. Q es una colección no vacía de objetos llamados q-conjuntos.
2. S es un sub-q-conjunto de Q cuyos elementos son llamados *conjuntos*.
3. K es una colección de entidades llamadas *q-cardinales* (distinta de Q).
4. E es una relación binaria sobre Q que representa la pertenencia.
5. I es otra relación sobre Q que representa la indiscernibilidad. Se asume que esta relación puede ser aplicada también a los elementos de K.
6. k es un símbolo relacional diádico, cuyo dominio es $Q \times K$. Si $x \in Q$ y $m \in K$, entonces $k(x, m)$ dice que el quasi-cardinal del q-conjunto x es m.
7. a es una constante perteneciente a K que representa el q-cardinal $\overline{0}$.
8. f, g son funciones binarias sobre K que representan respectivamente la adición y la multiplicación de q-cardinales.
9. R es una relación binaria sobre K que representa la identidad de q-cardinales. Asumimos que esa relación también se aplica a conjuntos (elementos de S).

Ahora es un trabajo manual probar que todas las traducciones de los axiomas de $\mathfrak{Q}^-$ para el lenguaje de esa estructura son verdaderos en él.

Una cosa interesante que se puede considerar relativamente a modelos de $\mathfrak{Q}^-$ es la significación de los cuantificadores. Como es sabido, en la lógica clásica, si el dominio de la interpretación es un conjunto finito D, entonces $\forall x\varphi$ puede ser interpretado como una conjunción $\varphi(a_1) \wedge \varphi(a_2) \wedge \ldots \wedge \varphi(a_n)$, donde los a_i nombran los elementos del dominio que satisfacen la fórmula. A su vez, $\exists x\varphi$ es una disyunción $\varphi(a_1) \vee \varphi(a_2) \vee \ldots \vee \varphi(a_n)$ (Kleene, 1952, p.177). En el caso del dominio ser infinito, esa interpretación es aún utilizada, aunque con conjunciones y disyunciones infinitas (en el metalenguaje).

Tal procedimiento nos conduce a pensar que los elementos del dominio son entidades con identidad, una vez que en caso del cuantificador universal, tenemos 'ese' y 'aquél', y 'aquél otro' y así sucesivamente, lo que permite (o exige) que sepamos de qué elementos estamos hablando. Lo mismo con el cuantificador existencial. Pero eso no puede ser así en la cuántica por motivos obvios. Por ese motivo, proponemos otra forma de entender los cuantificadores en el caso cuántico, que es la siguiente.

Sea $\mathscr{Q} = \langle Q, \mathscr{I} \rangle$ un modelo para $\mathfrak{Q}^-$, siendo $\mathscr{I}$ la función de interpretación. Sea φ una fórmula del lenguaje de la teoría. Vamos a designar por $V(\varphi)$ la colección de los objetos del dominio Q que hacen φ verdadera en el modelo. Entonces decimos que $\forall x\varphi$ es verdadera en $\mathscr{Q}$, o sea, $\mathscr{Q} \models \forall x\varphi$ si y sólo si $V(\varphi) = Q$, y decimos que $\exists x\varphi$ es verdadera en el modelo, $\mathscr{Q} \models \exists x\varphi$ si y sólo si $V(\varphi) \neq \emptyset$.

Esa definición se asemeja mucho a los *cuantificadores monádicos generalizados* de T. Sider (2010, p.120) y no habla de la identidad de los elementos que satisfacen φ.

Creemos que entre todas las cuestiones lógicas, la cuántica exige también una nueva lectura de los cuantificadores. Nuestra propuesta puede ser el inicio de una discusión.

6. $\mathfrak{Q}^{-}$ y la cuántica: una ontología de propiedades

Una manera simple de ver una relación de la teoría $\mathfrak{Q}^{-}$ con la física cuántica es la siguiente, basada en la propuesta de una *ontología de propiedades* (Holik et al. 2022; Lombardi 2023) que, en nuestro caso, intentaremos hablar de *propiedades indiscernibles*. Eso nos permitirá sugerir que cuando el físico hace mediciones repetidas 'de una misma propiedad', él está realizando mediciones con propiedades indiscernibles, una vez que necesita 'preparar' nuevamente el sistema. De la misma forma, jamás se hace más de una medición en un mismo sistema si las mediciones son destructivas.

Primeramente, ofreceremos una descripción general. En la propuesta que presentaremos, un sistema cuántico es visto como una colección (*bundle*) de propiedades, así que no se necesita ningún Principio de Individuación.[26] Uno podría preguntar si un "bundle" de propiedades no individualiza un objeto. La respuesta es que los "bundles" o haces de propiedades pueden no individualizar objetos que compartan todas sus *propiedades tipo instanciadas* (propiedad tipo-I — ver más adelante). Además, esta teoría rechaza todo tipo de haceidad o sustratum. Es importante percibir que esa hipótesis se asemeja a la idea de *objetos nomológicos* de Toraldo di Francia (1978; 1981, Arenhart (2023)).

En efecto, Toraldo di Francia ve los objetos cuánticos como siendo determinados por las leyes de la física. Para él, una de las grandes revoluciones de la física cuántica fue la aceptación de objetos que tienen características fijadas y prescritas por las teorías físicas. Así, dice él, "la existencia de objetos nomológicos está más allá de la discusión y constituye uno de los puntos fundamentales da la ciencia empírica"(1981, p.222). De ese modo, un electrón es cualquier cosa que satisface las propiedades siguientes: tiene masa $m = 9{,}1 \times 10^{-28} g$, carga eléctrica $e = 4{,}8 \times 10^{-10} e.s.u.$ y spin $s = 1/2$ (Dalla Chiara and Toraldo di Francia 1993b) (claro que él está simplificando). Entonces, *cualquier* cosa que obedezca esas leyes es un electrón. Si tomamos las características de los objetos cuánticos como una colección de propiedades, llegamos a la ontología de propiedades propuesta por Lombardi.

Como sus autores observan en Holik et al. (2022), los formalismos usuales son basados en categorías ontológicas de propiedades y objetos (o 'individuos'), así que un lenguaje más adaptado a la propuesta de una ontología de propiedades puede ser importante. En el mencionado artículo, los autores proponen el lenguaje de $\mathfrak{Q}$ para eso. Pero, como ya sabemos, $\mathfrak{Q}$ es compatible con la existencia de átomos, que podrían ser pensados como los *relata* de las propiedades, algo que deseamos evitar.[27].

De tener éxito en la empresa, tendríamos una alternativa que sería útil también

para las bases matemáticas del *realismo estructural ontológico* (REO), que busca relaciones sin los respectivos relata Ladyman (1998); French and Ladyman (2003). No hay espacio para hablar de eso aquí, recomendamos (French 2023) Krause 2005) al lector interesado. Pero, ¿cómo podríamos encarar la propuesta de una ontología de propiedades desde el punto de vista de $\mathfrak{Q}^{-}$?

Una propuesta es que podemos tener 'propiedades indiscernibles' y entonces esas propiedades podrían servir como contrapartes formales de aquello a lo que los físicos se refieren como 'una misma propiedad que es medida más de una vez'. Ahora bien, cabe destacar que cuando se habla de que un físico repite un experimento, en realidad él jamás hace exactamente el mismo experimento dos veces. Las condiciones del laboratorio se cambian por más que sean controladas, las percepciones de los científicos pueden sufrir alteraciones, etc. Así, lo más correcto sería decir que cuando un experimento es repetido, el científico realiza un experimento que es *indiscernible* del anterior. Si aceptamos que los experimentos pueden ser adecuadamente descritos por medición de propiedades de los sistemas, entonces nos parece sensato tener una noción precisa de *indiscernibilidad de propiedades* cuando deseamos tornar esas cosas más precisas.

Intentando dar a esa idea un sentido más preciso, debemos notar que en una teoría extensional de conjuntos, como ZFC, se identifica un conjunto con la extensión de un predicado, o sea, el conjunto es la colección de los objetos del dominio que tienen la propiedad descrita por el predicado. Así, para algunas aplicaciones se pueden identificar las dos cosas.

La teoría $\mathfrak{Q}^{-}$ es una teoría que podemos llamar *semi-extensional* para los q-conjuntos, ya que lo que vale no es un axioma 'pleno' de extensionalidad, como en ZFC, sino uno *débil*, el AED. Aún así podemos identificar q-conjuntos con propiedades que tengan alguna característica que nos interese. Ahora los 'predicados' pueden ser indiscernibles. De esa manera, llegamos a poder tratar matemáticamente lo que Dalla Chiara y Toraldo di Francia dicen en (1993b): en la mecánica cuántica, podemos tener una sola intensión (un predicado describiendo algún sistema físico, como electrones), pero diversas extensiones, como todas las colecciones de electrones. Esto cambia totalmente la concepción usual de la teoría de la referencia estándar, donde una extensión (una colección de objetos) puede tener diversas intensiones (la colección de los hombres tiene como intensiones 'animal racional', 'bípedo implume' y otras), pero cada intensión determina unívocamente una extensión (que puede ser vacía).

Pasaremos ahora a desarrollar una ontología de propiedades indiscernibles. Recomendamos Holik et al. (2022); Lombardi (2008); Lombardi and Dieks (2014) al lector interesado en más detalles.

La Interpretación Modal Hamiltoniana, propuesta por Lombardi, se presenta como un serio candidato a ofrecer una visión integral para muchos problemas, que a

lo largo de la historia fueron considerados de manera aislada, como el problema de la medición, la contextualidad, la no separabilidad y la indiscernibilidad de los entes cuánticos. Esta teoría propone un marco ontológico para proporcionar una solución a estos diferentes retos de forma unificada. Según esta visión, el reino cuántico carece de la categoría de individuo y los sistemas cuánticos son haces o paquetes (*bundles*) de propiedades sin principio de individualidad. Eso implica que se está tomando "sin individualidad" como sinónimo de "ente sin identidad", y será particularmente importante saber de qué manera los paquetes de propiedades pueden ser indiscernibles, pero no idénticos.

En esa metafísica, todo sistema físico, como por ejemplo un electrón o átomo de litio, es una "colección" de *propiedades tipo instanciadas*, que pueden ser genuinamente indiscernibles (como, por ejemplo, la *propiedad tipo universal* "energía" instanciada en un electrón libre). Estas *propiedades tipo instanciadas*, aún no están "actualizadas", es decir, todavía no tienen valores concretos. Todos los paquetes que compartan las *propiedades tipo instanciadas* serán genuinamente indiscernibles. La indiscernibilidad de los paquetes es heredada por la indiscernibilidad de las *propiedades tipo instanciadas* (que a su vez es definida a partir de las *propiedades caso instanciadas*, ver más adelante), de la misma forma que en $\mathfrak{Q}$, la indiscernibilidad de los q-conjuntos es heredada por la indiscernibilidad de todos los m-átomos del mismo tipo (y misma q-cardinalidad). La diferencia es que ahora podremos representar una *propiedad de tipo instanciada* por un q-conjunto, y a los sistemas cuánticos indiscernibles como q-conjuntos formados por estos q-conjuntos. En (Holik et al. 2022), las *propiedades tipo instanciadas* indiscernibles son representadas por m-átomos, y consecuentemente, su indiscernibilidad no era heredada, sino fundamental. Mientras que en la teoría se decía que las *propiedades tipo instanciadas* también heredaban su indiscernibilidad como se define abajo. Para nosotros, ahora van a ser un q-conjunto formado por otros q-conjuntos cuya indiscernibilidad va a poder seguir definicionalmente a la teoría.

En una ontología de propiedades, la indistinguibilidad es una relación primitiva entre dos *propiedades caso instanciadas*[28] ($[a_j^i] \equiv [a_j^{i'}]$), cuando ambas son instancias de una propiedad caso universal $\langle a_j \rangle$. Sin embargo, la indistinguibilidad entre *propiedades tipo instanciadas* ($[A^i] \equiv [A^{i'}]$) es derivada de la anterior. Decimos que $[A^i]$ y $[A^{i'}]$ son indistinguibles cuando ambas son instancias de una *propiedad tipo universal* $\langle A \rangle$ y, además, todas sus *propiedades caso instanciadas* son indiscernibles. Más abajo eso sera esclarecido, pero adelantamos que los $[a_j^i]$ denotan los valores propios de los observables. A partir de este significado primario, la indistinguibilidad adquiere un significado derivado cuando se aplica a paquetes: dos sistemas de paquetes son indistinguibles cuando sus respectivas propiedades-tipo-I son indistinguibles. Tanto las *propiedades-tipo-I* indistinguibles como los sistemas de paquetes indistinguibles son diferente *sólo número*. Las *propiedades tipo instanciadas* son la que en la

versión anterior de la teoría con átomos se asociaban con los m-átomos. Es decir, para estas propiedades, no vale la teoría clásica de la identidad. Y tampoco esa teoría vale para los sistemas cuánticos, que son colecciones de estas propiedades.

Como comentan los autores del último artículo citado,

> Aunque en la presente propuesta los sistemas cuánticos se caracterizan ontológicamente como conjuntos de propiedades, es importante enfatizar la peculiaridad de esta visión. En su versión tradicional, la teoría del paquete es una teoría sobre objetos individuales, según la cual los objetos se componen de elementos de una categoría ontológica diferente (es decir, propiedades). En otras palabras, la teoría del paquete está diseñada para dar cuenta de objetos individuales sin apelar a un sustrato al que las propiedades son inherentes. Con este propósito, es necesario seleccionar algunas propiedades que desempeñen el papel del principio de individualidad que proporciona identidad sincrónica y diacrónica. Nuestra visión de los paquetes, por el contrario, prescinde por completo de la categoría ontológica de individuo: los paquetes de propiedades no se comportan como individuos en absoluto, pertenecen a una categoría ontológica diferente. Sobre esta base, cuando se combinan dos sistemas de paquetes, el sistema compuesto también es un paquete. Y como los paquetes no son individuos[29], no existe ningún principio de individualidad que preserve su identidad en la composición: en el sistema compuesto no se conserva la identidad de los componentes, precisamente porque no son individuos.

Esta imagen ontológica se vuelve natural a la luz del enfoque algebraico de la mecánica cuántica,[30] cuyo elemento principal es el álgebra de observables, mientras que los estados están representados por funcionales en esa álgebra, que se definen para producir probabilidades y valores esperados (Kadison and Ringrose 1983; Samperio Valdivieso et al. 2019). Observamos que en la interpretación basada en el enfoque algebraico, los observables tienen prioridad ontológica sobre los vectores estados, por lo tanto "motiva" o induce una interpretación del estilo de propiedades. Esta ontología de propiedades demostró ser fructífera para abordar los principales desafíos ontológicos de la mecánica cuántica, principalmente la consideración de una ontología de cosas sin identidad. Sin embargo, la propuesta afrontó una dificultad esencial desde un punto de vista formal. Aunque el formalismo algebraico proporciona una representación matemática adecuada de una ontología de propiedades, no es fácil encontrar un metalenguaje apropiado para hablar de tal ontología, ya que tanto los formalismos lógicos tradicionales como también las teorías de conjuntos estándar (ZF, NBG, KM, NF, entre otros) presuponen el concepto primitivo de identidad. Lo cual implica que las estructuras sean no deformables (su único automorfismo es la identidad). Esto llevó a que en (Holik et al. 2022) se proponga a la teoría $\mathfrak{Q}$ como un candidato para el metalenguaje de la ontología Modal Hamiltoniana, puesto que sin identidad, podemos introducir estructuras deformables o no rígidas.

El lenguaje de la Interpretación Modal Hamiltoniana está dividido en tres niveles: físico, matemático (algebraico) y ontológico. Lo que a nivel físico es un sistema cuántico S, matemáticamente está representado por un álgebra de observables y su contrapartida ontológica es el haz/paquete de propiedades ("bundle"). Los tres niveles están absolutamente relacionados, describamos ahora la contraparte ontológica del formalismo algebraico proporcionando una interpretación de cada término físico (matemático):

- El término 'observable' es utilizado por los físicos para denotar ciertas magnitudes cuantificables de relevancia física, que están representadas matemáticamente por operadores hermíticos.[31] En términos ontológicos, corresponden a la categoría de propiedad. En el contexto de la Modal Hamiltoniana, se distingue entre *propiedades-tipo universal* (*propiedades-tipo-U*) e *instancias de propiedades-tipo universal* (*propiedades-tipo-I*). Las contrapartes ontológicas de las magnitudes físicas generales son las propiedades-tipo-U, y la de los observables son las propiedades-tipo-I. Denotaremos una propiedad-tipo-U por A^U, y una propiedad-tipo-I por $[A]$. Un ejemplo de propiedad-tipo-U es la energía H^U, que puede ser instanciada como la energía de cierto sistema particular S mediante $[H]$.

- Dado que un observable físico es una magnitud cuantificable, tiene valores posibles, que están representados matemáticamente por los valores propios del operador hermítico correspondiente. La contraparte ontológica son las *propiedades-caso instanciada* (*propiedades-caso-I*) de la correspondiente *propiedad-tipo-I*. Dada una *propiedad-tipo instanciada* $[A]$ de una *propiedad-tipo universal* A^U, simbolizamos sus *propiedades-caso instanciadas* por $[a_i]$. Siguiendo con el ejemplo anterior, podemos hablar de las *propiedades-caso-I* $[\omega_i]$ (espectro energético) de la energía $[H]$ de un sistema particular S, donde $[H]$ es una *propiedad-tipo-I* de la *propiedad-tipo-U* energía, H^U.

- Los físicos suponen implícitamente que cada observable no puede tener más de un valor a la vez. El valor efectivo adquirido por un observable no tiene representación matemática directa: no existe una forma de distinguirlo del resto de valores en términos formales. Pero, ontológicamente, es relevante enfatizar que, dada una *propiedad-tipo-I* $[A]$ de una *propiedad-tipo-U* A^U, *no más de una* de sus *propiedades-caso-I* $[a^i_j]$ puede actualizarse. Denotaremos al único valor actualizado, *propiedad-caso actual* como $[\mathbf{a}_k]$. En nuestro ejemplo, $[\omega_k]$ es el valor efectivo de la energía $[H]$ del sistema particular S.

- Dado que en el formalismo algebraico un sistema cuántico S está representado matemáticamente por un álgebra de observables, su contraparte ontoló-

gica es un *paquete* (o haz) $\mathscr{B} = \{[A], [B], [C], \ldots\}$ de las propiedades-tipo-I $[A], [B], [C], \ldots$ de las correspondientes propiedades-tipo-U $A^U, B^U, C^U, \ldots$.

- El concepto físico de estado está representado matemáticamente por un funcional en el espacio de observables. Debido a su naturaleza probabilística, el estado de un sistema S codifica las propensiones ontológicas a la actualización de todas las propiedades-caso-I de todas las propiedades-tipo-I pertenecientes al paquete $\mathscr{B}$, contraparte ontológica de S.

El teorema de Kochen-Specker (1990) demuestra la imposibilidad de atribuir valores precisos a todos los observables de un sistema cuántico simultáneamente, preservando al mismo tiempo las relaciones funcionales entre observables compatibles: a qué observables se les pueden atribuir valores precisos es algo determinado por el contexto de medición.

En una ontología tradicional de individuos con sus propiedades, la contextualidad cuántica viola el principio de determinación omnímoda, un supuesto básico en la filosofía moderna (ver Lombardi and Dieks 2014). Según este principio, en todo individuo todos los determinables están determinados: por ejemplo, si la "forma" determinable se aplica a un objeto, necesariamente tiene alguna forma determinada, digamos "redonda", independientemente de que nosotros lo sepamos. Esto es válido incluso desde la perspectiva de la teoría tradicional de paquetes de propiedades, según la cual un individuo es un paquete de todas las propiedades determinadas correspondientes a ciertas propiedades determinables: por ejemplo, una bola de billar particular es la convergencia de un valor definido de posición, digamos aquí, una forma definida, digamos redonda, un color definido, digamos blanco, etc. La contextualidad cuántica, por el contrario, implica que no todos los determinables del sistema están determinados: por ejemplo, si la posición está determinada, el impulso no lo está. Esto desafía el concepto de individuo, tanto en la visión del sustrato como en la de paquetes o haces de propiedades.

En el lenguaje ontológico de esta ontología, la contextualidad se expresa diciendo que, dado un sistema, no todas sus *propiedades-tipo-I* se actualizan, es decir, adquieren una *propiedad-caso actual* (real) entre todas sus (posibles) *propiedades-caso-I*. En otras palabras, el teorema de Kochen-Specker introduce una limitación con respecto a las propiedades-caso-A, más precisamente, con respecto a qué *propiedades-caso-I* de un paquete pueden entrar actualizarse (o realizarse). Pero esta restricción no afecta al concepto de sistema cuántico, porque se define como una colección de *propiedades-tipo-I* (determinables) y no de propiedades de caso reales (determinados). A su vez, dado que la ontología está poblada sólo por propiedades y colecciones de propiedades, y no por individuos, el principio de determinación omnímoda de individuos no se aplica: la ontología de propiedades propuesta es inmune al desafío representado por el teorema de Kochen-Specker.

De igual manera, esta ontología propone alternativas al tema de la no separabilidad de los sistemas cuánticos. Nosotros nos centraremos en la propuesta que este marco teórico propone para el tema de la indiscernibilidad cuántica.

Como dijimos anteriormente, dos sistemas cuánticos (o haces de propiedades) son indistinguibles cuando sus respectivas *propiedades-tipo-I* son indistinguibles. Tanto las *propiedades-tipo-I indistinguibles* como los sistemas de paquetes indistinguibles pueden ser *diferente sólo número*. Sin embargo, esto no implica que el Principio de Identidad de los Indiscernibles sea falso para ellos: mientras que el principio se refiere a la identidad de individuos indiscernibles, en este caso la indistinguibilidad es una relación entre elementos pertenecientes a la categoría ontológica de propiedad. En otras palabras, el Principio de Identidad de los Indiscernibles no se aplica a los sistemas cuánticos no individuales de una ontología cuántica de propiedades. Ya en los años 60, Post argumentaba que las partículas elementales no pueden considerarse individuos, sino que deben ser vistos como "no individuales" Post (1973): esto llevó a la llamada "visión recibida" sobre la indistinguibilidad cuántica (verFrench and Krause (2006)). También según este punto de vista, el principio de identidad de los indiscernibles no se aplica porque los sistemas cuánticos elementales no son individuos.

7. Una rápida ojeada sobre la aplicación de los casi-conjuntos a la Modal Hamiltoniana

En principio, para la aplicación de los q-conjuntos a la ontología modal, podemos seguir los pasos utilizados en Holik et al. (2022). Sólo habría que ver si podemos salvar algunas de las posibles objeciones que allí aparecían.

Las principales objeciones que se podían hacer a la presentación anterior son:

- Que los m-átomos, que en la interpretación pretendida de $\mathfrak{Q}$, estaban asociados con partículas elementales, ahora se asociaban con propiedades (que de alguna forma pueden ser pensadas a través de su extensión). Esto se debe principalmente a que $\mathfrak{Q}$ está pensada para modelizar entes más cercanos a los "substratums", que a los cúmulos de propiedades.

- Al asociar cada propiedad de tipo instanciada $[P]$ con un m-átomo, la indiscernibilidad de estas propiedades pasan a ser "elementales" o "genuinas", es decir, no heredadas. Sin embargo, en la ontología Modal Hamiltoniana, la indiscernibilidad de las propiedades tipo instanciadas no es "elemental", ya que está definida como: $[P_1] \equiv [P_2]$ si y solo si ambas son instancias de la misma *propiedad tipo universal* $\langle P \rangle$ y sus correspondientes *propiedades caso instanciadas* (valores propios) sos primitivamente indiscernibles.

En nuestro caso, ahora en $\mathfrak{Q}^{-}$, el primer problema lo resolvemos naturalmente si asociamos a cada *propiedad tipo instanciada* un casi-conjunto, de forma tal que los q-conjuntos asociados con *propiedades tipo instanciadas* indiscernibles sean también indiscernibles. Entonces, en el formalismo de $\mathfrak{Q}^{-}$, tendríamos un q-conjunto para cada propiedad de tipo instanciada.

Lo anterior resuelve el primero de los problemas, pero no el segundo. Ya que si sólo planteamos eso y la indiscernibilidad de los q-conjuntos sigue siendo "primitiva", entonces tampoco jugará ningún rol en este formalismo las *propiedades caso-I* (autovalores).

Si, por otro lado, decidimos que la indiscernibilidad entre q-conjuntos (asociados a propiedades tipo instanciadas indiscernibles) sea derivada, entonces tenemos que ver de qué manera incorporar en el formalismo las *propiedades caso-I*. ¿Cuál sería la q-extensión de los q-conjuntos asociados con una *propiedad de tipo instanciada*?

En principio, podríamos solucionar el primer problema de manera natural y seguir manteniendo el segundo como cierta "región" donde no se solapan totalmente la teoría y su formalismo. Si optamos por la propuesta que soluciona sólo el primer ítem, entonces la adaptación a lo ya realizado es directa. En lugar de asociar $m([P])$ con cada propiedad instanciada, ahora asociamos cierto q-conjunto x_P.

Sin embargo, existe otra posibilidad, admitida por la Modal Hamiltoniana. Fundamentar ontológicamente una indistinguibilidad *primitiva* (no derivada) entre propiedades de tipo instanciadas sin necesidad de recurrir a las propiedades caso posibles. Esto representaría un cambio mínimo en la teoría, con la ventaja de facilitar la adaptación de una metateoría basada en $\mathfrak{Q}^{-}$. Esta posibilidad, junto con su correspondiente adaptación casi-conjuntista, será objeto de próximos trabajos.

8. Definiendo identidad para los q-conjuntos legítimos

En $\mathfrak{Q}^{-}$ hicimos la distinción entre conjuntos y q-conjuntos legítimos. Para los primeros, la noción usual de identidad de la lógica clásica se aplica, pero no para los segundos. Una cuestión natural que puede ocurrir al lector es: es posible definir una identidad también para los q-conjuntos legítimos? La respuesta es que si, es posible. Pero, continua el indagador: ¿entonces por que no lo hacen?

Primero, veamos un modo de definir la identidad para los q-conjuntos.

Definición 13 *Sean x e y q-conjuntos legítimos. Ponemos*

$$x \approx y := \forall z(z \in x \leftrightarrow z \in y).$$

Es un ejercicio sencillo probar que $\approx$ tiene las propiedades de la identidad clásica. Entonces, ¿por qué no la adoptamos? La respuesta es la siguiente: la lógica,

como dice Newton da Costa, "es fundamentada en una visión metafísica del mundo" (da Costa 1980, p.77). Eso puede ser extendido para las teorías en general, incluso las de la física. En efecto, recordemos que Einstein no abandonaba sus convicciones realistas y locales, lo que caracteriza su metafísica, la cual fue cuestionada por ejemplo por el teorema de Bell (el lector puede ver Kumar (2009) para una buena exposición general). La propia lógica clásica, nuevamente siguiendo a da Costa, es basada en una "doctrina estática del real" (*id.ibid.*), de acuerdo con la cual las cosas mantienen sus identidades, tienen propiedades que solamente nos basta revelarlas, son impenetrables y muchas otras cosas que caracterizan lo que arriba llamamos de individuos.

Nuestra metafísica es distinta. En nuestras lecturas de las teorías cuánticas, nos quedamos convencidos de que la ontología que más refleja la naturaleza de las entidades cuánticas es aquella que supone que son no-individuos, sean "objectos" sean paquetes de propiedades. Lo que se acentúa es que esas cosas no obedecen a la teoría usual de la identidad, y por eso la cuestionamos y encontramos una manera de expresar eso por medio de la hipótesis de que la noción clásica de identidad simplemente no se aplica a ellas. Por eso, para mantener esa visión metafísica, es que no nos parece interesante definir una identidad para los q-conjuntos legítimos de Ω^{-}, así como no definimos una identidad para los m-átomos de Ω.

Referencias

Aerts, D.; D'Hondt, E.; Gabora, L. 2000. Why the disjunction in quantum logic is not classical. *Foundations of physics* 30(9): 1473–1480.

Arenhart, J. R. B. 2011. A discussion on finite quasi-cardinals in quasi-set theory. *Foundations of Physics* 41: 1338–1354.

Arenhart, J. R. B. 2023. A non-individuals account of quantum mechanics. *Philosophical Transactions of the Royal Society A* 381(20220097): 1–10.

Beth, E. W. 1966. *The Foundations of Mathematics: A Study in the Philosophy of Science*. New York: Harper and Row.

Bigaj, T. 2022. *Identity and Indiscernibility in Quantum Mechanics*. New Directions in the Philosophy of Science. Cham: Palgrave Macmillan.

Blass, A. 1984. Existence of bases implies the axiom of choice. *Contemporary mathematics* (1984): 31-33.

Bueno, O. 2023. Identity and quantification. In: J.R.B. Arenhart; R.W. Arroyo (eds.), *Non-Reflexive Logics, Non-Individuals, and the Philosophy of Quantum Mechanics: Essays in Honor of the Philosophy of Décio Krause*, p.179-190. Synthese Library. Cham: Springer.

da Costa, N. C. A. 1980. *Ensaio sobre os Fundamentos da Lógica*. São Paulo: HUCITEC-EdUSP.

da Costa, N. C. A.; Bueno, O. 2009. Lógicas não-reflexivas. *Revista Brasileira de Filosofia* 232: 181–196.

da Costa, N. C. A.; Holik, F. 2015. A formal framework for the study of the notion of undefined particle number in quantum mechanics. *Synthese* 192(2): 505–523.

Dalla Chiara, M. L. 1986. Quantum Logic. In: *Handbook of Philosophical Logic: Volume III: Alternatives in Classical Logic*, p.427–469. Dordrecht: Springer.

Dalla Chiara, M. L.; Giuntini, R.; Greechie, R. 2004. Reasoning in Quantum Theory: Sharp and Unsharp Quantum Logics. *Trends in Logic (Studia Logica Library)* n.22. Dordrecht: Kluwer.

Dalla Chiara, M. L.; Giuntini, R.; Krause, D.; et al. 1998. Quasiset theories for microobjects: a comparision. In: *Interpreting bodies: Classical and quantum objects in modern physics*, p.142-152. Princeton: Princeton University Press.

Dalla Chiara, M. L.; Toraldo di Francia, G. 1993a. Individuals, kinds and names in physics. In: G. Corsi; M.L. Dalla Chiara; G.C. Ghirardi (eds.), *Bridging the Gap: Philosophy, Mathematics, and Physics*, p.261–283. Boston Studies in the Philosophy of Science. Dordrecht: Kluwer.

Dalla Chiara, M. L.; Toraldo di Francia, G. 1993b. Individuals, kinds and names in physics. In: G. Corsi; M.L. Dalla Chiara; G.C. Ghirardi (eds.), *Bridging the Gap: Philosophy, Mathematics, and Physics*, p.261–284. Boston Studies in the Philosophy of Science. Dordrecht: Kluwer.

Dalton, J. 1808. *A New System of Chemical Philosophy*. London: S. Russell.

de Barros, J.; Holik, F.; Krause, D. 2024. *Distinguishing indistinguishabilities: Logic and Ontology from Quantum Particles to Processes*. To appear in Synthese Library.

de Barros, J. A.; Jorge, J. P.; Holik, F. 2021. On the assumptions underlying ks-like contradictions. *arXiv preprint* arXiv:2103.06830.

Dieks, D. 2023. Quantum individuality. In: J.R.B. Arenhart; R.W. Arroyo (eds.), *Non-Reflexive Logics, Non-Individuals, and the Philosophy of Quantum Mechanics: Essays in Honor of the Philosophy of Décio Krause*, p.11-28. Synthese Library. Cham: Springer.

Domenech, G.; Holik, F. 2007. A discussion on particle number and quantum indistinguishability. *Foundations of Physics* 37: 855–878.

Enderton, H. B. 1977. *Elements of set theory*. New York: Academic Press.

Evans, J.; Thorndike, A. S.; Ketterle, W. 2007. *Bose-Einstein condensation: identity crisis for indistinguishable particles*. Cham: Springer.

Fraenkel, A. A. 1967. The notion of 'definite' and the independence of the axiom of choice. In: J. van Heijenoort (ed)., *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*, p.284–289. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Franco de Oliveira, A. J. 2004. *Lógica e Aritmética*. Brasília: Editora da UnB.

French, S. 2023. Quasi-structural realism. In: J.R.B. Arenhart; R.W. Arroyo (ed.), *Non-Reflexive Logics, Non-Individuals, and the Philosophy of Quantum Mechanics: Essays in Honor of the Philosophy of Décio Krause*. Synthese Library. Cham: Springer.

French, S.; Krause, D. 2006. *Identity in physics: A historical, philosophical, and formal analysis*. Oxford: Oxford University Press.

French, S.; Ladyman, J. 2003. Remodelling structural realism: quantum physics and the metaphysics of structure. *Synthese* 136(1): 31–56.

García Pintos Barcia, L. P. 2011. *Una interpretación de la mecánica cuántica basada en considerar un tiempo físico*. Tesis, Maestría en Física. Universidad de la República, Uruguay.

Hilbert, D. 1976. Mathematical problems. In: F.E. Browder, (ed.), *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics: Mathematics Arising from Hilbert's Problems*, 28(1).

Holik, F.; Jorge, J. P.; Krause, D.; Lombardi, O. 2022. Quasi-set theory: A formal approach to a quantum ontology of properties. *Synthese* 200(5): 401.

Jammer, M. 1966. *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*. International Series in Pure and Applied Physics. New York: McGraw-Hill.

Jech, T. 2003. *Set theory: The third millennium edition, revised and expanded*. Cham: Springer.

Jorge, J. P.; Holik, F. 2020. Non-deterministic semantics for quantum states. *Entropy* 22(2).

Jorge, J. P.; Holik, F. 2022. Lógica cuántica, nmatrices y adecuación, i. *Teorema: Revista Internacional de Filosofía* 41(3): 65–88.

Jorge, J. P.; Holik, F. 2023. Lógica cuántica, nmatrices y adecuación: ii. *Teorema: Revista internacional de filosofía*, 42(1): 149–169.

Jorge, J. P.; Holik, F.; Krause, D. 2023. Un acercamiento a las semánticas Nmatriciales basadas en QST. *Principia: an international journal of epistemology* 27(3): 539-607.

Kadison, R. V.; Ringrose, J. R. 1983. *Fundamentals of the theory of operator algebras*. New York: Academic Press.

Ketterle, W. 1999. Experimental studies of Bose-Einstein condensation. *Physics Today* 5(12): 30–35.

Kleene, S. C. 1952. *Introduction to Metamathematics*. Bibliotheca Mathematica, vol.1. Amsterdam: North-Holland.

Kochen, S.; Specker, E. P. 1990. The problem of hidden variables in quantum mechanics. *Ernst Specker Selecta*, p.235–263. Basel: Birkhäuser Basel.

Krause, D. 2003. *The mathematics of non-individuality*. Coleção Documentos. São Paulo: IEA/USP, Series Lógica e Teoria da Ciência.

Krause, D. 2005. Structures and structural realism. *Logic Journal of the IGPL* 13(1): 113–126.

Krause, D. 2024a. On Dieks against the Received View. *Preprint, Academia.edu*.

Krause, D. 2024b. On Otavio Bueno on identity and quantification. *Preprint, Academia.edu*.

Krause, D.; Sant'Anna, A. S.; Volkov, A. G. 1999. Quasi-set theory for bosons and fermions: quantum distributions. *Foundations of Physics Letters* 12: 51–66.

Kumar, M. 2009. *Quantum: Einstein, Bohr and the Great Debate about the Nature of Reality*. London: Icon Books.

vLadyman, J. 1998. What is structural realism?. *Studies in History and Philosophy of Science* 29(3): 409–424.

Lombardi, O. 2008. A modal-hamiltonian interpretation of quantum mechanics. *Studies in History and Philosophy of Science Part B: Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 39(2): 380–443.

Lombardi, O. 2023. Not individuals, nor even objects: On the ontological nature of quantum systems. In: J.R.B. Arenhart; R.W. Arroyo (eds.), *Non-Reflexive Logics, Non-Individuals, and the Philosophy of Quantum Mechanics Essays in Honour of the Philosophy of Décio Krause*. Synthese Library. Cham: Springer.

Lombardi, O.; Dieks, D. 2014. Particles in a quantum ontology of properties. To appear in: T. Bigaj; C. Wüthrich (eds.), *Metaphysics in Contemporary Physics*. Poznan Studies 104.

Lowe, J. E. 2003. Individuation. In M.J. Loux; D.W. Zimmerman (eds.), *The Oxford Handbook of Metaphysics*, p.75–95. Oxford: Oxford University Press.

Mahan, B. H. 1975. *University Chemistry*. 3rd edition. Boston: Addison Wesley

Manin, Y. I. 1976. Foundations. In: F. Browder; A.M. Society (eds.), *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems*, p.36. Providence, RI: American Mathematical Society.

Mendelson, E. 2009. *Introduction to mathematical logic*. Boca Raton: CRC press.
Muniz, J. A. 2012. *Modelos de relojes reales en mecánica cuántica*. Master's thesis, Universidad de la República, Uruguay.
Muñoz González, J. A. 2011. *El tiempo como observable en mecánica cuántica*. Memoria Presentada para Optar al Grado de Doctor. Euskal Herriko Unibertsitatea.
Nascimento, M. C.; Krause, D.; Feitosa, H. d. A. 2011. The quasi-lattice of indiscernible elements. *Studia Logica* 97: 101–128.
Post, H. 1973. Individuality and physics. *The listener* 70, 1963, 534-537. Reprinted in *Vedanta for East and West*, 32: 14–22.
Ramsey, F. P. 1950. *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*. London: Routledge and Kegan Paul.
Roitman, J. 2013. *Introduction to Modern Set Theory*. Ann Arbor: Orthogonal.
Rubin, J. E. 1967. *Set Theory for the Mathematician*. San Francisco: Holden-Day.
Samperio Valdivieso, Á. et al. 2019. *Formulación algebraica de la mecánica cuántica. La conjetura de Kadison-Singer*. Grado en Física, Universidad de Valladolid, España.
Sant'Anna, A. S. 2023. On the consistency of quasi-set theory. In: J.R.B. Arenhart; R.W. Arroyo (eds.), *Non-Reflexive Logics, Non-Individuals, and the Philosophy of Quantum Mechanics. Essays in Honour of the Philosophy of Décio Krause*, p.97-104. Synthese Library. Cham: Springer.
Sider, T. 2010. *Logic for Philosophy*. Oxford: Oxford University Press.
Suppes, P. 1972. *Axiomatic Set Theory*. New York: Dover.
Teller, P. 1998. Quantum mechanics and haecceities. In: E. Castellani (ed.), *Interpreting Bodies: Classical and Quantum Objects in Modern Physics*, p.114–141. Princeton: Princeton University Press.
Toraldo di Francia, G. 1978. Che cos'è un oggetto fisico?. *Scientia* 113(1): 57–65.
Toraldo di Francia, G. 1981. *The Investigation of the Physical World*. Cambridge: Cambridge University Press.
Weyl, H. 1949. *Philosophy of Mathematics and Natural Science*. Princeton: Princeton University Press.
Zee, A. 2023. *Quantum Field Theory, as Simply as Possible*. Princeton: Princeton University Press.
Zermelo, E. 1967. Investigations in the foundations of set theory i. In: J. van Heijenoort (ed.), *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic 1879-1931*, p.199–215. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Notas

[1]Algunos autores denominan 'gran lógica' a las lógicas de orden superior o cuando envuelven las teorías de conjuntos; ver (Beth, 1966, p.229).

[2]Una discusión sobre cómo esas cosas encuentran hogar (o no encuentran) en la física cuántica se puede ver en Teller (1998).

[3]El caso más emblemático es el de los bosones, como veremos más abajo, que pueden tener todas las mismas propiedades en común.

[4]En principio, nada impide que los átomos tengan elementos, pero es usual tomarlos sin ellos.

[5]La definición más común sigue las ideas de von Neumann, donde un cardinal es un ordinal que no es equinumeroso con ningún ordinal menor que él. Esa definición depende del Axioma de la Elección. En 1954, Dana Scott propuso una definición de cardinal que no depende de ese axioma, sino del Axioma de la Regularidad. La definición de Scott utiliza los conjuntos (sí, son conjuntos) V_α de la jerarquía de von Neumann, así que reintroduce los ordinales por la puerta del fondo pués necesita del concepto de biyección; vea (Jech 2003, p.65).

[6]Llamaremos "finitos" a los q-conjuntos que tienen q-cardinales asignados por la teoría de apoyo que desarrollamos abajo.

[7]En verdad, aún eliminamos de $\mathfrak{Q}$ los axiomas del concepto primitivo de casi-cardinal que en esa teoría es dado por un símbolo unario de operaciones, qc tal que si x es un q-conjunto, entonces $qc(x)$ es su q-cardinal, que es sujeto a axiomas adecuados. Acá consideramos únicamente q-cardinales "finitos" que la teoría de apoyo define.

[8]Eso es diferente en $\mathfrak{Q}$, donde hay una definición de *identidad extensional* que se aplica a M-átomos y a casi-conjuntos y que tiene las propiedades de la identidad usual. En $\mathfrak{Q}$, solamente los m-átomos no obedecen las propiedades de la identidad clásica.

[9]Eso será importante mas abajo, pues podremos decir que un q-cardinal es indiscernible de un correspondiente número natural — que es un conjunto.

[10]Como es usual, cuando escribimos $\alpha(x_1, \ldots, x_n)$, queremos indicar que las variables x_i están entre las variables de α; así, podemos aceptar que $\alpha(t_1, \ldots, t_n)$ es obtenida por la substitución de x_i por t_i.

[11]La restricción a que la q-cardinalidad sea menor que m podría ser rechazada, pero no haremos eso.

[12]La cita es la siguiente: "the ultimate particles [en 1808 él no conocia electrons y otras cosas más elementares do que átomos] of all homogeneous bodies are perfectly alike in weight, figure, etc. In other words, every particle of water is like every other particle of water, every particle of Hydrogen is like every other particle of Hydrogen, etc".

[13]Recordamos que el q-cardinal de esa clase no es más grande que el q-cardinal de x.

[14]La noción de nube de un q-conjunto fue introducida enKrause (2003).

[15]Eso es, conocer sus identidades.

[16]Claro que podríamos formular el axioma usando $\subseteq^*$.

[17]Eso es lo que hizo H. Weyl, pero considerando conjuntos; vea (Weyl, 1949, App.B).

[18]Este resultado está discutido en Krause et al. (1999).

[19]A pesar de que se pueda encontrar maneras de representar esas entidades haciéndolas obedecer la teoría usual de la identidad, como se hace en la mecánica Bohmiana o en otras versiones de la cuántica.

[20]Lowe distingue entre individuación en dos sentidos; uno metafísico, que es lo que estamos adoptando, y uno epistemológico, diciendo que este presupone aquel otro.

[21]Ésta es una expresión que proviene de Saul Kripke y significa una etiqueta que identifica a una entidad como esa misma entidad en todos los mundos posibles donde existe. Se supone que los nombres propios desempeñan este papel. El empleo de la *identidad transmundana* es objeto de grandes controversias, como es sabido.

[22]O sea, cuando la longitud de onda del electrón es más grande que el *longitud de onda de de Broglie*.

[23]Recuerde el lector que en Ω hay dos especies de átomos, los M-átomos, que simulan los urelementos de ZFA y los m-átomos, que son colocados para simular las entidades cuánticas bajo la hipótesis de que la teoría estándard de la identidad (STI) no se aplica a ellos. El concepto de q-cardinal es primitivo y descripto por axiomas adecuados (ver French and Krause (2006)).

[24]Recordando que los axiomas usuales de la identidad son la reflexividad y la substitutividad Mendelson (2009).

[25]Ha sido probado por Andreas Blass que la existencia de bases para un espacio vectorial arbitrario es equivalente al Axioma de Elección Blass (1984)

[26]Hablando rápidamente, como ya decimos antes, un Principio de Individuación (PI) es algo que hace una cosa — generalmente referida como un 'individuo'— la cosa que él es y no alguna otra. Para una discusión, vea Lowe (2003).

[27]Es importante notar que el uso del término 'individuo' es acá distinto de aquél que hemos usado en otras partes. Acá se trata de las entidades 'iniciales' del discurso, sobre las cuales las propiedades y relaciones serán definidas.

[28]Estamos tomando una versión ligeramente diferente a la presentada en Holik et al. (2022). En ese trabajo, las *propiedades caso instanciadas* (propiedades caso-I) son llamadas *propiedades caso posibles* y la indistinguibilidad primitiva es definida como una relación entre *propiedades tipo instanciadas*. En el presente trabajo, hemos incorporado algunas versiones más recientes de esta ontología, donde la indistinguibilidad primitiva es entre *propiedades caso instanciadas (las anteriormente llamadas propiedades caso posibles)* y las demás relaciones de indistinguibilidad son heredadas a partir de esta.

[29][En el sentido que aclaramos arriba, es decir, entes sin identidad.]

[30]Diferentes formalismos para la mecánica cuántica estándar, aunque matemáticamente equivalentes, evocan imágenes ontológicas diferentes. En el formalismo de los espacios de Hilbert, a cada sistema cuántico se asocia un espacio de Hilbert de forma que los vectores representan los estados del sistema y los observables están representados por ciertos operadores que actúan en el espacio de Hilbert. La prioridad matemática de los sistemas y estados sobre los observables se refleja fácilmente en una ontología de individuos, dotados de prioridad ontológica sobre sus propiedades. Por el contrario, en el formalismo algebraico, un sistema cuántico está representado por un álgebra de observables, y los estados son funcionales en esa álgebra. Si esta prioridad matemática de los observables sobre los estados se transpone al dominio ontológico, el resultado es una ontología cuyos elementos principales son las propiedades, y los objetos surgen como la convergencia de esas propiedades.

[31]En este sentido, el tiempo no es un observable, sino un parámetro físico. Esto ha llevado a definir observables basados en este parámetro, como, por ejemplo, el "tiempo de vuelo" dentro de un experimento Muñoz González (2011). El tratamiento del tiempo como parámetro físico (en realidad, parámetro matemático de las ecuaciones diferenciales) ha llevado también a otros físicos a proponer alternativas. Una de ellas es *la interpretación de Montevideo de la Mecánica cuántica*, donde el tiempo es "marcado" por un sistema físico asociado al experimento, pero distinto del sistema principal que está siendo considerado García Pintos Barcia (2011); Muniz (2012).

Agradecimientos

Nos gustaría agradecer al Profesor Guillermo Rosado Haddock por la invitación para presentar este artículo en el volumen que él ha organizado, al Dr. Adonai S. Sant'Anna por la provocación para el desarrollo de una teoría de casi-conjuntos sin átomos y por muchas otras cuestiones sobre la teoría. También agradecemos a la Dra. Eliza Wajch, al Profesor Otávio Bueno y a los doctores Jonas R. B. Arenhart y Federico Holik por discusiones de muchas cuestiones sobre los casi-conjuntos.