PRINCIPIA 26(3): 469–488 (2022) doi: 10.5007/1808-1711.2022.e84780
Published by NEL — Epistemology and Logic Research Group, Federal University of Santa Catarina (UFSC), Brazil.

El papel de la intuición en la teoría del conocimiento matemático: la perspectiva de Philip Kitcher

The role of intuition in the theory of mathematical knowledge: Philip Kitcher's perspective

Lina María Peña-Páez
Universidad de San Buenaventura, Colômbia
lpena@usbbog.edu.co

Abstract. One of the subjects of study of the philosophy of mathematics has to do with how we access the knowledge of the objects of mathematics, being so abstract objects. In this article, we will show that this form of "access" is intuition, understood as a dynamic process that requires the experience of mathematicians, whose effects will be seen in the concrete world. Starting from the dilemma exposed by Benacerraf, we will review how intuition is a possible solution and how it has always played a leading role in the epistemology of mathematics. Finally, we will review the role of Kitcher's ideas versus the theory of mathematical knowledge and the role of intuition.

Keywords: Mathematical intuition • theory of knowledge • Kitcher • Benacerraf

RECEIVED: 10/11/2021 REVISED: 12/07/2022 ACCEPTED: 05/08/2022

1. Introducción

El debate contemporáneo sobre filosofía de las matemáticas, gira en torno a los problemas gnoseológicos y ontológicos planteados por Benacerraf en sus dos artículos clásicos influyentes (Benacerraf 1993; 2004), cuyo objetivo fue explicar cómo podemos tener acceso a los objetos matemáticos (Mancosu 2016). Al enmarcar la discusión, solamente, en la teoría del conocimiento matemático, se dejaron por fuera aspectos como la historia y la práctica matemática.

Para Mancosu, existe una necesidad apremiante de extender la teoría del conocimiento matemático donde se aborden temas gnoseológicos, que incluyan "fecundidad conceptual, evidencia, visualización, razonamiento diagramático, comprensión, explicación, y otros aspectos de la teoría del conocimiento matemático que son ortogonales respecto del problema del acceso a 'objetos abstractos'" (Mancosu 2016, p.132).

Ahora bien, cuando se aborda el tema de la epistemología de las matemáticas, aparecen con frecuencias alusiones a la intuición: "la concepción de la intuición ha estado ligada a la idea de cómo el individuo adquiere el conocimiento" (Peña-Páez

2020, p.128). Sin embargo, el papel que juega la intuición no es el mismo en todas las corrientes filosóficas, ni en el pensamiento de los matemáticos (Gödel 2006; Kant 1978; Kitcher 1985; Maddy 1980; Parsons 1980; Tieszen 1989). Otras veces, al estudiar el tema del "acceso" al conocimiento matemático pareciera eliminarse la distinción entre epistemología y metodología. Y aunque están relacionadas, "la epistemología de las matemáticas trata de cómo es posible el conocimiento matemático, mientras que la metodología de las matemáticas se centra en qué métodos se utilizan en las matemáticas" (Crowe 1988, p.274).

El apriorismo de Gödel, las consecuencias filosóficas de sus teoremas de incompletitud (Peña-Páez 2021), así como su "afiliación" al platonismo (Burgess 2014; Folina 2014; Maddy 1980; Parsons 1995; Rivera Novoa 2007; Tieszen 2002), han marcado el recorrido de la filosofía actual de las matemáticas. De allí que Benacerraf en sus artículos plantea el dilema cuyos dos cuernos, el epistemológico y el ontológico, parecen incompatibles. Sin embargo, el dilema puede tener una solución viable si nos apartamos de la postura del platonismo, en el que los objetos están en un reino de objetos inteligibles, donde las ideas son eternas, inmutables, atemporales y de origen divino. Y en el que el método de conocimiento es hipotético deductivo, en el que no caben las conjeturas ni los problemas equivocados. Y nos acercamos a otro tipo de reino, en el que los objetos son construcciones humanas y no tienen ninguna esencia, "no atribuyo ninguna condición a los objetos o referentes de nuestros conceptos y nociones" (Popper y Eccles 1993, p.49). Y en el que las conjeturas y los problemas equivocados son sus "habitantes" dado que son construcciones humanas.

Este nuevo reino, denominado por Popper y Eccles como mundo 3, claramente está contra el apriorismo y más cerca del naturalismo, donde, por ejemplo:

> los axiomas de una teoría no son sus comienzos. Más bien son el resultado de una sistematización de un "cuerpo previo de afirmaciones" sobre los objetos de la teoría que han sido empleados tácita o explícitamente en el razonamiento. (Sierpinska y Lerman 1996, p.836)

Con esta cita nos podemos introducir en el pensamiento de Philip Kitcher, quien rechaza rotundamente el apriorismo (1984) y se acerca más al naturalismo, el cual para él, está más acorde con la historia de las matemáticas, en cuanto a la génesis y justificación del conocimiento, haciéndolo inseparable de su propio crecimiento.

Philip Kitcher comprende esta distinción y es por ello que en la introducción de su libro The nature of mathematical knowledge, se interesa por "comprender cómo se obtiene el conocimiento matemático de la persona común y del matemático experto." (Kitcher 1984, p.3). La matemática ha sido considerada históricamente como un ejemplo brillante del conocimiento humano y un estándar que puede incluso medir el conocimiento en otras áreas. Esta misma brillantez ha traído creencias idealizadas sobre cómo es el conocimiento matemático. Al estar aparentemente alejada de experimentos y observaciones, la ha llevado a erigirse como una ciencia absoluta de conocimiento a priori y cuya fuente está en un "lugar" diferente a la experiencia perceptiva. Kitcher rechaza la tesis del apriorismo como forma del conocimiento matemático y afirma: "trataré de explicar cómo son posibles los orígenes perceptivos del conocimiento matemático ofreciendo una explicación de aquello acerca de lo cual trata la matemática, una imagen de la realidad matemática, si se prefiere" (Kitcher 1984, p.6).

Otra idea de la que Kitcher se aparta es de aquella que implica que el conocimiento matemático está contenido en una única persona y no en una comunidad de formadores, aunque estas comunidades tendrán un papel preponderante en la epistemología de las matemáticas. Con su explicación, Kitcher no intenta decir que los empiristas como Mill, Lakatos o Putman estaban equivocados, sino que su tratamiento del tema estaba incompleto. Así, la epistemología de las matemáticas debe tener una perspectiva semejante a la de las ciencias naturales y debe escapar a las filosofías fundacionalistas.

Luego de mostrar la relación de la intuición con la epistemología de las matemáticas, terminaremos estudiando el papel que para Kitcher tiene la intuición en el conocimiento matemático. Lo que nos llevará a concluir que la intuición es protagonista en la resolución de problemas y no en el "descubrimiento" de los axiomas. Es decir, que, aunque los axiomas nos parezcan "obvios", la creencia en ellos no es generada por un proceso del cual aprendamos directamente los objetos matemáticos. Los matemáticos talentosos tienen la habilidad de abordar el problema desde un nuevo punto de vista. Pueden "intuir" que cierta "maniobra" les permitirá evaluar una integral o deducir ciertas propiedades de un sistema por analogía con otro, su éxito radica en la capacidad de discernir rasgos de la realidad matemática.

Queremos sostener en este artículo que la intuición a la que hace referencia Kitcher, nosotros la entendemos como el proceso "de supuestos conocimientos no obtenidos por inferencia consciente de algo más inmediato" (Burgess 2014, p.12). Es decir, que la intuición, que muestra sus frutos en la práctica matemática (para Kitcher, en particular, en la resolución de problemas), corresponde a "un proceso, donde el mundo real y los conocimientos previos del individuo juegan un papel importante; y en el transcurso de dicho proceso, no se puede desconocer la necesidad de la lógica para formalizar los hallazgos obtenidos por la intuición" (Peña-Páez 2020, p.129).

2. La intuición y la teoría del conocimiento

Acercarse a la epistemología de la matemática nos lleva al artículo "Mathematical Truth" de 1973, escrito por Paul Benacerraf, en el cual presentaba un dilema que surgía al intentar acceder al conocimiento de los objetos matemáticos (Benacerraf

1973). En aquella época, los temas de principal interés para los filósofos de la matemática giraban en torno a la epistemología (la teoría del conocimiento) y la ontología (el modo de existir de los objetos), mientras que la teoría del cocimiento más aceptada era la teoría causal, y para el modo de existir de los objetos se había popularizado el platonismo.

Ahora bien, entre la epistemología, la teoría causal y el platonismo, se genera una tensión, que se ha denominada en la literatura como "el dilema de Benacerraf". En términos generales lo que nos dice el dilema es que: si se acepta la teoría causal del conocimiento, debería funcionar para conocer todos los objetos que se tengan que conocer, es decir, que estén ahí, y justamente esto no ocurre en las matemáticas porque sus objetos de estudio son abstractos. Bajo esta postura el dilema de Benacerraf se hace más evidente, porque debería suceder una de dos cosas: o rechazamos el platonismo, es decir, el modo de existir de los objetos matemáticos como independientes de nosotros (no espaciotemporales) o renunciamos a la teoría causal del conocimiento.

Para muchos pensadores, el conocimiento de los objetos matemáticos tiene un carácter empírico dado que nuestro conocimiento sobre ellos es a posteriori. Tal afirmación lleva al asunto tratado por el dilema de Benacerraf: ¿los objetos matemáticos cumplen la teoría causal? Aquí la causalidad se miraría como el papel que juegan los objetos dentro de la teoría científica: "es suficiente señalar que el desafío de Benacerraf al platonismo depende explícitamente de una ahora, en gran medida, desacreditada epistemología de la teoría causal del conocimiento" (Jesus Alcolea 2006, p.246).

Por ejemplo, Ramanujan obtuvo su conocimiento matemático a pesar de no conocer las demostraciones, por lo que el desafío de Benacerraf no era proporcionar una forma posible para que las personas adquieran conocimiento matemático, sino más bien explicar cómo las personas realmente obtienen conocimiento matemático si el platonismo es cierto. (Daly y Liggins 2014, p.231)

Algunos seguidores del realismo (como Gödel) creen en la existencia de los objetos matemáticos y en la verdad de las afirmaciones independiente de las capacidades cognitivas de los individuos, "así, la cuestión ontológica básica se asienta en la naturaleza de esos objetos, resumiéndose — habitualmente — en la pregunta de si esas entidades son acontecimientos o productos mentales o existen independientemente de la actividad mental" (Moretti 1991, p.139).

Así pues, por una parte, la verdad matemática requiere que haya objetos de los que estamos causalmente aislados mientras que, por otra parte, el conocimiento en general y, por esto, el conocimiento matemático en particular requiere que haya objetos a los que tengamos acceso causal. Dicho brevemente, lo que parece necesario para la verdad matemática, hace imposible el conocimiento matemático. (Hart 1991, p.103).

Es inevitable del dilema preguntarse "dónde" estarán estos objetos de la matemática dada la dificultad que se nos presenta al intentar comprender cómo "accedemos" a ellos. El platonismo asegura que los objetos matemáticos pertenecen a un tercer reino, que no es físico ni subjetivo, "caracterizamos los objetos abstractos solo negativamente: no están en el espacio ni en el tiempo, y no interactúan causalmente con la materia" (Hossack 1991, p.159). Brouwer por su parte, creía que estaban en el mundo de los estados de conciencia, autodenominándose como un psicólogo introspectivo. Buscar los objetos de la matemática en la mente, implicaría que cada uno tendría una idea diferente de lo que se debería entender por el "número", dado que lo que está en la conciencia es privado y subjetivo.

Otros filósofos y matemáticos buscan la repuesta del acceso a los objetos de la matemática en las pruebas lógicas, pero esta consideración, también ha mostrado, que el sólo dominio del lenguaje matemático no lleva a la construcción de grandes teorías, se requiere de la intuición (Poincaré 1910; 1964; 2017). La prueba matemática debe mostrar un método puesto que "nuestro acceso epistémico al hecho matemático se compara mejor no con intuiciones de objetos, sino con la adquisición de una habilidad práctica" (Hossack 1991, p.169).

Consideramos en este artículo que una posible solución al dilema consistiría en mostrar que los objetos de la matemática están en un tercer reino (no al estilo platónico), diferente al espacial y al interno. Y entonces una forma de tener conocimiento sobre el modo de existir de esos objetos es a través de la intuición. Ahora bien, debemos señalar que "cualquier solución aceptable al dilema de Benacerraf tendrá que ofrecer una explicación del conocimiento empírico y matemático que evite, entre ellos, un 'doble estándar'" (Godlove 2011, p.455).

Tenemos el mundo de los objetos concretos, físicos (espacio), el mundo de los estados de conciencia, del conocimiento subjetivo (tiempo) y un tercer mundo sería el mundo de los conocimientos objetivos. Antes de abordar esta idea sobre el mundo 3, diremos algo sobre los mundos 1 y 2.

En el mundo 1 encontramos los eventos físicos, los biológicos, en general, todo lo relacionado con el cuerpo y el mundo físico. En el mundo 2, encontramos los estados de conciencia, los psicológicos o mentales. Estos dos mundos se interrelacionan y uno puede ejercer influencia sobre el otro, "un dolor de muelas constituye un buen ejemplo de un estado que es a la vez mental y físico" (Popper y Eccles 1993, p.42). En el estudio de los problemas psicofísicos, algunos consideran que la interacción sucede en el cerebro, lo que implica una discusión sobre la relación "cerebro-mente". Por supuesto que este tema de la interacción es mucho más complejo de estudiar. Sin embargo, es necesario abandonar la idea de tener un conocimiento completo y pleno, por tener una descripción detallada que pueda brindarnos una comprensión parcial de la mencionada relación.

Si nosotros consideramos que la intuición matemática es ese proceso que se origina por el interés de comprender o resolver (mundo 2) un problema cuyo origen puede estar en un hecho físico o matemático (¿mundo 1 y mundo 2?) y que luego de la intervención de los actos de conciencia (mundo 2) y la experiencia matemática del individuo (¿mundo 1 exclusivamente?) puede ser resuelto y puesto a prueba bajo los formalismos (¿mundo 1 o 2?) de la comunidad académica, entonces pareciera que la intuición también se relaciona con el problema mente-cuerpo.

Este problema puede abordarse desde una nueva perspectiva, a saber, introduciendo un mundo 3, el mundo de los objetos del pensamiento, el mundo producido por la mente. "Por Mundo 3 entiendo el mundo de los productos de la mente humana, como las historias, los mitos explicativos, las herramientas, las teorías científicas (sean verdaderas o falsas), los problemas científicos, las instituciones sociales y las obras de arte" (Popper y Eccles 1993, p.44). Los objetos de este Mundo 3 son obra de los individuos, o grupos de ellos. En este mundo 3 "habitan" los objetos y las proposiciones de la matemática.

Es importante asumir que los objetos del mundo 3 pueden ser incorpóreos, de esta forma se puede erradicar aquella creencia que implica que la comprensión o captación de estos objetos abstractos, tiene que ver únicamente, con los objetos sensibles. Así, la forma de captar los objetos del mundo 3 no necesariamente depende de que los objetos estén relacionados con nuestros sentidos.

Mi tesis es la de que la mente humana capta los objetos del Mundo 3 por un método que, si no siempre es directo, es el menos indirecto (y que discutiremos); un método que es independiente de su incorporación y que, en el caso de aquellos objetos del Mundo 3 (como los libros) que pertenecen también al Mundo 1, hace abstracción del hecho de su incorporación. (Popper y Eccles 1993, p.49).

Tal vez este método es la intuición. Concebiremos, entonces, la intuición como el proceso que puede "partir" del Mundo 1 o 2, que gracias a su interacción con los objetos del Mundo 3, los tranforma y lleva a la invención de nuevas teorías; para volver a ser insertados de una nueva manera en los mundos 1 o 2.

Este proceso, que hemos llamado intuición, nos permite conocer los objetos de la matemática, que de acuerdo con Popper y Eccles, "habitan" el mundo 3. Esta relación intuición-objetos, no es nueva, para Kant constituían los elementos del conocimiento (1999 p.193; A50/B74). El estudio de las ideas de Kant sobre la posibilidad de la matemática y su relación con la intuición se ha retomado para el caso de los sistemas formales, gracias al "enfoque constructivista y obligadas precisiones desde los teoremas de incompletud de la Aritmética de Gödel, indefinibilidad de Tarski, indecidibilidad de Church" (de Lorenzo 1992, p.10), y, sobre todo por lo que respecta a las diferencias entre razonamiento lógico formal y matemático.

Kurt Gödel no escapa a usar esta relación intuición-conocimiento, para él, a pesar de lo lejanos que parecen estar los objetos de la matemática con respecto al mundo físico, la intuición en la matemática actuaría como la percepción en el mundo físico

(Gödel 2006). Gödel nos invita no sólo a "reconocer el hecho de la intuición con respecto a los conceptos y axiomas, sino también a darle crédito" (Parsons 1995, p.70). Para él, es obvio que los conceptos superiores de la teoría de conjuntos no son tan claros. Por tanto, la intuición no puede brindar conocimientos incuestionables.

La intuición tiene que ver con el carácter que involucra la relación de una persona con su objeto de conocimiento. Cuando nos referimos a la percepción de objetos físicos las expresiones para denotar esa relación son del tipo, "a ve x, a escucha x, a huele x, a percibe x" (Parsons 1980, p.146), el asunto, ahora, es cómo podrían "aparecer" estas expresiones en la idea de "intuición matemática". En verbos perceptuales como ver y percibir se encuentra un uso objeto-relacional, denominado actitud proposicional, es decir, que requiere de enunciados complementarios, tales usos los encontramos en la intuición matemática. Pareciera evidente que los objetos matemáticos se nos dan de manera similar como los objetos físicos son percibidos por los sentidos y aunque muchos filósofos de la matemática no están de acuerdo con esta idea, la realidad es que la intuición funciona "en gran medida como un concepto empírico sencillo" (Parsons 1980, p.148).

Otra postura que relaciona la intuición con la epistemología que se ha venido estudiando en las últimas décadas asume que "el conocimiento matemático es un producto histórico" (Sierpinska y Lerman 1996, p.836). Seguir esta línea argumentativa implica que el origen del conocimiento está basado en una práctica primitiva y que las experiencias son susceptibles de ser manipuladas por los expertos, lo que es una justificación para una práctica puede no serlo para otra, de manera que "esta noción de práctica matemática relativiza el problema del crecimiento del conocimiento matemático tanto histórica como culturalmente" (p.836).

Ahora bien, en esta última línea encontramos a los naturalistas. Y tanto para ellos como para los empiristas una de sus preocupaciones gira en torno a la pregunta ¿cómo se da el conocimiento de los objetos matemáticos? Y aunque algunos "sostienen que no hay posibilidad de obtener conocimiento matemático sin el uso de ciertos procedimientos especiales" (Kitcher 1988, p.294), para ellos, este procedimiento especial podría ser la intuición, a partir de la cual se desprende una cadena de inferencias que van desde los axiomas hasta los teoremas.

A continuación, mostraremos las principales tesis que esgrimen los naturalistas sobre la relación que interesa defender en este artículo: conocimiento e intuición matemática. Para este propósito usaremos los argumentos expuestos por Mark Fedyk, en su capítulo Intuitions, Naturalism, and Benacerraf's Problem.

a) Las verdades que se producen en la investigación son, a lo sumo, aproximadas. La proliferación de conceptos lleva inevitablemente a considerar que ninguno de ellos debe tomarse como "la definición exacta, definitiva y absolutamente verdadera" (Fedyk 2018, p.89). Estas definiciones se pueden interpretar como nodos que, tomados en conjunto, pueden transmitir más información sobre los conceptos que la que se obtendría al revisar las definiciones por separado e individualmente. De allí que los naturalistas deben concebir la proliferación de concepciones sobre la intuición, "como evidencia de que una teoría de la intuición es parte integral de la epistemología de las matemáticas" (Fedyk 2018, p.89). Dadas las diferentes definiciones de la intuición, la filosofía naturalista de la matemática puede explorar cuáles son compatibles e independiente de la filosofía de la matemática que se elija, así como brindar elementos para comprender la función y la naturaleza de la intuición que hace posible el conocimiento matemático.

b) Negar la existencia de las intuiciones es contrario a la intuición misma. Desde niños hemos confiado en ciertas intuiciones básicas para darle sentido al mundo físico, matemático y social. Es evidente que las intuiciones hacen parte del sistema cognitivo humano, más aún, "es mucho más probable que las intuiciones apoyen en lugar de obstaculizar la formación del conocimiento" (Fedyk 2018, p.90).

c) De las posibles opciones, la mejor es aquella en la que la epistemología de las matemáticas da sentido a la relación entre intuición y creencias matemáticas. De la intuición tenemos cantidad de usos e interpretaciones, "a menudo es el término usado cuando uno no tiene una explicación plausible para la fuente de una creencia u opinión determinada" (Fedyk 2018, p.90). Por ejemplo, al revisar los prólogos de los libros de matemáticas, las biografías, los trabajos sobre la naturaleza de las matemáticas, los estudios psicológicos, cognitivos o didácticos, siempre aparece el tema de la intuición. Tal situación sugiere que la intuición juega algún papel destacado en las creencias matemáticas.

Para los naturalistas, la intuición no se asume como fuente del conocimiento a priori, más bien tiene como fundamento la ciencia cognitiva contemporánea.

Dentro de la investigación en epistemología de las matemáticas es parte importante la comprensión del papel de la intuición en su apoyo a la cognición confiable. El hecho de que la intuición permee muchos de los aspectos del conocimiento matemático implica prestarle atención sobre qué tipos de creencias puede justificar la intuición e incluso si puede o no ser fuente de conocimiento. Bajo este marco, encontramos que la intuición matemática como proceso conduce a verdades aproximadas y esto lleva a considerar la necesidad de los conceptos técnicos para el éxito de la ciencia. El problema al que nos enfrentamos es si algunos hechos son exactos y precisos. Lo complejo está en encontrar el equilibrio entre precisión y exactitud. La precisión es un criterio importante que permite "manejar la complejidad del mundo de una manera epistémicamente constructiva" (Fedyk 2018, p.100). La precisión es creada por el lenguaje técnico y los conceptos introducidos en el vocabulario científico, estos nos permiten idealizar el mundo, de tal manera que podemos hablar sobre sus procesos como si fueran tan simples que podemos razonar sobre ellos de manera directa.

Así, la intuición matemática entendida como un proceso y no como fuente de conocimiento está más acorde con la epistemología de las matemáticas, entendida bajo el naturalismo. Veremos en el siguiente apartado cómo para Kitcher, la intuición es necesaria para la resolución de problemas y no para el conocimiento a priori de los axiomas.

3. La teoría del conocimiento de Kitcher y su idea de intuición

La teoría del conocimiento matemático se ha limitado a un único plano, consecuencia de su enfoque en el problema del acceso a los objetos abstractos, por tanto, renovar la filosofía de la matemática implicaría considerar la práctica matemática, lo que aseguraría que ciertos problemas propios de la filosofía florecieran cuando el área apropiada de la matemática es tomada en consideración. Un ejemplo de esta situación es citado por Mancosu, al reconocer que la geometría o la topología pueden despertar interés en problemas de la filosofía matemática como la visualización y el razonamiento diagramático (2016, p.131).

En este contexto encontramos al pensador Philip Kitcher quien está interesado en extender los límites de la teoría del conocimiento más allá de solo preguntarse cómo es posible acceder a los objetos abstractos. Kitcher propone "una teoría del conocimiento y una ontología de la matemática unificadas y una teoría de cómo el saber matemático crece racionalmente" (Mancosu 2016, p.152).

Su teoría del conocimiento otorga un papel preponderante a la historia de la matemática, pero se aparta de la lectura tradicional de la historia como el producto de esfuerzos individuales, y se centra en explicar el conocimiento de los sujetos, al rastrear el conocimiento de sus antecesores, es decir, asume que el conocimiento del individuo se basa en el conocimiento de las autoridades (de comunidades académicas o científicas) que han influenciado a dicho individuo. Esta idea del conocimiento como una construcción social, repercute positivamente en cómo se enseñe a los estudiantes la matemática, no se trata de una ciencia solo destinada para los "genios" sino que requiere disciplina y reconocimiento de todo lo que hicieron los predecesores (Langer-Osuna 2016; Restivo 2017). Es decir, el conocimiento matemático de un individuo en el presente es posible gracias a la cadena de conocedores anteriores.

Varios milenios atrás, nuestros antepasados, probablemente en algún lugar de Mesopotamia, pusieron en marcha la empresa, aprendiendo a través de experiencia práctica algunas verdades elementales de aritmética y geometría. A partir de estos principios humildes las matemáticas han florecido en el impresionante cuerpo de conocimiento que hemos sido afortunados de heredar. (Kitcher 1984, p.5)

Kitcher se adelanta a críticas de su enfoque de la teoría del conocimiento y se pregunta si es posible que, de ese comienzo primitivo, surja el presente cuerpo de conocimiento abstracto, y su respuesta es: sí. Para él, existen patrones inferenciales racionales que llevan al matemático creativo a extender su conocimiento más allá de lo heredado por las autoridades de su pasado. Gracias a la suma de los esfuerzos racionales, el conocimiento de la comunidad matemática aumenta de generación en generación, como se evidencia en varios casos de la historia de la matemática.

Las tesis novedosas propuestas por Kitcher no parecen fáciles de aceptar y están sujetas a críticas (McEvoy 2007; Miró Quesada 1987), sin embargo, consideramos en este artículo que su epistemología de las matemáticas es acorde con la idea que tenemos de intuición como proceso dinámico (Peña-Páez 2020).

Estas tesis son: (1) "originalmente adquirimos gran parte de nuestro conocimiento matemático de los maestros". (2) "parte de este conocimiento se adquiere con la ayuda de las percepciones". (3) "las matemáticas tienen una larga historia". (Kitcher 1984, pp.91–2). La primera nos parece la más "revolucionaria", dado que la historia de la matemática (Boyer 2007; Edwards 1979) tiene preferencia por mostrar al matemático sólo; creando y "adquiriendo" de manera individual e independiente los conceptos o lo que se denomina "las verdades básicas", por el contrario, lo que sucede cuando el matemático está en su estudio "es sólo una extensión del proceso de formación" (Kitcher 1984, p.93).

La explicación del conocimiento de los matemáticos individuales está relacionada con el conocimiento que les han transmitido las autoridades, en particular la de los profesores. Ahora bien, esto no significa que el conocimiento matemático sea "relativo", dado que lo que las autoridades (sean profesores, libros, conferencias) transmiten son el conjunto de creencias ampliamente aceptadas por la comunidad científica.

Referir el conocimiento de un matemático individual a la autoridad de otro es sólo para comenzar la historia explicativa. La finalización de la historia aguarda un relato del conocimiento de la autoridad, y esto, a su vez, generalmente requerirá un relato de las autoridades de la autoridad, y así sucesivamente. (Kitcher 1984, p.95)
Los filósofos han ignorado un tema crucial de la epistemología de las matemáticas: la evolución del conocimiento matemático. Es necesario reflexionar sobre los orígenes de este conocimiento. Esto implica ahondar en cómo los predecesores adquirieron su conocimiento y, escudriñando, se encontrará en el fondo una percepción sensorial ordinaria. Por supuesto, esto no significa que se deba eliminar la idea de que muchos de los enunciados matemáticos no pueden entenderse de esta manera. Así, "la tarea principal de explicar los orígenes del conocimiento matemático se convierte en proporcionar una imagen de la realidad matemática que se ajuste a la tesis de que nuestro conocimiento matemático puede originarse en la percepción sensorial" (Kitcher 1984, p.96).

Las creencias que son aprendidas de los maestros, los libros o cualquier autoridad académica, son un tipo de percepción también. Y como cualquier creencia son susceptibles de cambiar, de modificarse. Aquí encontramos una coincidencia con Kuhn, quien avanza de la idea empirista de un cuerpo de creencias a una idea de paradigma, que va más allá de la observación de índices en un momento dado.

Después de que el descubrimiento había sido asimilado, los científicos se encontraban en condiciones de explicar una gama más amplia de fenómenos naturales o de explicar con mayor precisión algunos de los previamente conocidos. Pero este avance se logró sólo descartando ciertas creencias y procedimientos previamente aceptados y, simultáneamente, reemplazando esos componentes del paradigma previo por otros. (Kuhn 1992, p.112)

Las creencias también son el resultado de "paradigmas" colectivos, sin embargo, como lo hemos mencionado se ha asumido que los cambios evidenciados en la historia de la matemática son exclusivos de individuos sobresalientes de cada época. Nosotros, al igual que Kitcher, sostenemos que los resultados individuales son producto de los avances, retrocesos y reformas que una comunidad o varios matemáticos han realizado en sus épocas anteriores. Es decir, que el movimiento hacia una nueva práctica puede ser el resultado de que la anterior no estaba en equilibrio. En la matemática existe un cambio particular del leguaje que permite resolver los conflictos aparentes. Así, mientras en la ciencia se dice que una teoría fue reemplazada por otra, en la matemática lo que hay es un ajuste en el lenguaje.

Los seres humanos no son sujetos cognoscentes solitarios, de hecho, suelen basar sus juicios en lo que dicen las autoridades. Muchos de los esfuerzos más significativos de la historia de la ciencia hubiesen sido imposibles sin algo de confianza en las autoridades, "el reconocimiento de nuestras asignaciones de autoridad debiera servir como el inicio de investigaciones epistemológicas" (Kitcher 2001, p.123). La atribución a la autoridad es uno de los componentes de la práctica matemática. Pero no sólo se tiene "confianza" en las autoridades o comunidades científicas, también en experimentos paradigmáticos e instrumentos: "como ocurre con los juicios particulares acerca de autoridades, aquí también las afirmaciones sobre casos individuales estarán respaldadas por criterios generales" (Kitcher 2001, p.123). Entonces "el conocimiento matemático se desarrolla a través de la modificación racional de las prácticas matemáticas" (Kitcher 1984, p.166).

Esta modificación racional es evidente en la historia de las matemáticas (entendida como un campo científico y definida como la secuencia de prácticas matemáticas) y sólo desde allí podremos explicar el progreso del cocimiento matemático. La secuencia podría entenderse así:

Un matemático o grupo de matemáticos desean resolver un problema considerado por la comunidad académica. La solución planteada podría incluir un nuevo leguaje, un nuevo método o algunos enunciados novedosos, es posible que algunos razonamientos no sean tan rigurosos, pero pueden ser aceptados porque ayudan en la solución del problema. También se puede replicar el método propuesto hasta que sea lo suficientemente perfeccionado para ser aceptado por la comunidad científica, "cuando se logra hacer esto, partiendo de premisas bien establecidas, se llega, mediante un razonamiento que consiste en una sucesión de pasos elementales válidos, a la misma conclusión a la que se había llegado anteriormente mediante un razonamiento poco riguroso" (Miró Quesada 1987, p.126).

La historia está llena de ejemplos sobre cómo los matemáticos han resuelto diferentes problemas, y cómo han usado los resultados de sus predecesores, lo que hace parte de las transiciones interprácticas para su progreso (Kitcher 2001). Las matemáticas tienen una historia. Sus inicios son prácticos (egipcios y babilonios), y poco a poco se alejan de lo práctico. Ahora bien, las matemáticas del presente están influenciadas por las del pasado. Una cadena mostraría que Cauchy o Lagrange extendieron lo hecho por Newton y Leibniz, que se basaron en Descartes y Fermat y este en Pappus o Euclides. De ahí que para Kitcher (1984) "una cantidad muy limitada de nuestro conocimiento matemático puede obtenerse mediante observaciones y manipulaciones de cosas ordinarias. Sobre esta pequeña base, erigimos las poderosas teorías generales de las matemáticas modernas" (p.92).

Revisemos estas ideas tomando como ejemplo a Cauchy y su introducción del límite algebraico en las definiciones de convergencia, continuidad y derivación. Si, como afirman algunos, las proposiciones de Cauchy "estaban respaldadas por una visión especial a priori, entonces es apropiado preguntar por qué esta idea no estaba disponible para sus predecesores" (Kitcher 1988, p.298), los cuáles también habían considerado la idea de límite para definir el cálculo diferencial. Kitcher se maravilla de que los poderes visuales de Cauchy pudieran ser superiores a los de Leibniz, Newton, Euler, Lagrange, etc. Esta observación puede resultar exagerada y, en el fondo, deja a un lado la labor argumentativa de Cauchy, pues el matemático "no invita a sus colegas matemáticos a intuir la exactitud de sus nuevas afirmaciones. Él muestra, en cierta medida, cómo son útiles para continuar con la práctica de las matemáticas" (Kitcher 1988, p.298).

Esta secuencia que Kitcher llama transiciones interprácticas, que podría durar décadas, o tal vez, en menor escala en un salón de clase, minutos, este proceso de creación que surge de un problema (real) de la comunidad académica, que se apoya en un lenguaje o enunciado parcialmente conocidos y cuyos resultados volverán a la comunidad para ser validados por ellos con la formalización adecuada, es la idea que defendemos en este artículo sobre el proceso intuitivo. La intuición, no será la inspiración "divina" que llega a unos "elegidos", es el producto no sólo del esfuerzo individual, sino el de toda una comunidad académica que está inmersa en la solución de un problema de interés particular (tanto de un fenómeno físico o propio del mundo 3) y cuya solución, luego de ser aceptada científicamente, mostrará sus frutos en los mundos 1 y 2.

Un recorrido por la epistemología de las matemáticas necesariamente nos debe llevar a las inferencias que los matemáticos hacen durante su práctica. Dado que una situación es la forma en que inferimos, y otra lo que afirmamos conocer de lo que realmente hacemos (Kitcher 1984, p.97). Por tanto, Kitcher se propuso la siguiente tarea: "sistematizar las inferencias y las afirmaciones de conocimientos hechas y avanzadas por investigadores anteriores y contemporáneos en una variedad de campos" (Kitcher 1984, p.98). Como resultado de dicha tarea rechaza ciertos tipos populares de inferencias y, por ende, algunas afirmaciones sobre el conocimiento, entre ellas el apriorismo.

Si revisamos la historia de la ciencia, no es habitual encontrar a los matemáticos realizando experimentos para corroborar sus teoremas o conceptos, esta situación, ha llevado a muchos a considerar que el conocimiento matemático se obtiene de una fuente diferente a la experiencia sensorial, es decir, que el conocimiento matemático es a priori. En 1984, Philip Kitcher nos propone en su libro The nature of mathematical knowledge, una teoría sobre el conocimiento matemático, que se aparta del apriorismo y que más bien se centra en tratar de entender cómo obtienen su conocimiento no sólo los expertos sino las personas del común.

Para refutar la teoría apriorista del conocimiento, Kitcher planteará una propuesta alternativa. Una revisión de las diferentes etapas de la historia muestra que el conocimiento de los individuos es generado por el conocimiento de los maestros o los libros, quienes enseñan o "transmiten" los avances que hasta ese momento ha tenido la comunidad científica. "El conocimiento de la comunidad es en sí mismo el producto de una larga serie de episodios, que se remontan a las simples observaciones con las que comenzó el conocimiento matemático" (Kitcher 1984, p.92). A esto Kitcher lo llamará una teoría evolutiva del conocimiento matemático.

Ahora bien, esta teoría no escapa a las preguntas convencionales ¿cómo comienza el conocimiento matemático? O ¿cómo se extiende? Por el momento diremos que este tipo de teorías tienden a invertir el orden epistemológico, por ejemplo, los axiomas son concebidos como el resultado de inferencias justificadas previas, dejando de ser el principio básico que han considerado los aprioristas.

La teoría evolutiva propuesta por Kitcher, que acepta que las verdades matemáticas son necesarias, no comparte que el conocimiento sea a priori. ¿Por qué? Porque en su concepción de la epistemología de las matemáticas, este conocimiento es una construcción social, en la que las comunidades actuales y ancestrales toman un papel preponderante. Esta postura lo lleva a rechazar una visión platónica de las matemáticas "divergiendo también de las versiones anteriores de nominalismo y constructivismo". Su explicación del crecimiento del conocimiento matemático apunta a una nueva historiografía de las matemáticas. (Kitcher 1984, p.8).

Los aprioristas de diferentes corrientes fallan cuando abordan la pregunta "¿cómo se tiene acceso a priori a nuestras construcciones mentales?" o "¿cómo se tiene acceso a la realidad independiente de la mente?" (Kitcher 1984, p.47). Kitcher en su libro, examina diferentes estrategias aprioristas que han sido usadas por filósofos de la matemática "que explican los rasgos especiales del conocimiento matemático, y muestra en cada caso que no se dispone de una garantía a priori, ni para los conceptualistas, como Locke o Frege, los constructivistas como Kant o los realistas como Gödel" (Jesús Alcolea 2017, p.67)

El recorrido de Kitcher por el apriorismo, además de mostrar sus puntos débiles, le sirve para evidenciar que la intuición ha sido usada de manera "misteriosa" por las diferentes corrientes filosóficas que apoyan un enfoque epistemológico alejado de la práctica. Por ejemplo, el constructivismo presenta un enfoque epistemológico a partir de la intuición pura de Kant. Para el pensador de Königsberg, las figuras construidas en el pensamiento pueden ser inspeccionadas con lo que él llama "el ojo de la mente", es decir, la intuición. Luego de dicha inspección podemos llegar al conocimiento a priori de los axiomas: "es difícil entender cómo un proceso de mirar caricaturas mentales podría darnos conocimiento" (Kitcher 1984, p.50), más difícil aún, si nos concentramos en figuras particulares.

En este camino "misterioso" nos encontramos con Hilbert y los kantianos, para quienes aprender a captar las propiedades de esas entidades mentales es el modo fundamental del conocimiento, convirtiendo así a la matemática en una colección de verdades triviales cuya única preocupación son las propiedades de esas construcciones mentales. En este contexto la intuición pura es el proceso por medio del cual se inspeccionan las entidades y se leen sus propiedades. Sin embargo, esta explicación no es contundente sobre cómo la intuición pura de Kant genera conocimiento: "parece que fallaremos en explicar el conocimiento matemático o nos veremos impulsados a concluir que tal conocimiento es trivial" (Kitcher 1984, p.50).

Tanto en el realismo como en el platonismo, al coincidir en que los objetos abstractos de las matemáticas son independientes de la mente, han erigido a la intuición como la forma de acceder a estos objetos, sin embargo, lo que estas teorías esperan de la intuición no está acorde con los estándares básicos del apriorismo, dado que "los enunciados matemáticos son verdaderos o falsos en virtud de las características de la realidad matemática independiente de la mente" (Kitcher 1984, p.58). El punto de interés radica en que tienen una idea de la intuición meramente teórica, lo que presenta como dificultad, que sólo sabemos sobre los procesos de intuición lo que la teoría nos dice sobre ellos, por tanto, no será posible reconocer los procesos de intuición que se llevan a cabo.

Esta situación ha llevado a los realistas e incluso a la tradición filosófica a elogiar a los grandes matemáticos por sus intuiciones, han usado la intuición como la manera de acceder al conocimiento (Bunge 1996; 2002). Pero en realidad, y este es el punto fundamental en el que coincidimos con Kitcher, lo que realzan es la capacidad asombrosa de estos geniales matemáticos para resolver un problema: "la intuición de este tipo suele ser un preludio del conocimiento matemático. Por sí mismo no justifica la creencia, aunque puede desempeñar un papel heurístico importante y también servir como parte de un proceso de justificación" (Kitcher 1984, p.62). En nuestras palabras, la intuición es un proceso que le permite al matemático genial (e incluso a estudiantes sobresalientes) resolver problemas, la intuición no tiene sentido en el ámbito de las verdades autoevidentes o de los axiomas.

Así, el proceso de intuición se hace "evidente" en la resolución de problemas y no en el conocimiento de los axiomas. De lo anterior se deduce que el platónico debe ofrecer explicaciones no kantianas de cómo las intuiciones aparecen y se enganchan con el objeto de estudio de la matemática, una dificultad que puede aparecer es que en algunas oportunidades no se diferencia entre "pensar en algo y ser consciente de ello" (Chudnoff 2014, p.31).

Como el proceso intuitivo, tiene por "hábitat" la práctica matemática, encontramos una conclusión interesante: la intuición no proporciona un conocimiento irrefutable de las matemáticas. La historia nos ha mostrado varios episodios en los que los matemáticos han aclamado alguna cosa como evidente y al final ha resultado ser falsa. Por ejemplo, Frege, Dedekind o Cantor avanzaron en un principio de "comprensión universal" tomando alguna propiedad para determinar un conjunto. Así mismo Gauss, Cauchy y otros matemáticos del siglo XVIII, se extraviaron al creer en la auto-evidencia de la ley de continuidad, enunciando que lo que va hasta el límite, se sostiene en el límite, lo que resultó una falacia natural. En suma, la historia de la matemática muestra que "los tipos de disponibilidad de las intuiciones que el platónico afirma que realizamos son sospechosos" (Kitcher 1984, p.63).

Una concepción realista de la ciencia implica que los científicos descubren cosas de un mundo que es independiente de la cognición (mundo 2), a su vez que formulan enunciados verdaderos, usando conceptos, es decir, que recurran al lenguaje (mundo 3) para desarrollar esquemas aprendidos de las dependencias cognitivas: "no pensamos en el matemático como contemplando los objetos matemáticos y generando una idea fructífera. Las intuiciones de las que suelen hablar los matemáticos no son las que exige el platonismo" (Kitcher 1984, p.61). Es decir, que, aunque los axiomas nos parezcan "obvios" la creencia en ellos no es generada por un proceso del cual aprendamos directamente los objetos matemáticos.

Nosotros nos apartarnos de esa idea en la que la intuición es la forma de acceder al reino de las ideas platónicas (diferente a lo que hemos definido como mundo 3) o un método de conocimiento de los axiomas, para acercarnos a la intuición como "un tipo particular de proceso disponible para una persona con los tipos de facultades que las personas realmente tienen, no si tales procesos estarían disponibles para criaturas cuyas capacidades para adquirir conocimiento aumentan o disminuyen" (Kitcher 1984, pp.26–7).

Así, la intuición en el pensamiento de Kitcher podría interpretarse como el proceso que le permite a un matemático luego de haber recibido o estudiado los trabajos de sus predecesores, reestructurar sus imágenes propias y las del contexto de su época, para generar ideas novedosas que puedan cambiar las ya existentes con el lenguaje y la teoría apropiadas.

Algunos descubrimientos y avances en la matemática han sido el producto de conjeturas, las cuales se han producido por la asociación informal y no estructurada, en todos los casos, de métodos analíticos o cálculos deliberados. Entonces "cuando los matemáticos hablan de intuición, generalmente lo hacen en el contexto de discutir la resolución de problemas. Los grandes matemáticos creativos, como Euler, Riemann y Ramanujan, son a menudo elogiados por su capacidad de intuición" (Kitcher 1984, p.61).

Lo que se admira es la capacidad que tienen para reorganizar o configurar a partir de información previa (obtenida por la experiencia física o matemática) unas opciones nuevas de solución para abordar y resolver un problema. Es decir, lo que se evidencia en estos genios es una habilidad extraordinaria que permiten obtener una singular y fructífera Gestalt de un problema.

El talentoso matemático mira un rompecabezas recalcitrante desde un nuevo punto de vista, "intuyendo" que una maniobra particular ayudará con la suma de una serie o la evaluación de una integral, que un problema en la teoría de números se reduce a un resultado de la teoría de funciones. El secreto de su éxito no es una habilidad especial para discernir las características de la realidad matemática. (Kitcher 1984, p.61)

No es que los grandes matemáticos (o los estudiantes muy brillantes) tengan "poderes intuitivos", en realidad tienen una extraordinaria capacidad para resolver un problema. Esta habilidad extrema lleva a una sensación de evidencia, que algunos consideran como producto de la intuición. Para Kitcher esta interpretación no es acertada. En realidad, esta sensación de lo obvio es el "resultado del ejercicio de esas habilidades conceptuales que hemos adquirido [...] O tal vez se deriva del adoctrinamiento que recibimos en nuestra juventud matemática" (Kitcher 1984, p.61). Las intuiciones son introducidas por la epistemología y no existe razón para creer que un matemático brillante (incluido Gödel) tenga una facultad "especial" para tener intuiciones.

4. Conclusiones

El dilema de Benacerraf que se debate entre el qué (ontología) y el cómo (epistemología), entre la naturaleza de los objetos y el cómo se conocen esos objetos, ha dejado de lado el cuándo y el por qué, que se rescatan al centrar nuestra atención en la historia de las matemáticas. Sin embargo, el dilema propuesto, podemos disolverlo si contemplamos el problema desde otras perspectivas. Proponemos que, si el modo de conocer es la intuición, considerada como un proceso y los objetos de la matemática tienen una naturaleza diferente a la de los objetos de la percepción o a los estados de conciencia, el dilema puede ser resuelto. Nuestra hipótesis tiene como fundamento la idea que Kitcher (1984) tiene sobre la intuición y las definiciones sobre mundos 1, 2 y 3 que nos describen Popper y Eccles (1993). En general, entendemos que la intuición matemática no es un concepto epistemológico aislado, que sólo se puede aplicar a las matemáticas puras, "sino que debe estar tan estrechamente relacionado con los conceptos por los cuales describimos la percepción y nuestro conocimiento del mundo físico" (Hale y Wright 2002, p.106).

Aquella idea de que la intuición puede ser decisiva para el conocimiento matemático es la consecuencia del sentido histórico que el término ha adquirido según ciertas teorías epistemológicas, entre las que encontramos el rol de la introspección del estilo de la filosofía cartesiana o simples convicciones teológicas, las cuales buscan hacer moldes de "justificación inexpugnable" (Thompson 1998, p.282). La vida cotidiana no se basa en demostraciones, ni deducciones rigurosas, sino en la experiencia interpretada correctamente; y el conocimiento matemático, al igual que el conocimiento de la vida cotidiana, no es infalible, sino plausible e intuitivo: "estamos frente al conocimiento matemático que no es de un tipo diferente al del conocimiento humano ordinario" (Hersh 2011, p.39)

En este contexto encontramos a Kitcher, para quien el constructivismo y el realismo se equivocan al considerar que el conocimiento puede ser a priori. Y ambos usan la intuición a su manera para sustentar dicha afirmación. Para Kitcher, la intuición no hará el trabajo que el apriorismo exige de ella, dado que las creencias de los matemáticos no siempre están sustentadas en hechos matemáticos. Es decir, las creencias matemáticas son sensibles a los desafíos sociales. Más aún, no todo lo que el individuo cree es correcto, puesto que suele tener una buena cantidad de motivos para su creencia y, a veces, esos motivos no se corresponden con la lógica. Las creencias se extienden y modifican según la cantidad de observaciones y experimentos realizados.

La intuición no es aquella que permite el "acceso", a veces misterioso, al conocimiento matemático, ella es el proceso que requiere de la experiencia del sujeto (es decir, de sus creencias y manejo experto de teoremas, axiomas, definiciones, conceptos, etc.), de la aprobación de la comunidad académica y de sus resultados vistos en la resolución de problemas. Tal definición de la intuición está acorde con la historia de la práctica matemática.

Esta idea de intuición está más alejada de la idea tradicional platónica o realista y más cercana al naturalismo, donde no se asume como fuente del conocimiento a priori, sino como un proceso que tiene como fundamento la ciencia cognitiva contemporánea. Algunas de las tesis que nos permiten llegar a estas reflexiones son:

(1) La intuición es un proceso mental (ocurre en la conciencia). (2) Su función es generar un contenido para las creencias matemáticas. (3) Es un proceso de carácter individual. (4) La intuición se produce en la imaginación. (5) La intuición se produce en un contexto determinado. (6) Las intuiciones obtenidas por una persona que carezca del concepto implicado (concepto específico) no podrán ser las mismas de quien sí tenga el concepto. (7) La intuición se "presenta" en la conciencia como una "apariencia" lo que les da un carácter fenomenológico. Por tanto, no son objetivas, lo que las lleva a ser diferentes a las percepciones cotidianas. (Fedyk 2018)

Referencias

Alcolea, J. 2006. Ontological and epistemological problems of mathematics. In: W. J. González; J. Alcolea (eds.) *Contemporary Perspectives in Philosophy and Methodology of Science*, pp.233–57. Coruña: Netbiblo.

Alcolea, J. 2017. La epistemología y la metodología naturalistas de la matemática de Ph. Kitcher. *Factótum* **18**: 64–84.

Benacerraf, P. 1973. Mathematical Truth. *Journal of Philosophy* **70**(19): 661–79.

Benacerraf, P. 1993. Qué no podrían ser los números. *Mathesis* **9**: 317–43.

Benacerraf, P. 2004. La verdad matemática. *Ágora-Papeles de Filosofía* **23**: 233–53.

Boyer, C. 2007. *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza.

Bunge, M. 1996. *Intuición y razón*. Buenos Aires: Editorial Sudamericana.

Bunge, M. 2002. *La ciencia. Su método y su filosofía*. Fundación Promotora Colombiana.

Burgess, J. P. 2014. Intuitions of three kinds in Gödel's views on the continuum. In: J. Kennedy (ed.) *Interpreting Godel: Critical Essays*, pp.11–31. Cambridge: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9780511756306

Chudnoff, E. 2014. Intuition in Mathematics. In: L. M. Osbeck; B. S. Held (eds.) *Rational Intuition: Philosophical Roots, Scientific Investigations*, pp.174–91. Cambridge: Cambridge University Press. https://doi.org/10.1017/CBO9781139136419.010

Crowe, M. J. 1988. Ten Misconceptions about Mathematics and It's History. In: W. Aspray; P. Kitcher (eds.) *History and Philosophy of Modern Mathematics*, pp.260–77. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Daly, C.; Liggins, D. 2014. Nominalism, Trivialist platonism and Benacerraf's dilemma. *Analysis* **74**(2): 224–31. https://doi.org/10.1093/analys/anu038

de Lorenzo, J. 1992. *Kant y la matematica. El uso constructivo de la razón pura*. Madrid: Tecnos.

Edwards, C. 1979. *The Historical Development of the Calculus*. New York: Springer Verlag.

Fedyk, M. 2018. Intuitions, Naturalism, and Benacerraf's Problem. In: S. Bangu (ed.) *Naturalizing Logico-Mathematical Knowledge*, pp.89–105. New York: Routledge.

Folina, J. 2014. Gödel on how to have your mathematics and know it too. In: J. Kennedy (ed.) *Interpreting Gödel: Critical Essays*, pp.32–55. Cambridge: Cambridge University. https://doi.org/10.1017/CBO9780511756306

Gödel, K. 2006. *Obras Completas*. Ed. J. Mosterín. Madrid: Alianza.

Godlove, T. F. 2011. Hanna, Kantian non-Conceptualism, and Benacerraf's Dilemma. *International Journal of Philosophical Studies* **19**(3): 447–64. https://doi.org/10.1080/09672559.2011.595195

Hale, B.; Wright, C. 2002. Benacerraf's Dilemma Revisited. *European Journal of Philosophy* **10**(1): 101–29. https://doi.org/10.1111/1468-0378.00151

Hart, W. D. 1991. Benacerraf's Dilemma. *Crítica: Revista Hispanoamericana de Filosofía* **23**(68): 87–103.

Hersh, R. 2011. Mathematical Intuition (Poincaré, Polya, Dewey). *Montana Mathematics Enthusiast* **8**(1–2): 35–49.

Hossack, K. 1991. Access to Mathematical Objects. *Crítica: Revista Hispanotunericana de Filosofia* **23**(68): 157–81.

Kant, I. 1978. *Crítica de la Razón Pura*. Madrid: Alfaguara.

Kitcher, P. 1984. *The Nature of Mathematical Knowledge*. New York: Oxford University Press.

Kitcher, P. 1985. Mathematical Intuition. In: *The Nature of Mathematical Knowledge*, pp.49–64. New York: Oxford University Press. https://doi.org/10.1093/0195035410.003.0004

Kitcher, P. 1988. Mathematical Naturalism. In: W. Aspray; P. Kitcher (eds.) *History and Philosophy of Modern Mathematics*, pp.293–325. Minneapolis: University of Minnesota Press.

Kitcher, P. 2001. *El avance de la ciencia*. México: Universidad Nacional Autónoma de Mexico.

Kuhn, T. 1992. *La estructura de las revoluciones científicas*. México: Fondo de cultura económica.

Langer-Osuna, J. M. 2016. The Social Construction of Authority Among Peers and Its Implications for Collaborative Mathematics Problem Solving. *Mathematical Thinking and Learning* **18**(2): 107–24. https://doi.org/10.1080/10986065.2016.1148529

Maddy, P. 1980. Perception and Mathematical Intuition. *The Philosophical Review* **89**(2): 163–96.

Mancosu, P. 2016. Algunas observaciones sobre la filosofía de la práctica matemática. *Disputatio. Philosophical Research Bulletin* **5**(6): 131–56. http://hdl.handle.net/10366/131713

McEvoy, M. 2007. Kitcher, mathematical intuition, and experience. *Philosophia Mathematica* **15**(2): 227–37. https://doi.org/10.1093/philmat/nkm014

Miró Quesada, F. 1987. La naturaleza del conocimiento matemático. Crítica a un libro de Philip Kitcher. *Crítica (México D. F. En Línea)* **19**(57): 109–36. https://doi.org/10.22201/iifs.18704905e.1897.652

Moretti, A. 1991. La Objetividad de los números fregeanos. *Crítica: Revista Hispanotunericana de Filosofia Revista Hispanoamericana de Filosofía* **23**(68): 139–56.

Parsons, C. 1980. Mathematical Intuition. *Procedings of the Aristotelian Society* **80**: 145–68.

Parsons, C. 1995. Platonism and Mathematical Intuition in Kurt Gödel's Thought. *The Bulletin of Symbolic Logic* **1**(1): 44–74.

Peña-Páez, L. M. 2020. Consideraciones sobre la intuición matemática. *Agora-Papeles de Filosofía* **39**(2): 127–41. https://doi.org/https://doi.org/10.15304/ag.39.2.6299

Peña-Páez, L. M. 2021. Filosofía de la matemática: La intuición en el pensamiento de Kurt Gödel. *Filosofia Unisinos* **22**: 1–13. https://doi.org/10.4013/fsu.2021.222.06

Poincaré, H. 1910. Invención Matemática. In: *La ciencia y el método*, pp.42–62. Madrid: Biblioteca de filosofía científica.

Poincaré, H. 1964. La intuición y la lógica en las Matemáticas. In: *El valor de la ciencia*, pp.1–9. Available: http://casanchi.com/ref/logicaintuicion01.pdf

Poincaré, H. 2017. *Las ciencias y las humanidades*. Ed. F. González. Oviedo: Grafinsa.
Popper, K.; Eccles, J. 1993. *El yo y su cerebro*. Barcelona: Labor.
Restivo, S. 2017. The Social Construction of Mathematics. *Sociology, Science, and the End of Philosophy. How Society Shapes Brains, Gods, Maths, and Logics*, **7**(1), pp.253–81.
Rivera Novoa, A. 2007. El problema del realismo matemático. *Saga: Revista de Estudiantes de Filosofía* **8**(16): 66–77. http://bdigital.unal.edu.co/19126/1/15077-45589-1-PB.pdf
Sierpinska, A.; Lerman, S. 1996. Epistemologies of mathematics and of mathematics education. In: A. J. Bishop; K. Clements; C. Keitel; J. Kilpatrick; C. Laborde (eds.) *International Handbook of Mathematics Education*, pp.827–76. 4th ed. Dordrecht: Kluwer.
Thompson, P. 1998. The Nature and Role of Intuition in Mathematical Epistemology. *Philosophia* **26**(3–4): 279–319. https://doi.org/10.1007/BF02381494
Tieszen, R. 1989. *Mathematical intuition: phenomenology and mathematical knowledge*. Dordrecht: Kluwer.
Tieszen, R. 2002. Gödel and the intuition of concepts. *Synthese* **133**(3): 363–91. https://doi.org/10.1023/A:1021247624209