PRINCIPIA 27(1): 117–135 (2023) doi: 10.5007/1808-1711.2023.e85659
Published by NEL — Epistemology and Logic Research Group, Federal University of Santa Catarina (UFSC), Brazil.

UMA SEMÂNTICA INFORMACIONAL PARA A CONSEQUÊNCIA LÓGICA

AN INFORMATIONAL SEMANTICS FOR LOGICAL CONSEQUENCE

MARCOS ANTONIO ALVES
Universidade Estadual Paulista (UNESP) / CNPq, BRASIL
marcos.a.alves@unesp.br

Abstract. In semantic terms, the logical consequence is usually defined from the truth value of the premises and conclusion: this is true in every situation in which the former are true. It can be understood that, in these cases, the conclusion does not contain more information than the set of premises. Based on this idea, we develop, in this article, a definition of informational logical consequence, based on the notion of information suggested in the Mathematical Theory of Communication. We show some results, such as that, despite being inconsistent, the system underlying this notion is not trivial and that the logic underlying the informational logical consequence is not classical, but some kind of paraconsistent logic.

Keywords: logical consequence • information probability • informational logical consequence

RECEIVED: 31/01/2022 REVISED: 22/03/2022 ACCEPTED: 18/07/2022

Introdução

Conforme definição tradicional, em termos semânticos uma dada fórmula é consequência de um conjunto de fórmulas se, e somente se, ela for verdadeira em toda circunstância na qual todas as fórmulas do conjunto são verdadeiras. Na década de 1930, Alfred Tarski (1956) estabeleceu algumas propriedades básicas para uma relação ser considerada uma consequência lógica clássica. Dentre as suas propriedades principais, estão a reflexividade, monotonicidade e transitividade.

De alguma forma, na consequência lógica, a conclusão não apresenta mais informação do que as premissas. Partindo dessa ideia, desenvolvemos uma noção de consequência lógica informacional, baseados na Teoria Matemática da Comunicação, conforme Shannon e Weaver (1949). Eles constroem um sistema formal no qual definem a unidade de informação a partir de definições matemáticas como a de logaritmo e probabilidade. Para alcançar nossos propósitos, definimos, inicialmente, uma semântica para a linguagem da lógica proposicional clássica, que denominamos *semântica informacional*. Introduzimos uma série de elementos basilares para a definição de *consequência lógica informacional*. Mostramos alguns de seus resultados, ressaltando as suas especificidades quando comparada às consequências lógicas probabilística e veritativo-funcional.

1. A semântica informacional

Seguimos as definições e recursos metalinguísticos propostos por Shoenfield (1967). Em particular, a linguagem, L, possui os símbolos "$\neg$", "$\vee$", "(", ")", e A_1, A_2, A_3, ... denominadas *letras sentenciais* ou *variáveis sentenciais*. Uma *fórmula atômica* de L é uma letra sentencial isolada. Uma *fórmula* é um tipo de expressão caracterizada pela seguinte definição indutiva generalizada:

i: Toda fórmula atômica é fórmula.

ii: Se ϕ é uma fórmula, então $\neg\phi$ é fórmula.

iii: Se ϕ e ψ são fórmulas, então $(\phi \vee \psi)$ é fórmula.

iv: Nada além de i a iv é fórmula.

Dados esses elementos gerais, expomos abaixo alguns elementos de uma teoria axiomática de probabilidades, úteis para a construção da semântica informacional.

Fazemos uso da probabilidade nos casos em que dois ou mais resultados distintos podem ocorrer em uma dada ocasião. Isto faz cada resultado não previsível ou não determinado, no sentido de que não há como estabelecer previamente qual deles ocorrerá naquela situação. Contudo, sabemos claramente quais os únicos resultados possíveis

A *Teoria das Probabilidades*, doravante denotada por $\mathbb{P}$, estuda experimentos aleatórios. Utilizamos como base para $\mathbb{P}$ a teoria usual de conjuntos de Zermelo-Fraenkel, com o axioma da escolha, ZFC, na qual temos elementos da teoria usual dos números (Enderton 1977). Para a teoria $\mathbb{P}$, iniciamos com a linguagem e os desenvolvimentos teóricos de ZFC, acrescidos dos símbolos próprios do alfabeto de $\mathbb{P}$, as variáveis A_i, para $0 \leq i \leq n$ e $i \in \mathbb{N}$, em que "A" representa o conceito primitivo de $\mathbb{P}$, denominado *resultado* ou *acontecimento* de um experimento aleatório.

A seguir, expomos as principais definições referentes à probabilidade, a serem utilizadas neste artigo.

Definição 1.1.

(i) Um *experimento*, ou *fenômeno aleatório*, é aquele que, quando repetido diversas vezes, apresenta diferentes *resultados* ou *acontecimentos* em cada repetição. Denota-se um experimento aleatório por Σ e os resultados de Σ ou acontecimentos de Σ por A_Σ.

(ii) O *espaço amostral* de um experimento aleatório Σ é o conjunto de todos os possíveis resultados de Σ. Denota-se o espaço amostral de Σ por U_Σ.

(iii) O *número de elementos* do espaço amostral U_Σ é um número natural maior que zero, que indica a cardinalidade de U_Σ. Denota-se o número de elementos de U_Σ por $n(U_\Sigma)$.

(iv) Um espaço amostral U_Σ é *equiprovável* quando todos os seus elementos têm a mesma chance de ocorrer.

O lançamento de uma moeda, o lançamento de um dado ou a retirada de uma carta em um baralho configuram exemplos de experimentos aleatórios. Seus resultados poderiam ser, respectivamente, a queda da moeda voltada com a face cara ou coroa para cima, a queda do dado com um dos números de um a seis no lado voltado para cima, a retirada de cada uma das cartas do baralho.

Definição 1.2.

(i) Um *evento* de um experimento aleatório Σ é qualquer subconjunto do espaço amostral U_Σ. Denota-se o i-ésimo evento de Σ por $E_{i\Sigma}$. Obviamente, $E_\Sigma \subseteq U_\Sigma$.

(ii) O *número de elementos* de um evento E_Σ é a quantidade de elementos de U_Σ que pertencem a E_Σ. Denota-se o número de elementos do evento E_Σ por $n(E_\Sigma)$.

(iii) Um *evento elementar* E de Σ é aquele em que $n(E_\Sigma) = 1$.

(iv) O evento E de Σ é *certo*, se é tal que $n(E_\Sigma) = n(U_\Sigma)$.

(v) O evento E de Σ é *impossível*, se é tal que $n(E_\Sigma) = 0$. Um evento impossível é denotado por $\emptyset$.

(vi) Um evento E de Σ é *contingente*, se $0 < n(E_\Sigma) < n(U_\Sigma)$.

(vii) O evento de Σ *complementar* do evento E_Σ, denotado por $\overline{\Sigma}$, é definido por $\overline{\Sigma} = \{A \in U_\Sigma : A \notin E_\Sigma\}$.

(viii) O evento de Σ *união* de $E_{i\Sigma}$ e $E_{j\Sigma}$, denotado por $E_{i\Sigma} \cup E_{j\Sigma}$, é definido por

$$E_{i\Sigma} \cup E_{j\Sigma} = \{A \in U_\Sigma : A \in E_{i\Sigma} \textit{ ou } A \in E_{j\Sigma}\}.$$

(ix) O evento de Σ *interseção* de $E_{i\Sigma}$ e $E_{j\Sigma}$, denotado por $E_{i\Sigma} \cap E_{j\Sigma}$, é definido por

$$E_{i\Sigma} \cap E_{j\Sigma} = \{A \in U_\Sigma : A \in E_{i\Sigma} \textit{ e } A \in E_{j\Sigma}\}.$$

Eventos de Σ são conjuntos de acontecimentos de Σ. Desse modo, todo acontecimento de Σ também é um evento de Σ, mas não o inverso. Assim, cair um número par no jogo de dados é um evento, constituído por três acontecimentos possíveis e, por isso mesmo, não pode ser um acontecimento, conforme as definições acima.

O evento certo de um experimento aleatório sempre ocorre, uma vez que reúne todas as possiblidades de acontecimentos. Já o evento impossível, por ser composto de zero acontecimentos, como seria o caso de cair o número sete no jogo normal de um dado, jamais pode ocorrer naquele experimento, sendo considerado, ainda assim, pelas definições acima, um evento dele.

Os elementos constituintes de um experimento aleatório devem ser previamente definidos, de maneira precisa. Ademais, todo espaço amostral considerado, além de finito, é equiprovável e os valores probabilidade dos eventos são dados e fixos.

Doravante, quando não gerar ambiguidade, eliminaremos as referências a Σ. Em vez de A_Σ, U_Σ ou $n(U_\Sigma)$, escreveremos apenas A, U ou $n(U)$, respectivamente.

Exemplo 1.3.

Σ_i	U_{Σ_i}	E_{Σ_i}	$n(E_{\Sigma_i})$
Σ_1 (Lance de moeda)	$\{C, K\}$ C: Cara; K: Coroa	$E_{1\Sigma_1}: \{C\}$ (Sair cara) $E_{2\Sigma_1}: \{K\}$ (Sair coroa)	1 1
Σ_2 (Lance de moeda viciada)	$\{C_1, C_2, C_3, K\}$	$E_{1\Sigma_2}: \{C_1, C_2, C_3\}$ (Sair cara) $E_{2\Sigma_2}: \{K\}$ (Sair coroa)	3 1
Σ_3 (Lance de dado)	$\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$	$E_{1\Sigma_3}: \{2, 4, 6\}$ (Sair par) $E_{2\Sigma_3}: \emptyset$ (Sair cara)	3 0

No quadro acima sugerimos um "modelo" para cada experimento aleatório, associando-os a entidades de um "mundo". Eles são nomeados na primeira coluna, seguidos do seu espaço amostral, alguns de seus eventos e seu número.

Definição 1.4. A *probabilidade de ocorrência* de um evento E no experimento aleatório Σ com um espaço amostral equiprovável U_Σ é o valor numérico definido por:

$$p(E_\Sigma) = \frac{n(E_\Sigma)}{n(U_\Sigma)}$$

A *função probabilidade p* leva eventos de um experimento aleatório Σ em valores racionais entre 0 e 1, ou seja, p é uma função $p : E_\Sigma \to [0, 1] \subseteq \mathbb{Q}$.

Exemplo 1.5. Valor probabilidade dos eventos do Exemplo 1.3

E	$E_{1\Sigma_1}$	$E_{2\Sigma_1}$	$E_{1\Sigma_2}$	$E_{2\Sigma_2}$	$E_{1\Sigma_3}$	$E_{2\Sigma_3}$	$E_{1\Sigma_3} \cup E_{2\Sigma_3}$	$E_{1\Sigma_2} \cap E_{2\Sigma_2}$	$\overline{E}_{1\Sigma_2}$
$p(E)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$

Constituídos os elementos básicos da linguagem de $\mathbb{P}$, a seguir estabelecemos os seus axiomas e alguns de seus resultados elementares.

Os axiomas para $\mathbb{P}$ são os seguintes:

$Ax\mathbb{P}_1 : 0 \leq p(E)$, para todo $E \subseteq U$.
$Ax\mathbb{P}_2 : p(E_i \cup E_j) = p(E_i) + p(E_j) - p(E_i \cap E_j)$.
$Ax\mathbb{P}_3 : p(E \cup \overline{E}) = 1$.

Teorema 1.6.

a: $p(E) \leq 1$, *para todo* $E \subseteq U$.

b: $p(U) = 1$.

c: $p(\emptyset) = 0$.

d: *Se* $n(E_i \cap E_j) = 0$, *então* $p(E_i \cup E_j) = p(E_i) + p(E_j)$.

e: $p(E \cap \overline{E}) = 0$.

f: $p(\overline{E}) = 1 - p(E)$.

g: $\sum_{i=1}^{m} = 1$, *para* $E_i = \{A_i\}$, *para* $1 \leq i \leq m$, *com* $U = \{A_1, \ldots, A_m\}$.

Demonstração. Ver Alves (2012). ■

Algumas vezes a ocorrência de um acontecimento ou de um evento pode depender ou ser alterada pela ocorrência de outro acontecimento ou evento. A próxima definição permite calcular a probabilidade de ocorrência num experimento aleatório Σ de um evento E_i, uma vez ocorrido o evento E_j.

Definição 1.7. A probabilidade condicional do evento $E_{i\Sigma}$, dado o evento $E_{j\Sigma}$, é denotada por $p(E_{i\Sigma}|E_{j\Sigma})$ e dada por:

$$p(E_{i\Sigma}|E_{j\Sigma}) = \frac{p(E_{i\Sigma} \cap E_{j\Sigma})}{p(E_{j\Sigma})}$$

Decorre imediatamente da definição acima que $p(E_i \cap E_j) = p(E_i|E_j) \times p(E_j)$.

Baseados em $\mathbb{P}$, a seguir desenvolvemos uma semântica probabilística para a Lógica Proposicional Clássica (LPC), sempre tal como proposta por Shoenfield (1967), preparando as bases para a definição de consequência lógica informacional.

2. Uma semântica probabilística para a linguagem L

Chamamos esta perspectiva semântica de semântica probabilística para L, a qual será denotada por $S_{\mathbb{P}}$. Conforme mostrado por Alves (2012), o comportamento de $S_{\mathbb{P}}$ não é estritamente equivalente ao comportamento da semântica veritativo-funcional clássica, a qual denotamos por S_V, como apresentada, dentre outros, por Tarski (1956), Mendelson (1964), Shoenfield (1967) e Mates (1968).

Inicialmente, associamos às fórmulas de L eventos de um experimento aleatório E de Σ. Em seguida, calculamos o valor probabilidade de cada evento E em Σ, a partir do qual definiremos o valor probabilidade e, posteriormente, o valor informacional das fórmulas de L em $S_{\mathbb{P}}$. A seguir, definimos algumas noções fundamentais e enunciamos alguns resultados característicos de $S_{\mathbb{P}}$.

A expressão “Form(L)” denota o conjunto de fórmulas de L; a expressão “Var(L)” denota o conjunto das variáveis proposicionais ou fórmulas atômicas de L; as letras gregas minúsculas “ϕ”, “ψ” e “σ” são meta variáveis para elementos de Form(L); “Γ” representa qualquer subconjunto finito de Form(L). Assumimos como conectivos lógicos primitivos de L a negação, $\neg$, e a disjunção, $\vee$. A expressão “$\mathscr{P}(U_\Sigma)$” denota o conjunto das partes de U_Σ.

Definição 2.1. Uma função $f_\Sigma : Var(L) \rightarrow \mathscr{P}(U_\Sigma)$ é uma Σ-situação para L, ou simplesmente uma situação de L.

A função f_Σ estende-se univocamente para o conjunto das fórmulas de L, $f_\Sigma : Form(L) \rightarrow \mathscr{P}(U_\Sigma)$, da seguinte maneira:

(i) se ϕ é atômica, então $f_\Sigma(\phi) = E_\Sigma$, o evento estabelecido arbitrariamente pela Σ-situação.

(ii) se ϕ é da forma $\neg\psi$, então $f_\Sigma(\phi) = \overline{f_\Sigma(\psi)}$;

(iii) se ϕ é da forma $\psi \vee \gamma$, então $f_\Sigma(\phi) = f_\Sigma(\psi) \cup f_\Sigma(\gamma)$.

Quando f_Σ é uma Σ-situação para L, dizemos também que o experimento aleatório Σ é uma f*—estrutura* para L. Uma situação para L consiste na atribuição de um único evento de um dado experimento aleatório para cada fórmula de L, de acordo com uma função f_Σ. Em outras palavras, cada fórmula de L é associada a um único evento em uma dada situação f_Σ. Contudo, fórmulas distintas podem e, em geral, elas são associadas a um mesmo evento em f_Σ, posto que o conjunto de fórmulas de L é infinito, enquanto assumimos que o número de eventos de um experimento aleatório qualquer é sempre finito.

Definição 2.2.

a. A função probabilidade de uma fórmula ϕ, segundo f_Σ, denotada por $P_\Sigma(\phi)$, é dada pela probabilidade do evento E no espaço amostral Σ associado a ϕ por f_Σ, conforme a definição da função probabilidade p em $\mathbb{P}$:
   (i) se ϕ é atômica, então $P_\Sigma(\phi) = p(E_\Sigma)$, tal que E_Σ é $f_\Sigma(\phi)$;
   (ii) se ϕ é da forma $\neg\psi$, $P_\Sigma(\phi) = p(\overline{f_\Sigma(\psi)})$;
   (iii) se ϕ é da forma $\psi \vee \gamma$, $P_\Sigma(\phi) = p(f_\Sigma(\psi) \cup f_\Sigma(\gamma))$.

b. Seja $\Gamma = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subseteq Form(L)$. Então o valor probabilidade de Γ segundo f_Σ, denotado por “$Pf_\Sigma(\Gamma)$”, é definido pela seguinte equação: $Pf_\Sigma(\Gamma) = Pf_\Sigma(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n)$.

c. Uma fórmula ϕ é consequência lógica probabilística de um conjunto Γ de fórmulas, denotado por “$\Gamma \models_{\mathbb{P}} \phi$”, se, e somente se, para toda situação f_Σ, $Pf_\Sigma(\Gamma) \leq Pf_\Sigma(\phi)$.

Conforme a Definição 2.2, temos que $P_\Sigma : Form(L) \rightarrow [0,1] \subseteq \mathbb{Q}$. Assim, o valor de probabilidade da fórmula ϕ, segundo f_Σ, é dado por $p(f_\Sigma(\phi))$, um número racional entre 0 e 1. Ele é o valor probabilidade do evento E de Σ correspondente a ϕ, segundo f_Σ. A função P_Σ satisfaz as propriedades enunciadas no Teorema 1.6, interpretadas à luz de $S_{\mathbb{P}}$. Em termos técnicos, "P" é o valor atribuído a fórmulas de L segundo uma situação. Já "p" é o valor de eventos de um experimento aleatório, associados a fórmulas pela situação. Um é definido a partir de outro.

Doravante, quando dissermos "Para toda f" queremos dizer "Para toda situação f_Σ, dado Σ". Também escreveremos, quando não gerar ambiguidade ou imprecisão, "$P(\phi)$" como abreviação para "$Pf_\Sigma(\phi)$", "$p(\phi)$" como abreviação para "$p(f_\Sigma(\phi))$", "$f(\phi)$" como abreviação para "$f_\Sigma(\phi)$" e "f" como abreviação para "f_Σ".

Observação 2.3. De acordo com as definições usuais em L, temos que:

a: $f(\phi \wedge \psi) = f(\neg(\neg\phi \vee \neg\psi))$. c: $P(\phi \wedge \psi) = P(\neg(\neg\phi \vee \neg\psi))$.

b: $f(\phi \rightarrow \psi) = f(\neg\phi \vee \psi)$. d: $P(\phi \rightarrow \psi) = P(\neg\phi \vee \psi)$.

Exemplo 2.4. Consideremos os experimentos aleatórios Σ_1 e Σ_2, de modo que $U(\Sigma_1) = \{1,2,3,4,5,6\}$ e $U(\Sigma_2) = \{C,K\}$, em que, para cada A_i, $A_i \in VAR(L)$. Então teremos os seguintes valores, a partir das situações sugeridas para Σ_1 e Σ_2:

ϕ	$f_{\Sigma_1}(\phi)$	$P_{\Sigma_1}(\phi)$	$f_{\Sigma_2}(\phi)$	$P_{\Sigma_2}(\phi)$
A_1	$\{2,4,6\}$	$\frac{1}{2}$	$\{C\}$	$\frac{1}{2}$
A_2	$\{1,3,5\}$	$\frac{1}{2}$	$\{K\}$	$\frac{1}{2}$
A_3	$\{1,2,3,5\}$	$\frac{2}{3}$	$\emptyset$	0
A_4	$\{1\}$	$\frac{1}{6}$	$\emptyset$	0
A_5	$\emptyset$	0	$\emptyset$	0
$A_1 \rightarrow A_2$	$\{1,3,5\}$	$\frac{1}{2}$	$\{K\}$	$\frac{1}{2}$
$A_1 \rightarrow A_3$	$\{1,2,3,5\}$	$\frac{2}{3}$	$\{K\}$	$\frac{1}{2}$
$A_2 \rightarrow A_3$	U	1	$\{C\}$	$\frac{1}{2}$
$A_5 \rightarrow A_4$	U	1	$\emptyset$	0

Os experimentos aleatórios deste exemplo são o jogo de dado e o lance de moeda não viciados. Nas cinco primeiras linhas, seguindo a Definição 2.1, associamos, arbitrariamente, eventos (segunda e quarta colunas), ou seja, conjuntos de acontecimentos, a fórmulas atômicas de L (primeira coluna) e definimos os valores probabilidade das fórmulas (terceira e quinta colunas). Seguindo a mesma definição e a

Observação 2.3, o evento associado a $A_1 \to A_2$ em Σ_1, por exemplo, é a união do complemento de A_1 com A_2, composta pela metade dos acontecimentos possíveis do experimento, o que confere o valor probabilidade $\frac{1}{2}$ à fórmula

Teorema 2.5. *Para toda f, tem-se que:*

a: $P(\neg\phi) = 1 - P(\phi)$.
b: $P(\phi \to \psi) = p(\overline{f(\phi)} \cup f(\psi))$.
c: $P(\phi \to \psi) = p(\overline{f(\phi)}) + p(f(\phi)) \times p(f(\psi)|f(\phi))$.
d: $P_\Sigma(\phi \to \psi) = 1$ *se, e somente se,* $f_\Sigma(\phi) \subseteq f_\Sigma(\psi)$.
e: Se $P(\phi \to \psi) = 1$, *então* $P(\phi) \leq P(\psi)$.

Demonstração. Seja f uma situação para L.
a : Pela Definição 2.2ii, temos que $P(\neg\phi) = p(\overline{f(\phi)})$. Pelo Teorema 1.6f, $p(\overline{f(\phi)}) = 1 - p(f(\phi))$. Pela Definição 2.2, temos que $1 - p(f(\phi)) = 1 - P(\phi)$.
b : Pela Observação 2.3d, $P(\phi \to \psi) = P(\neg\phi \vee \psi)$, que, pela Definição 2.2, é igual a $p(\overline{f(\phi)}) \cup f(\psi))$.
c : Pela Observação 2.3d, temos que $P(\phi \to \psi) = P(\neg\phi \vee \psi)$, que, pela Definição 2.2, é igual a $p(\overline{f(\phi)}) \cup f(\psi))$.. Pode-se mostrar, a partir da teoria de conjuntos assumida neste trabalho, que $p(\overline{f(\phi)}) \cup f(\psi)) = p(\overline{f(\phi) \cap \overline{f(\psi)}})$, que, pelo Teorema 1.6f, é igual a $1 - p(f(\phi) \cap \overline{f(\psi)})$. Daí, pode-se mostrar, a partir da teoria de conjuntos que, $1 - p(f(\phi) \cap \overline{f(\psi)}) = 1 - (p(f(\phi) \times p(\overline{f(\psi)})|f(\phi))) = 1 - (p(f(\phi)) \times 1 - p(f(\psi)|f(\phi))) = 1 - (p(f(\phi)) - p(f(\phi)) \times p(f(\psi)|f(\phi))) = 1 - p(f(\phi)) + p(f(\phi)) \times p(f(\psi)|f(\phi)) = p(\overline{f(\phi)}) + p(f(\phi)) \times p(f(\psi)|f(\phi))$.
d : Seja $P(\phi \to \psi) = 1$. Pela Observação 2.3 e Definição 2.2, temos que $P(\phi \to \psi) = p(\overline{f(\phi)}) \cup f(\psi)) = 1$. Assim, em decorrência da Definição 1.2iv. $p(\overline{f(\phi)}) \cup f(\psi)) = U$. Seja A um acontecimento de Σ tal que $A \in f(\phi)$ e $A \notin f(\psi)$. Desse modo, $A \notin \overline{f(\phi)}$. Assim, $A \notin (\overline{f(\phi)} \cup f(\psi))$, ou seja, $\overline{f(\phi)} \cup f(\psi)) \neq U$ contrariando o dito acima. Logo, $f(\phi) \subseteq f(\psi)$.
e : Seja $P(\phi \to \psi) = 1$. Daí, pelo Teorema 2.5c, temos que $f(\phi) \subseteq f(\psi)$. Então, pelas propriedades básicas da teoria de conjuntos, temos que $n(f(\phi)) \leq n(f(\psi))$, o que implica que $p(f(\phi)) \leq p(f(\psi))$. Consequentemente, $P(\phi) \leq P(\psi)$. ■

Definição 2.6. (Quantidade de informação em um conjunto de fórmulas) Seja $\Gamma = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\} \subseteq Form(L)$. O *valor informacional de* Γ (quantidade de informação em Γ), segundo f_Σ, denotado por "$If_\Sigma(\Gamma)$", é definido por:

$$If_\Sigma(\Gamma) =_{Df} -\log_2 Pf_\Sigma(\phi_1 \wedge \ldots \phi_n).$$

Assim, temos que $If_\Sigma(\Gamma) : \mathscr{P}(Form(L)) \to \mathbb{Q}_+$. Quando não gerar ambiguidade ou imprecisão, escreveremos $I(\Gamma)$ em vez de $If_\Sigma(\Gamma)$. Se $\Gamma = \emptyset$, então $I(\Gamma) = 0$. Quando

$P(\Gamma) = 0$, definimos que $-\log_2 0 = 0$, ou seja, $I(\Gamma) = 0$. Quando $\Gamma = \{\phi\}$, dizemos que $I(\Gamma)$ é o mesmo que $= I(\phi)$, ou seja, o valor informacional de uma fórmula. Dizemos que duas fórmulas, ϕ e ψ são equivalentes, denotado por "$\phi \equiv \psi$", se, e somente se, para toda situação $f_\Sigma, If_\Sigma(\phi) = If_\Sigma(\psi)$.

Definição 2.7 (Consequência lógica informacional)**.** Uma fórmula ϕ é consequência lógica informacional de um conjunto Γ de sentenças, o que é denotado por "$\Gamma \Vvdash \phi$", se, e somente se, para toda $f_\Sigma, If_\Sigma(\Gamma) \geq If_\Sigma(\phi)$.

Quando $\Gamma = \emptyset$, em vez de "$\Gamma \Vvdash \phi$" escreveremos simplesmente "$\Vvdash \phi$". "$\Gamma \not\Vvdash \phi$" denota que ϕ não é consequência lógica informacional de Γ. As fórmulas de Γ são chamadas *premissas* e ϕ é denominada *conclusão*.

De acordo com a definição acima, uma fórmula é consequência lógica informacional de um dado conjunto de fórmulas se, e somente se, a quantidade de informação presente na conclusão jamais pode ser maior do que a quantidade de informação das premissas. Na consequência lógica probabilística a relação é inversa.

Teorema 2.8.

a: $\phi \rightarrow \psi \Vvdash \neg\phi \vee \psi$.
b: $\phi \vee \psi \Vvdash \neg(\neg\phi \wedge \neg\psi)$.
c: $\phi \wedge \psi \Vvdash \neg(\neg\phi \vee \neg\psi)$.
d: $\phi \wedge \psi \Vvdash \psi \wedge \phi$.
e: $\phi \vee \psi \Vvdash \psi \vee \phi$.
f: $\neg\neg\phi \Vvdash \phi$.
g: $\phi \wedge \phi \Vvdash \phi$.
h: $\phi \vee \phi \Vvdash \phi$.
i: $\top_{\mathbb{P}} \wedge \phi \Vvdash \phi$.
j: $\top_{\mathbb{P}} \vee \phi \Vvdash \top_{\mathbb{P}}$.
k: $\bot_{\mathbb{P}} \wedge \phi \Vvdash \bot_{\mathbb{P}}$.
l: $\bot_{\mathbb{P}} \wedge \phi \Vvdash \phi$.
m: $\top_{\mathbb{P}} \Vvdash \bot_{\mathbb{P}}$.
n: $\phi \Vvdash \phi$.

Demonstração. Ver Alves (2012). ■

Como a quantidade de informação na premissa e na conclusão de cada um dos itens do teorema acima é a mesma para toda situação dada, tem-se que a recíproca de cada um dos itens também vale, ou seja, uma fórmula é consequência lógica informacional da outra, sendo equivalentes.

Os três primeiros itens acima provam que as definições de um conectivo a partir de outros também se aplicam na consequência lógica informacional. O primeiro item expressa que a noção de implicação aqui satisfeita é a da implicação material. O quarto item afirma que a Lógica subjacente à consequência lógica informacional não é uma lógica temporal e do sexto resulta que ela não é uma lógica intuicionista. O penúltimo resultado mostra algo próprio desta perspectiva, que a distingue da veritativo-funcional: qualquer contradição probabilística, ou fórmula cujo valor probabilidade é zero, para toda situação, é consequência de uma fórmula válida, aquelas cujo valor probabilidade é sempre a unidade. Ou seja, esta perspectiva não distingue, informacionalmente, uma da outra, resultado oriundo principalmente da Definição 2.6.

Teorema 2.9.

a: $\Vdash \phi$ *se, e somente se,* $I(\phi) = 0$*, para toda* f.

b: $\Vdash \phi$ *se, e somente se,* $\Gamma \Vdash \phi$*, para todo* Γ.

c: Se $I(\Gamma) = 0$*, para toda* f*, e* $\Gamma \Vdash \phi$*, então* $\Vdash \phi$.

d: Se $\Vdash_{\mathbb{P}} \phi$*, então* $\Vdash \phi$.

Demonstração. Ver Alves (2012). ■

Dos três primeiros itens desse teorema obtemos que as fórmulas informativas são aquelas que são consequência lógica de um conjunto de fórmulas que também é informativo, ou seja, Se $\Gamma \Vdash \phi$ e $I(\phi) \neq 0$, para alguma f, então $I(\Gamma) \neq 0$, para alguma f. Isso implica que a satisfação da conclusão é garantida a partir da satisfação de um conjunto informativo de premissas. Ela não se garante por si só. Como o conjunto de premissas está associado a evento que não é certo ou impossível, quando ele não ocorrer, ou seja, quando as premissas não forem todas satisfeitas, o evento associado à conclusão também não ocorre. Mas, quando o conjunto de premissas for satisfeito, também o será a conclusão.

O quarto item do Teorema explicita que as consequências lógicas probabilísticas do vazio também são consequências lógicas informacionais do vazio. A recíproca, no entanto, não pode ser mostrada. O seguinte exemplo serve para mostrar essa invalidade: $\Vdash \bot_{\mathbb{P}}$, mas $\nVdash_{\mathbb{P}} \bot_{\mathbb{P}}$. Esse resultado é muito expressivo. Ele mostra que a consequência lógica informacional não é equivalente à consequência lógica probabilística e, consequentemente, à consequência lógica veritativo-funcional. Tal item, no entanto, não pode ser mostrado quando os conjuntos de hipóteses são informativos. Ou seja, o resultado não vale para o caso geral: se $\Gamma \Vdash_{\mathbb{P}} \phi$, então não pode ser provado que $\Gamma \Vdash \phi$.

Alves (2012) mostra que os pares de fórmulas da proposição abaixo satisfazem a relação de consequência lógica probabilística. Elas, no entanto, não satisfazem a relação de consequência lógica informacional.

Proposição 2.10.

a: $\phi \wedge \psi \not\models \phi$.
b: $\phi \to \psi, \phi \not\models \psi$.
c: $\phi \to \psi, \neg\psi \not\models \neg\phi$.
d: $\phi \to \psi, \psi \to \gamma \not\models \phi \to \gamma$.
e: $\phi \not\models \psi \to \phi$.
f: $\psi \not\models \phi \vee \psi$.
g: $\gamma \vee \phi, \neg\gamma \vee \psi \not\models \phi \vee \psi$.

Demonstração. Ver Alves (2012). ■

Esta proposição expressa que as regras de inferência de grande parte dos sistemas formais lógicos não são válidas em termos informacionais. O segundo item é a regra de *Modus Ponens*, assumida em sistemas como o de Mendelson (1967); os dois últimos itens são a regra da expansão e a regra do corte, assumidas por Shoenfield (1969). O mesmo pode ser dito quando tratamos os itens acima como argumentos. Argumentos tradicionalmente considerados válidos podem apresentar mais informação na conclusão do que no conjunto de premissas, ou seja, segundo a perspectiva em questão, são ampliativos informacionalmente. Embora não tratemos diretamente deste assunto neste artigo, nem temos a pretensão de sugerir qualquer avanço na questão, o ponto está relacionada ao conhecido escândalo da dedução, tal como abordado por pensadores como Hintikka (1970) e D'Agostino e Floridi (2009), por exemplo. Em resumo, o escândalo consiste no fato de que as validades lógicas não ampliam conhecimento. Não podemos acessar qualquer informação nova na conclusão de um argumento tradicionalmente válido que já não estejam nas premissas, apesar da confiabilidade da verdade da conclusão a partir da verdade das premissas. No caso em questão, justamente por serem ampliativos informacionalmente, tais argumentos deixam de ser válidos.

A invalidade destas regras de inferência, ou destes argumentos, deve-se, geralmente, à possibilidade do conjunto de premissas ser informacionalmente vazio em uma dada situação. No caso da regra da expansão, quando, em uma dada situação Σ, $P(\psi) = 0$ e $I(\phi) \neq 0$, tem-se que $I(\psi) < I(\phi \vee \psi)$. Logo, $\psi \not\models \phi \vee \psi$. Enquanto a premissa é vazia informacionalmente, a conclusão elimina possibilidades. A sentença "caiu o número sete" no jogo de dado, por exemplo, cuja probabilidade de ocorrência é zero, não elimina possibilidades sobre o ocorrido no jogo de dado, sendo informacionalmente vazia. No entanto, a sentença "caiu número par ou caiu número sete" possui quantidade de informação maior do que zero, dada a sua possibilidade de ocorrência que, neste caso, também é menor do que a unidade. Seguindo tal sentença, pode ter caído número dois, quatro ou seis, eliminando a possibilidade de ter caído número ímpar. Assim, há, na conclusão, algo inexistente na premissa. Houve um ganho informacional, dado que a quantidade de informação na premissa é nula.

No caso de *Modus Ponens*, a situação f_{Σ_1} do Exemplo 2.4 acima configura um exemplo em que o valor informacional das premissas, interpretadas como "Se cai par então cai ímpar" e "cai par", é menor do que o valor informacional da conclusão, interpretada como "cai ímpar". Aqui o valor informacional das premissas é nulo. Como os eventos "cai ímpar" e "cai par" são mutuamente exclusivos, tem-se que a sentença "Se cai par então cai ímpar" é equivalente a "Cai ímpar ou cai ímpar", que é equivalente a "Cai ímpar". Assim, a probabilidade do conjunto de premissas é definida a partir da conjunção de "Cai ímpar" e "Cai par", equivalente a "Cai ímpar e não cai ímpar" cuja probabilidade é zero. No entanto, a conclusão possui quantidade de informação maior do que zero, ou seja, possui valor informacional maior do que o valor do conjunto de premissas.

A seguir mostramos outros resultados referentes à consequência lógica informacional. Por questão de espaço, alguns passos das demonstrações dos Teoremas seguintes foram omitidos. Tais passos são indicados por "TEO" e se referem a teoremas cuja demonstração pode ser encontrada em Alves (2012).

Teorema 2.11. *Seja* $\Gamma = \{\phi_1, \ldots, \phi_n\}$. *Então:*

- *a:* $\Vdash \phi$ *se, e somente se,* $I(\phi) = 0$*, para toda* f*, ou* $(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \equiv \phi$.
- *b: Se* $I(\phi) > 0$*, para alguma* f*, então* $\bot_{\mathbb{P}} \nVdash \phi$.
- *c:* $\Gamma \Vdash \top_{\mathbb{P}}$.
- *d:* $\Gamma \Vdash \bot_{\mathbb{P}}$.
- *e: Se* $I(\phi) > 0$*, para alguma* f*, então* $\top_{\mathbb{P}} \nVdash \phi$.

Demonstração.
a : ($\Rightarrow$): seja $\Gamma \Vdash \phi$. Suponha que $I(\phi) \neq 0$, para alguma f, e $(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \not\equiv \phi$. Então, pode-se mostrar a existência de f' tal que $I(f')(\Gamma) < I(f')(\phi)$, contrariando a hipótese inicial: $I(f')(\Gamma) = 0$ e $I(f')(\phi) = I(f)(\phi)$. Assim, quando $\Gamma \Vdash \phi$ tem-se que: Se $I(\phi) \neq 0$, para alguma f, então $(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \equiv \phi$, ou seja: $I(\phi) = 0$, para toda f, ou $(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \equiv \phi$.

($\Leftarrow$): Caso 1: Se $I(\phi) = 0$, para toda f, então $I(\Gamma) \geq I(\phi)$, para toda f e todo Γ. Daí, pela Definição 2.7, $\Gamma \Vdash \phi$. Caso 2: Pela Definição 2.6, temos que $(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) \equiv \phi$ se, e somente se, $P(\phi_1 \wedge \ldots \wedge \phi_n) = P(\phi)$, para toda f. Assim, pela Definição 2.7,

$P(\Gamma) = P(\phi)$, para toda f. Por TEO, temos que $I(\Gamma) = I(\phi)$, para toda f. Assim, pela Definição 2.7, $\Gamma \Vvdash \phi$.

b : Seja $P(\phi) = \frac{1}{2}$. Então $I(\perp\mathbb{P}) = 0 < I(\phi) = 1$.

c : Como $I(\top_{\mathbb{P}}) = 0$, tem-se que $I(\Gamma) \geq I(\top_{\mathbb{P}})$.

d : Como $I(\perp_{\mathbb{P}}) = 0$, tem-se que $I(\Gamma) \geq I(\perp_{\mathbb{P}})$.

e : Seja $P(\phi) = \frac{1}{2}$. Então $I(\top_{\mathbb{P}}) = 0 < I(\phi) = 1$. ■

O primeiro item acima explicita quais são os argumentos válidos segundo a perspectiva informacional da consequência lógica. O segundo item explicita que de uma fórmula probabilisticamente contraditória não se segue informacionalmente qualquer fórmula informativa. Apenas as fórmulas probabilisticamente válidas ou inválidas, ou seja, não informativas, são consequência lógica informacional de fórmulas contraditórias.

Pressupondo a distinção entre sistemas clássicos e não-clássicos, como sugerida por Da Costa (1993; 1997), ou por Haack (2002), do segundo item do teorema acima concluímos ainda que a *Lógica Clássica não é a Lógica subjacente à consequência lógica informacional*. Isso porque, nos sistemas formais lógicos clássicos, uma contradição gera qualquer fórmula. Considerando que as Lógicas Complementares, como a Lógica Modal, preservam os mesmos princípios da Lógica Clássica, também concluímos que *nenhuma Lógica Complementar é subjacente à consequência lógica informacional*. Restam, como candidatas, Lógicas Heterodoxas do tipo Intuicionistas ou as Paraconsistentes, conforme expostas por D'Ottaviano (1992).

Nas Lógicas Intuicionistas a negação possui algumas características próprias. Tais particularidades não permitem, por exemplo, o recurso às provas por Redução ao Absurdo, dado que fórmulas como $\phi \leftrightarrow \neg\neg\phi$ não são válidas nestes sistemas. Entretanto, pode-se mostrar que $\neg\neg\phi \Vvdash \phi$ e $\phi \Vvdash \neg\neg\phi$ e, pelo Teorema 2.12b abaixo, temos que $\Vvdash \phi \leftrightarrow \neg\neg\phi$. Assim, *a Lógica Intuicionista não é subjacente à consequência lógica informacional*.

O Teorema 2.11, em especial o segundo item, aponta que a Lógica subjacente à consequência lógica informacional é, no mínimo, paraconsistente *lato-sensu*. Isso porque, nessa noção de consequência, não vale, por exemplo, o *Princípio da Explosão*, ou seja, de uma contradição não se segue qualquer fórmula.

Já o terceiro item é compartilhado pela consequência lógica probabilística e pela veritativo-funcional, mas por motivos distintos. Informacionalmente, uma fórmula probabilisticamente válida é consequência de qualquer fórmula porque o seu valor é mínimo. Assim, ela nada pode informar a mais do que qualquer outra fórmula. Em termos probabilísticos e veritativo-funcionais, ela é consequência lógica de qualquer fórmula porque o seu valor é máximo, ou seja, possui valor probabilístico '1' ou valor de verdade '*V*'.

O quarto item, como o segundo, não vale nas outras duas noções de consequência lógica aqui consideradas. Nestas, uma fórmula inconsistente é consequência lógica unicamente de um conjunto contraditório de fórmulas. Na versão informacional, ela é consequência lógica de qualquer conjunto de fórmulas.

O quinto resultado expressa uma semelhança entre a consequência lógica informacional e as outras noções de consequência: fórmulas contingentes não são consequência lógica de fórmulas válidas.

No próximo teorema mostramos outras propriedades da consequência lógica informacional, comparando-a às abordagens probabilística e veritativo-funcional.

Teorema 2.12.

a: *Se* $\phi \Vvdash \psi$ *e* $\psi \Vvdash \gamma$, *então* $\phi \Vvdash \gamma$.

b: *Se* $\phi \equiv \psi$, *então* $\Vvdash \phi \leftrightarrow \psi$.

c: *Não é o caso que:* $\Gamma, \phi \Vvdash \psi$ *se, e somente se,* $\Gamma \Vvdash \phi \to \psi$.

d: *Não é o caso que:* $\Vvdash \phi$ *e* $\Vvdash \psi$ *se, e somente se,* $\phi \equiv \psi$.

e: *Não é o caso que:* $\Gamma \Vvdash \phi$ *se, e somente se,* $f(\Gamma) \subseteq f(\phi)$, *para toda* f.

f: *Não é o caso que:* $\Gamma \Vvdash \phi$ *se, e somente se,* $\Gamma \Vvdash_V \phi$.

Demonstração.
a : Se $\phi \Vvdash \psi$ e $\psi \Vvdash \gamma$, então, pela Definição 2.7, $I(\phi) \geq I(\psi) \geq I(\gamma)$, para toda f. Daí, também pela Definição 2.7, $I(\phi) \geq I(\gamma)$, para toda f. Novamente pela Definição 2.7, $\phi \Vvdash \gamma$.

b : Se $\phi \equiv \psi$, então, por TEO, $\phi \leftrightarrow \psi$ é $\top_{\mathbb{P}}$. Assim, por TEO, $\Vvdash_{\mathbb{P}} \phi \leftrightarrow \psi$. Daí, pelo Teorema 2.9d, $\Vvdash \phi \leftrightarrow \psi$.

c : ($\not\Rightarrow$): seja $\Gamma = \emptyset$. $\bot_{\mathbb{P}} \not\Vvdash \psi$, mas $\Vvdash \bot_{\mathbb{P}} \to \psi$.
($\not\Leftarrow$): $\not\Vvdash \psi \to \bot_{\mathbb{P}}$, mas $\psi \Vvdash \bot_{\mathbb{P}}$.

d : ($\not\Rightarrow$): $\Vvdash \bot_{\mathbb{P}}$ e $\Vvdash \top_{\mathbb{P}}$, mas $\bot_{\mathbb{P}} \not\equiv \top_{\mathbb{P}}$.
($\not\Leftarrow$): $\phi \to \psi \equiv \neg\phi \lor \psi$, mas não ocorre que: $\Vvdash_{\mathbb{P}} \phi \to \psi$ e $\Vvdash_{\mathbb{P}} \neg\phi \lor \psi$.

e : ($\not\Rightarrow$): $\top_{\mathbb{P}} \Vvdash \bot_{\mathbb{P}}$, mas $f(\top_{\mathbb{P}}) = U \not\subseteq f(\bot_{\mathbb{P}}) = \emptyset$.
($\not\Leftarrow$): Seja $f(\phi) \neq \emptyset$. Então $f(\bot_{\mathbb{P}}) \subseteq f(\phi)$, mas $\bot_{\mathbb{P}} \not\Vvdash \phi$.

f : ($\not\Rightarrow$): $\phi \lor \neg\phi \Vvdash \phi \land \neg\phi$, mas $\phi \lor \neg\phi \not\Vvdash_V \phi \land \neg\phi$.

($\not\Leftarrow$): $\psi \Vvdash_V \phi \lor \psi$, mas $\psi \not\Vvdash \phi \lor \psi$. ∎

O teorema acima expressa algumas características próprias da consequência lógica informacional, quando comparada às versões probabilística e veritativo-funcional. Ao contrário destas duas versões, a recíproca do Teorema 2.12b, em especial, não pode ser mostrada para a versão informacional, ou seja, não é o caso que: Se $\Vvdash \phi \leftrightarrow \psi$, então $\phi \equiv \psi$. Isso porque, por exemplo, $\Vvdash \bot_{\mathbb{P}} \leftrightarrow \top_{\mathbb{P}}$, mas $\bot_{\mathbb{P}} \not\equiv \top_{\mathbb{P}}$, pois $P(\bot_{\mathbb{P}} \leftrightarrow \top_{\mathbb{P}}) = 1$ para toda situação, enquanto que $P(\bot_{\mathbb{P}}) = 0$, para toda situação, e $P(\top_{\mathbb{P}}) = 1$, para toda situação.

O Teorema 2.12c mostra a invalidade do correspondente semântico do Teorema da Dedução. O quarto e o quinto itens ilustram algumas características próprias da consequência lógica informacional, conforme discutido nas considerações finais. O Teorema 2.12f expressa uma distinção entre as relações de consequência lógica informacional e veritativo-funcional.

Mostramos a seguir que a consequência lógica informacional não é uma consequência lógica Tarskiana.

Teorema 2.13.

a: Não é o caso que: Se $\phi \in \Gamma$*, então* $\Gamma \Vvdash \phi$.

b: Não é o caso que: Se $\Gamma \subseteq \Delta$ *e* $\Gamma \Vvdash \phi$*, então* $\Delta \not\Vvdash \phi$.

c: Se $\Delta \Vvdash \psi$*, para cada* $\psi \in \Gamma$*, e* $\Gamma \Vvdash \phi$*, então* $\Delta \Vvdash \phi$.

Demonstração. seja f uma situação qualquer.

a : Sejam $P(\Gamma) = 0$ e $P(\phi) = \frac{1}{2}$. Então $I(\Gamma) < I(\phi)$.

b : Sejam $\Gamma = \{\phi\}, \Delta = \{\phi, \neg\phi\}$ e $I(\phi) > 0$. Então $\Gamma \Vvdash \phi$ e $\Delta \Vvdash \phi$.

c : Caso 1: Se $I(\Delta) = 0$, então, pela hipótese, Se $I(\psi) = 0$, para cada $\psi \in \Gamma$, então $I(\Gamma) = 0$. Daí, pela hipótese, Se $I(\phi) = 0$, então $I(\Delta) \geq I(\phi)$. Caso 2: Por TEO e pela hipótese, Se $I(\Delta) \neq 0$, então $P(\Delta) \leq P(\psi)$, para cada $\psi \in \Gamma$. Neste caso, pode-se mostrar que $f'(\Delta) \subseteq f'(\Gamma) \subseteq f'(\phi)$, para toda f. Daí, por TEO e pela Definição 2.8, $P(\Delta) \leq P(\Gamma) \leq P(\phi)$. Assim, por TEO, $I(\Delta) \geq I(\phi)$. ∎

Em suma, o teorema acima explicita que a consequência lógica informacional não é reflexiva, tampouco monotônica, embora satisfaça a propriedade da transitividade.

Considerações finais

A mudança de perspectiva na análise da noção de consequência lógica do valor de verdade para a quantidade de informação de fórmulas produz características próprias. Alves (2012) apresenta algumas das principais semelhanças e diferenças entre esta concepção e a usual, na qual a consequência lógica é definida a partir da manutenção da verdade das premissas para a conclusão de um argumento. No que se segue ressaltamos os principais resultados obtidos a partir dos elementos apresentados neste artigo.

(CF1): As fórmulas informacionalmente vazias são consequência lógica informacional do conjunto vazio (Teorema 2.9a). Isso quer dizer que as fórmulas probabilisticamente válidas e contraditórias são auto-sustentadas. Este resultado ilustra uma primeira diferença entre as versões veritativo-funcional e probabilística com a versão informacional da consequência lógica. Naquelas duas versões, em geral, uma contradição não é consequência lógica de um dado conjunto de premissas.

(CF2): As fórmulas que são consequência lógica informacional de um dado conjunto de fórmulas cuja quantidade de informação é sempre nula são consequência lógica informacional do conjunto vazio (Teorema 2.6c). Este resultado também ilustra uma característica própria da perspectiva informacional. Dele, resulta que, se uma fórmula é consequência lógica de um conjunto contraditório de fórmulas, ela é consequência lógica informacional do conjunto vazio. Isso, em geral, não vale para as perspectivas veritativo-funcional e probabilística.

(CF3): Algumas regras de inferência dos sistemas formais lógicos clássicos, ou alguns argumentos tradicionalmente considerados válidos, não possuem validade geral na perspectiva informacional da consequência lógica. Conforme explicitado nos comentários à Proposição 2.10, os casos em que o conjunto de premissas possui informação nula configuram exemplo em que a conclusão pode ser mais informativa do que o conjunto de premissas nestas regras ou argumentos. No entanto, pode-se mostrar que, quando a quantidade de informação do conjunto de premissas for maior do que zero, a quantidade de informação da conclusão é sempre menor do que a quantidade de informação do conjunto de premissas. Este resultado indica que a conclusão de argumentos válidos, segundo a perspectiva veritativo-funcional, pode possuir mais informação do que o seu conjunto de premissas. Isso vai de encontro à concepção de que, em um argumento válido, a informação da conclusão, já está, implicita ou explicitamente, posta nas premissas. Este caso possui relações com o conhecido escândalo da dedução, conforme já enunciado nos comentários à Proposição 2.10.

Na perspectiva informacional, assim como na veritativo-funcional, argumentos indutivos ampliativos, cuja conclusão é mais informativa do que o seu conjunto de premissas, são inválidos. No entanto, tais argumentos podem ser considerados interessantes em algumas searas do conhecimento, dado que ampliam informação.

A perspectiva informacional da consequência lógica não é equivalente às perspectivas veritativo-funcional e probabilística. Há fórmulas que são consequência lógica probabilística e veritativo-funcional de um dado conjunto de fórmulas, mas não são consequência lógica informacional deste dado conjunto. Por outro lado, como já mostrado a partir do Teorema 2.6d ou do Teorema 2.11d, há fórmulas que são consequência lógica informacional de um dado conjunto de fórmulas, mas não o são do ponto de vista probabilístico ou veritativo-funcional.

(CF4): Uma fórmula é consequência lógica informacional de um dado conjunto de fórmulas se, e somente se, o dado conjunto de premissas é probabilisticamente equivalente à conclusão ou a conclusão é informacionalmente nula (Teorema 2.11). Deste resultado mostramos que uma fórmula probabilisticamente contraditória pode ser consequência informacional de um dado conjunto de fórmulas informativas. Por exemplo: $\phi \Vvdash \neg\phi \wedge \phi$.

Se, por um lado, a consequência lógica informacional se distingue da consequência lógica tradicional, dedutiva clássica, ela tampouco pode ser considerada uma inferência indutiva. Isto porque a indução se caracteriza justamente por permitir que a conclusão possua mais informação do que o seu conjunto de premissas.

(CF5): A Lógica subjacente à consequência lógica informacional é, no mínimo, paraconsistente *lato-sensu* (Teorema 2.11b). Um dos motivos para chegarmos a esta conclusão é que, nas lógicas paraconsistentes, não vale o princípio da explosão: de uma contradição não se segue qualquer coisa. Uma proposta de trabalho futuro seria analisar as características elementares de um sistema paraconsistente e averiguar quais são satisfeitas pela consequência lógica informacional.

A Lógica Clássica não é a Lógica subjacente à consequência lógica informacional, pois, nos sistemas formais lógicos clássicos, uma contradição gera qualquer fórmula. Consequentemente, as Lógicas Complementares tampouco podem ser subjacentes à consequência lógica informacional, dado que elas satisfazem os princípios da Lógica Clássica. Lógicas Heterodoxas, como os sistemas Intuicionistas e Temporais, tampouco o podem ser, como mostrado no comentário sobre os Teoremas 2.11b e 2.8d.

Do Teorema 2.11b obtemos que, ao contrário do que ocorre com as perspectivas veritativo-funcional e probabilística, em sistemas formais lógicos que adotam a consequência lógica informacional, a inconsistência de uma dada teoria não implica a sua trivialidade, conforme mostrado por Alves (2012). Do ponto de vista de sistemas formais lógicos como os clássicos, isso significa que qualquer fórmula seria considerada um teorema da teoria dada. Consequentemente, pelo Teorema da Completude para estes sistemas, tem-se que $\Vvdash_V \psi$ e $\Vvdash_{\mathbb{P}} \psi$. No entanto, como na consequência lógica informacional, em geral, $\bot_{\mathbb{P}} \not\Vvdash \psi$, não se pode concluir que a inconsistência de uma teoria implique a sua trivialidade.

(CF6): O correspondente semântico do Teorema da Dedução não é válido na perspectiva informacional da consequência lógica (Teorema 2.12c). Os três últimos itens do Teorema 2.12 ilustram outros resultados expressivos, próprios da perspectiva informacional. Nas perspectivas veritativo-funcional e probabilística, se duas fórmulas são consequência lógica do vazio, então são equivalentes, uma vez que são ambas válidas. Na versão informacional, como expresso no Teorema 2.12d, isso não possui validade geral. Uma fórmula probabilisticamente válida e outra probabilisticamente inconsistente servem de exemplo para mostrar a invalidade deste resultado.

O Teorema 2.12d ilustra outra especificidade da consequência lógica informacional. Para a versão probabilística este resultado pode ser facilmente mostrado, como faz Alves (2012). Para a versão veritativo funcional, precisamos adaptar o lado direito do resultado, de modo a garantir que jamais pode ocorrer que todas as premissas possam ser verdadeiras e a conclusão falsa em uma mesma valoração. Por fim, o último item do teorema expressa que a consequência lógica informacional e veritativo-funcional não são satisfeitas pelos mesmos conjuntos de sentenças.

(CF7): A consequência lógica informacional não é uma consequência lógica Tarskiana (Teorema 2.13). Grande parte das características próprias da perspectiva informacional da consequência lógica, como a que se refere à não-monotonicidade, é oriunda dos casos em que a quantidade de informação é nula. A diferença específica desta perspectiva encontra-se nos casos em que se trata de valores probabilidades extremos, seja em situações particulares, seja em todas as situações.

Embora seja esta a diferença básica, não podemos considerá-la uma pequena diferença. Ela produz resultados que podem ser considerados discrepantes, quando comparados às perspectivas tradicionais da consequência lógica. Dentre eles, relembramos que algumas regras de inferência não constituem argumento válido, ou que nem toda fórmula é consequência lógica informacional de um conjunto contraditório de fórmulas. Isto mostra ainda que a consequência lógica, quando analisada sob a ótica informacional em questão, deixa de ser Tarskiana, e que a lógica subjacente a esta perspectiva não é clássica, mas sim, no mínimo, paraconsistente.

(CF8): O conjunto de premissas de uma inferência informacional é sempre finito e o espaço amostral é constituído por um conjunto finito de eventos. Estas duas características representam restrições sérias em nossa proposta. A primeira restrição aponta a impossibilidade de lidar com argumentos com um conjunto de premissas potencialmente infinito, como os ω-argumentos, expostos por Tarski (1956). Este autor afirma ter construído uma teoria em que as sentenças do tipo "n possui a propriedade P", para n natural, são teoremas da teoria, e a sentença "Todo número natural possui a propriedade P" não pode ser provada na teoria. Assim, esta sentença não é consequência lógica daquelas, o que parece absurdo, neste caso.

A segunda restrição limita os modelos possíveis para uma linguagem de um sistema formal. Uma proposta de trabalho futuro seria tratar da consequência lógica informacional a partir de uma definição que envolva um espaço de probabilidades infinito. A consideração de um espaço de probabilidade infinito também tornaria viável uma análise da consequência lógica informacional para linguagens de teorias de primeira ordem, o que não fizemos neste trabalho.

Referências

Alves, M. A. 2012. Lógica e informação: uma análise da consequência lógica a partir de uma perspectiva quantitativa da informação. *Tese (Doutorado em Filosofia), 211 f. Instituto de Filosofia e Ciências Humanas, Universidade Estadual de Campinas*: Campinas.

Da Costa, N. C. A. 1993. *Lógica indutiva e probabilidade*. 2.ed. São Paulo: Ed. HUCITEC.

D'Agostino; Floridi, L. 2009. The Enduring Scandal of Deduction: Is Propositional Logic Really Uninformative? *Synthese* **167**(2): 271–315.

D'Ottaviano, I. M. L. 1992. A Lógica Clássica e o Surgimento das Lógicas Não-Clássicas. In: F. R. R. Évora (ed.), *Século XIX: o nascimento da ciência contemporânea*, pp.65–93. Coleção CLE, v.11. Campinas: Universidade Estadual de Campinas.

Haack, S. 2002. *Filosofia das Lógicas*. Trad. C. A. Mortari e L. H. A. Dutra. São Paulo: Editora UNESP.

Hintikka, J. 1970. Surface Information and Depth Information. In: J. Hintikka; P. Suppes (eds.), *Information and Inference*, pp.263–97. Dordrecht: Reidel.

Mates, B. 1968. *Lógica Elementar*. Trad. L. Hegenberg; O. S. Mota. São Paulo: Companhia Editora Nacional/Editora da Universidade de São Paulo.

Mendelson, E. 1964. *Introduction to Logic*. New York: D. Van Nostrand Company.

Shannon, C.; Weaver, W. 1949. *The Mathematical Theory of Information*. Urbana: University of Illinois Press.

Shoenfield, J. 1967. *Mathematical Logic*. Reading, MA: Addison Wesley Publishing Company.

Tarski, A. 1983 [1956]. On the Concept of Logical Consequence. In: *Logic, Semantics, Metamathematics*, pp.409–20. Oxford: Clarendon Press.

Agradecimentos

Agradecemos ao Grupo de Estudos em Filosofia da Informação, da Mente e Epistemologia - GEFIME (CNPq/UNESP) pelas discussões. Ao CNPq, pelo apoio através da Chamada Universal 2018, Projeto "Relações entre informação, conhecimento e ação segundo Dretske", processo número 420433/2018−0 e Chamada PQ - 2021, Projeto "Informação, cognição e notícias falsificadas: uma análise a partir de Fred Dretske", processo número: 311630/2021−9.