

UMA CONVERSA SOBRE A LÓGICA ENTRE FREGE E WITTGENSTEIN

A CONVERSATION ABOUT LOGIC BETWEEN FREGE AND WITTGENSTEIN

CARLOS EDUARDO FISCH DE BRITO

Universidade Federal do Ceará, BRASIL
carlosb@ufc.br

Abstract. This paper begins with a conversation between Frege and Wittgenstein. Frege speaks first, advancing his point of view on the foundations of logic. Then, Wittgenstein replies in three moments: (a) first he plays with Frege's ideas to examine their meaning, (b) then he begins to disclose his own ideas about logic, which challenge Frege's point of view, (c) and finally, he manages to find an agreement with Frege, leaving a puzzle for us: the idea of a technique of thinking. Then it is our turn to enter the conversation, and our participation unfolds in two moments: (a) first we introduce Turing's ideas to articulate the notion of a two levers mechanism, (b) and then we sketch an understanding of Wittgenstein's technique of thinking in terms of this mechanism

Keywords: logic • thought • computation • logical alien

RECEIVED: 02/02/2022

ACCEPTED: 21/06/2022

1. Introdução

É um fato bem conhecido que Frege e Wittgenstein trocaram cartas entre si, e que dessa maneira eles tiveram a oportunidade de discutir suas respectivas ideias um com o outro. E todos sabem também que as conversas entre os dois continuaram mesmo após o falecimento de Frege, com Wittgenstein respondendo em seus textos às ideias que ele encontrava nos textos de Frege. Nesse artigo, nós vamos examinar uma dessas conversas tardias entre Frege e Wittgenstein.

Mais especificamente, nós vamos examinar um trecho do prefácio das *Leis Básicas da Aritmética*¹ (1893), compreendido entre as páginas XIV e XVII, com o qual Wittgenstein dialoga nas passagens 131–155 de suas *Observações sobre os Fundamentos da Matemática*² (1937–44). A primeira observação interessante é que nesse trecho do seu prefácio, Frege está engajado ele próprio em um diálogo com um suposto lógico- psicológico (Sr B. Erdmann). O objetivo de Frege nessa passagem é não apenas avançar a sua agenda antipsicologista da lógica, como também apresentar uma fundamentação para as leis lógicas em termos de leis eternas e incondicionais da verdade. O assunto, é claro, não poderia ser mais atraente para Wittgenstein, que



apresenta em sua passagem 151 uma desculpa para entrar na conversa: “Frege diz no prefácio às *Leis Básicas da Aritmética*: ‘temos aqui um tipo de loucura até então desconhecido’ — mas ele nunca disse o que seria realmente essa loucura” (Wittgenstein 1967, p.44, nossa tradução)

Como veremos em detalhe neste artigo, o que se segue então é uma conversa bem divertida e interessante, onde a discussão se desenrola em ao menos três níveis de significado. No primeiro nível, nós encontramos Wittgenstein examinando as ideias de Frege e brincando com as suas palavras para se colocar ao lado do lógico-psicológico. No segundo nível, Wittgenstein formula toda uma série de experimentos mentais para se opor de maneira direta e frontal à ideia de Frege de fundamentar a lógica (e a matemática) em termos das noções de verdadeiro e falso. O nosso entendimento, no entanto, é que esse desacordo é apenas um movimento preliminar que Wittgenstein realiza para remover algumas confusões do caminho e abrir espaço para um acordo mais profundo com Frege. O acordo consiste na percepção de ambos de que é preciso que haja algo de firme e sólido para fundamentar o fenômeno do pensamento — Wittgenstein oferece, em *Sobre a Certeza*³ (1949-50), a imagem de uma “pedra dura [subjacente ao] leito do rio dos pensamentos”, ecoando a ideia de Frege de um “fundamento eterno [da verdade]”. O que nós encontramos então no terceiro nível de significado, é Wittgenstein à procura do que poderia haver de sólido em nossas práticas linguísticas, e indicando a sua própria concepção sobre o papel da lógica. Como se pode imaginar, Wittgenstein não é nada explícito a respeito dessas últimas ideias. Daí que, nós concluímos o nosso artigo com algumas especulações sobre a lógica e o que Wittgenstein entenderia pelo que ele chama de ‘a técnica do pensamento’.

2. Frege: *Leis Básicas da Aritmética* (XIV - XVII)

A insanidade mencionada por Wittgenstein é descrita por Frege, na página XVI do prefácio, da seguinte maneira:

Mas e se até mesmo fossem encontrados seres cujas leis do pensamento verdadeiramente contradissem as nossas e assim também muitas vezes conduzissem a resultados opostos em seu uso? O lógico-psicológico poderia tão somente reconhecer e dizer que para eles aplicam-se aquelas leis, para nós estas. Eu diria: temos aqui um até então desconhecido tipo de loucura.⁴ (Frege 1893, XVI, nossa tradução)

Quer dizer, aqui nós já vemos Frege em pleno desentendimento com o seu companheiro lógico-psicológico, Sr B. Erdmann. Mas voltando um pouco atrás no texto, nós entendemos que Frege está tentando avançar a sua posição antipsicologista da lógica. Mais especificamente, o que está em jogo são os fundamentos da lógica, que

Frege deseja ver estabelecidos em termos de leis lógicas, que fariam o papel de leis do pensamento, e que seriam apoiadas ultimamente na noção de verdade: “as leis lógicas devem ser diretrizes para o pensamento até o alcance da verdade”⁵ (Frege 1893, XV, nossa tradução).

Nesse ponto, Frege sente a necessidade de fazer um breve esclarecimento a respeito da noção de ‘lei’:

O duplo sentido da palavra “lei” aqui é fatal. Num sentido implica o que é, no outro prescreve o que deve ser. Apenas nesse sentido de determinar como deve-se pensar podem as leis lógicas ser chamadas de leis do pensamento.⁶ (Frege 1893, XVI, nossa tradução)

Aqui, Frege não apenas enuncia o seu ponto de vista, mas também já começa a demarcar a posição do seu interlocutor:

Mas a expressão “leis do pensamento” induz à opinião de que essas leis governam o pensamento da mesma maneira que as leis da natureza governam eventos no mundo externo. Nesse caso, elas não podem ser mais do que leis psicológicas, pois o pensamento é um processo mental.⁷ (Frege 1893, XVI, nossa tradução)

Em seguida, a diferença entre os dois é caracterizada em termos da noção de verdade e Frege descreve a posição do lógico-psicológico da seguinte maneira: “Claro, se a lógica lida com algo sendo tomado como verdadeiro, em vez do ser verdadeiro! [...] Dessa maneira, no fim a verdade é reduzida a indivíduos tomando algo por verdadeiro”⁸ (Frege 1893, XVI, nossa tradução). Por fim, ele próprio afirma: “contra isso eu posso apenas dizer: ser verdadeiro é diferente de ser tomado como verdadeiro, seja por um, por muitos ou por todos os homens, e de maneira nenhuma é redutível a isso”⁹ (Frege 1893, XV, nossa tradução).

Pronto, aqui a divergência entre as duas posições encontra a sua expressão mais clara e aguda. E o que vem em seguida é basicamente uma elaboração adicional dessas ideias: “[...] as leis do ser verdadeiro não são leis psicológicas, mas pedras limítrofes postas num fundamento eterno, o qual nosso pensamento pode transbordar mas nunca deslocar”¹⁰ (Frege 1893, XVI, nossa tradução).

Quer dizer, o pensamento pode oscilar e vacilar em busca de um rumo, e adotar ora essa e ora aquela forma de organização. Mas a verdade permanece fixa e é independente desses movimentos: “[As leis do ser verdadeiro] não mantêm com o pensamento a mesma relação que as leis da gramática mantêm com a linguagem, como se dessem expressão à natureza do pensamento humano e variassem com ele”¹¹ (Frege 1893, XVI, nossa tradução).

Aqui Frege dá mais algumas pinceladas para realçar o contraste entre as posições: “Naturalmente, a concepção das leis lógicas de acordo com Sr. Erdmann é totalmente diferente. Ele duvida de sua validade eterna, incondicional, e quer restringi-las a

como nosso pensamento é agora”¹² (Frege 1893, XVI, nossa tradução). E é nesse ponto que aparece a nossa passagem em questão: “Conseqüentemente, permanece aberta a possibilidade de serem descobertos humanos ou outros seres capazes de realizar juízos contradizendo nossas leis da lógica. E se assim for o caso?”¹³ (Frege 1893, XVI, nossa tradução). Frege responde então pelo seu interlocutor: “Sr. Erdmann diria: vemos então que aqueles princípios não são válidos em todo lugar. [...] Para eles valem aquelas leis, para nós estas”¹⁴ (Frege 1893, XVI, nossa tradução). Enfim, ele próprio também dá a sua resposta: “Eu diria: temos aqui um tipo de loucura até então desconhecido”¹⁵ (Frege 1893, XVI, nossa tradução).

Em resumo, Frege parece conceber as coisas da seguinte maneira:

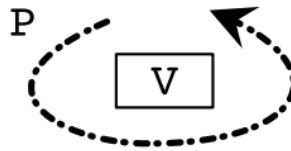


Figura 1: Pensamento em Frege

Quer dizer, enquanto o pensamento realiza os seus movimentos (ao longo do espaço e do tempo), as leis da verdade permanecem eternamente no mesmo lugar. O pensamento pode, é claro, tomar essas leis como guia, caso ele deseje alcançar a verdade. A lógica seria a ciência que investiga e explicita as leis imutáveis da verdade. Mas os movimentos do pensamento seriam objeto de estudo da psicologia.

Aqueles que conhecem um pouquinho de filosofia já podem adivinhar que essas ideias vão dar um prato cheio para Wittgenstein se divertir...

3. Wittgenstein: Observações sobre os Fundamentos da Matemática (§§131–155)

Como já vimos, Wittgenstein entra na conversa com Frege da seguinte maneira: “Frege diz no prefácio às *Leis Básicas da Aritmética*: ‘temos aqui um tipo de loucura até então desconhecido’ — mas ele nunca disse o que seria realmente essa loucura”¹⁶ (Wittgenstein 1967, p.44, nossa tradução). E, à primeira vista, Wittgenstein parece realmente interessado na questão colocada por Frege — isto é, sobre a possibilidade de encontrar pessoas cujas leis do pensamento contradizem diretamente as nossas. O exemplo dos lenhadores, apresentado nas passagens 147-148 (e que veremos mais adiante), parece ser uma tentativa de instanciar concretamente esse tipo de insanidade.

Mas, voltando um pouco atrás no texto, nós encontramos Wittgenstein brincando não apenas com as ideias mas também com as palavras de Frege. Por exemplo:

132. Frege chama ‘uma lei do tomar por verdadeiro do homem’ que ‘é impossível para o ser humano... reconhecer um objeto como diferente de si mesmo’. — quando eu penso nisso como impossível pra mim, então eu penso em tentar fazê-lo. Então eu olho minha lamparina e digo: “essa lamparina é diferente de si mesma.” (Mas nada se move) Não é que eu veja que é falso, é que eu não posso fazer absolutamente nada com isso. (Wittgenstein 1967, p. 41, nossa tradução)¹⁷

Daí em outro lugar (XV), Frege diz que as leis da geometria e da física podem ser tomadas como leis do pensamento, no sentido de que elas regulam a maneira como nós pensamos sobre esses respectivos domínios. Então, Wittgenstein experimenta para tentar entender como essas leis podem restringir e condicionar o nosso pensamento:

140. O que acontece quando alguém tenta fazer com que uma forma coincida com sua imagem espelhada ao movê-la sobre o plano e não consegue?

[...]

O que acontece quando alguém tenta levantar um peso e não consegue porque a carga é muito pesada?

[...]

Em que se mostra a impossibilidade lógica, geométrica, da primeira tarefa? (Wittgenstein 1967, p.42, nossa tradução)¹⁸

Em outras passagens, Wittgenstein já começa a desafiar o ponto de vista de Frege. Por exemplo, Frege diz que “apenas nesse sentido de determinar como deveria-se pensar podem as leis lógicas ser chamadas de leis do pensamento”, enquanto que Wittgenstein se põe a imaginar estranhas possibilidades:

134. Imagine a seguinte possibilidade estranha: até agora nós sempre erramos ao multiplicar 12×12 . Sim, é ininteligível como isso pode ter acontecido, mas aconteceu. Então tudo que foi feito desse modo está errado! – Mas o que isso importa? Não importa nada mesmo!¹⁹ (Wittgenstein 1967, p.41, nossa tradução)

E em seguida ele continua com as suas elucubrações:

135. Mas então é impossível que eu tenha errado em meus cálculos? E se um demônio me engana, de modo que eu continuo negligenciando algo, não importa quantas vezes eu recalcule, passo a passo. De modo que se eu acordasse do feitiço, diria: “Sim, eu estava cego?” Mas, para mim, que diferença faz ‘assumir’ isso? Eu poderia dizer: “Sim, claro, o cálculo está errado — mas é assim que eu calculo. E isso é o que eu chamo agora de adição, e isso ‘a soma de dois números’.”

Finalmente, Wittgenstein se coloca abertamente ao lado do lógico-psicológico, e utiliza como que as próprias palavras de Frege para dizer o contrário do que ele diz. Por exemplo:

FREGE – “[Não é] como se [as leis do ser verdadeiro] dessem expressão à natureza do pensamento humano e variassem com ele.” (1893, XVI, nossa tradução)

WITTGENSTEIN – “131. As leis da lógica são de fato a expressão de ‘hábitos de pensamento’[...].”²⁰ (1967, p.41, nossa tradução)

Aqui nós temos mais um exemplo:

FREGE – “Num sentido [a palavra ‘lei’] implica o que é, no outro prescreve o que deve ser. Apenas nesse sentido de determinar como deve-se pensar podem as leis lógicas ser chamadas de leis do pensamento.” (1893, XV, nossa tradução)

WITTGENSTEIN – “133. As proposições da lógica são ‘leis do pensamento’, [porque] elas mostram o que o pensamento é [...].”²¹ (1967, p.41, nossa tradução)

E aqui mais outro:

FREGE – “Quem entende as leis lógicas [...] como leis do ser verdadeiro, não como leis naturais de humanos tomando algo por verdadeiro, perguntará: quem está certo?”²² (1893, XVI, nossa tradução)

WITTGENSTEIN – “141. O que nós fornecemos, na realidade, são observações sobre a história natural do homem [...].”²³ (1967, p.43, nossa tradução)

4. O ponto de Wittgenstein

Mas afinal de contas, qual é o ponto de Wittgenstein?

Quer dizer, ele não estaria só a fazer brincadeiras com o texto de Frege. Mas as coisas começam a ficar mais claras quando nós prestamos atenção em passagens como essa aqui:

136. Imagine que alguém está enfeitiçado, de modo que ele calcula:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 & 3 & & 3 & & 3 & & 3 & & 2 \\
 \frown & & \frown & & \frown & & \frown & & \frown & \\
 | & | & | & | & | & | & | & | & | & | \\
 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10
 \end{array}
 \quad \text{i.e.} \quad 4 \times 3 + 2 = 10.$$

Agora ele deve aplicar esse cálculo.

Ele pega 3 nozes, e outras 2, e ele as divide entre 10 pessoas e cada uma pega *uma* noz; pois ele distribui de um modo que corresponde aos loops no cálculo, e tão logo ele dá uma segunda noz a alguém ela desaparece.²⁴ (Wittgenstein 1967, p.42, nossa tradução)

Quer dizer, não há nada de errado (ou de certo) com uma regra de cálculo, seja ela qual for. Tudo o que importa é que ela funcione bem na prática. Isto é, o que importa é que a regra possa ser usada para guiar as nossas atividades práticas, e que tudo vá bem. Esse ponto já foi ilustrado nas passagens 134 e 135 acima. E o mesmo ponto aparece aqui outra vez:

139. Pode ser prático medir com uma régua que tem a propriedade de encolher para, digamos, metade de seu comprimento quando ela é levada dessa para aquela sala. Uma propriedade que a tornaria inútil como régua em outras circunstâncias.

Pode ser prático, em certas circunstâncias, deixar números de fora ao contar um conjunto: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10.²⁵ (Wittgenstein 1967, p.42, nossa tradução)

De fato, essa passagem nos dá uma dica. Quer dizer, Wittgenstein parece estar apontando para o fato de que as nossas regras de cálculo são como *ferramentas*: elas são adequadas quando elas funcionam bem na prática. E essa observação já começa a nos levar para o caso dos lenhadores:

142. Ensinamos alguém a construir uma casa; e, ao mesmo tempo, como ele deve obter uma quantidade suficiente de materiais, digamos, tábuas; e para esse propósito uma técnica de cálculo. A técnica de cálculo é parte da técnica de construção da casa.

Pessoas empilham toras e vendem-nas, as pilhas são medidas com uma régua, as medidas de comprimento, largura e altura multiplicadas juntas, e o que vem à tona é o número de moedas que deve ser pedido e dado.²⁶ (Wittgenstein 1967, p.43, nossa tradução)

E, como nos exemplos anteriores, o próximo passo é mudar a regra de cálculo:

147. Aquelas pessoas — deveríamos dizer — vendem madeira por metro cúbico — mas eles estão certos em fazê-lo? Não seria mais correto vender por peso — ou pelo tempo que levou para derrubar a madeira [...]?

E por que eles não deveriam entregá-la por um preço que é independente disso tudo: cada comprador paga o mesmo, não importa quanta madeira leve (eles descobriram que é possível viver assim). E existe algo a ser dito contra simplesmente dar a madeira?²⁷

Todas essas regras ainda parecem razoáveis ou plausíveis para nós — no sentido de que é possível imaginar circunstâncias onde elas poderiam ser aplicadas. Mas,

Wittgenstein continua experimentando: “148. Muito bem, mas e se eles empilharam a madeira em montantes de altura arbitrária e variada, e então vendem-na a um preço proporcional à área coberta pelas pilhas? [...]”²⁸ (Wittgenstein 1967, p.44, nossa tradução). Aqui já nos parece escapar qualquer possibilidade razoável de dar sentido à situação. Mas Wittgenstein ainda vai mais longe, tornando a situação mais aguda e à beira de uma contradição lógica: “[...] E se eles ainda justificassem isso com essas palavras: ‘claro, se você comprar mais madeira você deve pagar mais?’”²⁹ (Wittgenstein 1967, p.44, nossa tradução).

Quer dizer, eles tomam como diferentes coisas que nós não podemos deixar de pensar como iguais (e vice-versa). E daí, é engraçado ver como Wittgenstein se imagina tentando chamá-los à razão:

149. Como eu poderia mostrar a eles — como eu deveria dizer — vocês não estão comprando mais madeira se compram uma pilha cobrindo uma área maior? Eu deveria, por exemplo, pegar uma pilha que, de acordo com seus conceitos, fosse pequena e, movendo as toras, transformá-la em uma ‘grande’. Isso *poderia* convencê-los — mas talvez eles dissessem “sim, agora é *muita* madeira e custa mais” — e isso seria o fim.³⁰

E como Frege também se imagina nesse tipo de posição:

Se outras pessoas presumem reconhecer uma lei e duvidar dela no mesmo fôlego, isso me parece uma tentativa de saltar para fora da própria pele, contra o que eu não posso fazer nada mais do que urgentemente alertá-los.³¹ (Frege 1893, XVII, nossa tradução)

Mas, qual é o ponto de Wittgenstein com toda essa discussão? O que ele quer nos mostrar com esses exemplos? Bom, o nosso palpite preliminar é o seguinte.

Relembre a ideia de que as nossas regras de cálculo são como ferramentas — elas são adequadas quando elas nos ajudam a fazer as coisas. Para nos mostrar isso, Wittgenstein se põe a modificar as regras. E em seguida ele indica que as condições de uso da regra podem mudar também, de modo que tudo continue bem. Mas não é só isso.

Quer dizer, ele não quer mostrar apenas que regras são como ferramentas. E que nesse sentido a definição de uma regra e o seu contexto de aplicação estão internamente conectados. Ele quer mostrar também que qualquer noção de corretude, adequação, certo ou errado são propriedades da situação como um todo, e não apenas da regra. Dessa maneira, ele quer nos afastar da ideia de que as proposições da matemática (e da lógica) devem ser avaliadas em termos das noções de verdadeiro e falso:

134. [...] deve haver algo errado na nossa ideia sobre verdade e falsidade de proposições aritméticas.

155. [...] Mas a razão pela qual [inferências lógicas] não são colocadas em questão não é que elas ‘certamente correspondem à verdade’.[...] Não há nenhuma questão aqui sobre alguma correspondência entre o que é dito e a realidade [...].³²

Em outras palavras, Wittgenstein está se opondo de maneira direta e aguda ao ponto de vista de Frege, que pretende fundamentar o pensamento (e a lógica) em termos de leis (eternas, incondicionais e objetivas) da verdade.

Em resumo, Wittgenstein está removendo os alicerces colocados por Frege como o fundamento do pensamento, da lógica e da matemática (i.e., as leis da verdade) e transferindo essa função para o contexto das nossas atividades práticas:

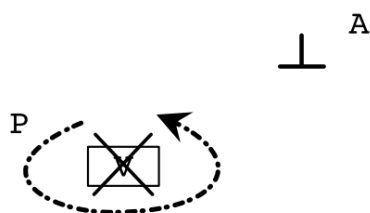


Figura 2: Pensamento em Wittgenstein

Quer dizer, são as atividades práticas que fornecem os parâmetros para avaliar a adequação ou não do nosso pensamento (e das nossas leis lógicas...).

5. Fundamentos do pensamento

Mas, quando se trata de Wittgenstein, as coisas nunca são tão simples assim...

Quer dizer, o desacordo com Frege parece ser apenas um movimento preliminar, com a função de tirar a confusão relacionada com verdadeiro e falso do meio do caminho. E, uma vez que isso tenha sido feito, Wittgenstein pode ir buscar um acordo mais profundo com Frege. Esse ponto começa a ficar claro em mais uma volta do diálogo que se desenrola entre os dois.

Em uma das passagens mais vívidas do seu prefácio, Frege diz que “[...] as leis do ser verdadeiro são [...] pedras limítrofes postas num fundamento eterno, o qual nosso pensamento pode transbordar mas nunca deslocar”³³ (Frege 1893, XVI, nossa tradução). E daí, em *Sobre a Certeza*, nós encontramos Wittgenstein fazendo eco a essa passagem:

97. [...] o leito do rio dos pensamentos pode desviar-se. Mas eu distingo entre o movimento das águas no leito do rio e o desvio do próprio leito; ainda que não haja uma nítida demarcação entre eles. [...]

98. Mas se alguém dissesse “Assim também a lógica é uma ciência empírica”, essa pessoa erraria. [...]

99. E a margem daquele rio consiste, em parte, em rocha dura não sujeita a alteração ou apenas a uma alteração imperceptível e, noutra parte, em areia que ora é arrastada, ora se deposita. (Wittgenstein 2012, p.41)

Quer dizer, ao que parece Wittgenstein também reconhece que há algo de firme e (quase) imutável que serve de fundamento para o pensamento. E nesse sentido, o seu modelo é um pouco mais complicado do que nós tínhamos antevisto:

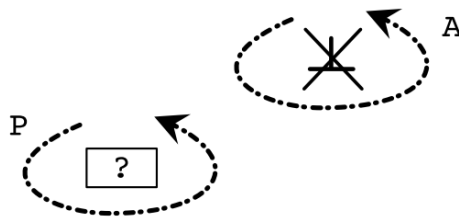


Figura 3: Pensamento em Wittgenstein (versão revista)

Mas isso faz sentido. Quer dizer, as nossas atividades práticas também estão em fluxo. E na medida em que a linguagem (ou o pensamento) é capaz de regular as nossas atividades práticas, deve haver algo de firme em que ela pode se apoiar para oferecer resistência ao movimento dos elementos do mundo.

Voltando ao texto das *Observações sobre os Fundamentos da Matemática*, nós encontramos algumas evidências dessa ideia:

137. [...] numa prova você avança de uma proposição para outra, mas você também aceita uma checagem sobre se você seguiu o caminho certo? — ou você diz meramente “ Isso deve estar certo!”, e mensura tudo o mais através da proposição que você alcançou?

138. Pois se é assim, então você está avançando de uma figura para outra.³⁴ (Wittgenstein 1967, p.42, nossa tradução)

Quer dizer, deve existir alguma coisa que serve como parâmetro de correteza para um argumento, um raciocínio ou um pensamento. Mas, o que seria isso? Regras? Wittgenstein não parece estar completamente certo disso:

143. [...] Claro, nós ensinamos as tabelas de multiplicação para crianças na forma de pequenas *sentenças*, mas isso é essencial? Por que elas não deveriam simplesmente: *aprender a calcular*? E quando elas podem fazer isso, elas não aprenderam aritmética?

144. Mas nesse caso, a *fundação* de um procedimento de cálculo está relacionada ao cálculo em si mesmo?

145. “Sim, eu entendo que essa proposição se segue daquela.” — Eu entendo *por que* ela se segue ou eu somente entendo *que* ela se segue?³⁵ (Wittgenstein 1967, p.43, nossa tradução)

E para complicar as coisas, nós lembramos que o leito do rio dos pensamentos de Wittgenstein é composto parcialmente por areia, que está ora aqui e ora ali, e pode ser movida para cá e para lá. . .

Quer dizer, é possível (e nem tão difícil assim . . .) mudar as regras que servem de apoio para o nosso pensamento. Esse é o exercício a que Wittgenstein se dedica no trecho que nós estamos examinando. E aqui nós temos mais um exemplo:

154. Seria possível que pessoas seguissem um de nossos cálculos hoje e ficassem satisfeitas com as conclusões, mas amanhã quisessem tirar conclusões bem diferentes, e outras mais novamente em outro dia?

Sim, não podemos imaginar que deveria acontecer regularmente deste modo: que quando nós fazemos essa transição uma vez, na próxima vez nós fazemos uma transição diferente, apenas ‘por essa razão’, e portanto (digamos) na próxima vez a primeira novamente?³⁶ (Wittgenstein 1967, p.45, nossa tradução)

Quer dizer, Wittgenstein afirma que o leito do rio também é feito de rocha dura, mas onde quer que ele bote a mão, a coisa se move e se revela como mais um pedaço de areia. . .

Onde estão os fundamentos últimos do pensamento? Bom, esse é o domínio da lógica. É aí que nós deveríamos esperar encontrá-los. E é nessa direção que Wittgenstein aponta: “155. Isso não é assim: contanto que alguém pense que não pode ser de outro jeito, chega-se a uma conclusão lógica. [. . .] Os passos que não são colocados em questão são inferências lógicas.”³⁷ (Wittgenstein 1967, p.45, nossa tradução).

É isso então! Aquilo que permanece firme e que serve de apoio para o pensamento são as leis da lógica – como já dizia o velho Frege. . . Mas Wittgenstein adverte: “155. [. . .] a razão pela qual elas não são colocadas em questão não é que elas ‘certamente correspondem à verdade’ — ou algo do tipo”³⁸ (Wittgenstein 1967, p.45, nossa tradução). E, prestando bem atenção no texto, nós percebemos que mesmo as leis da lógica não são tão firmes assim. Quer dizer, elas nos servem de apoio “enquanto *elas não são colocadas em questão*”³⁹ (Wittgenstein 1967, p.45, nossa tradução). E isso parece nos levar de volta para a estaca zero.

Nesse ponto, faz sentido perguntar: em que sentido, então, a lógica fornece a chave para entendermos os fundamentos últimos do pensamento? A resposta de Wittgenstein é quase singela:

131. [. . .] pode-se dizer que [as leis da lógica] mostram como os seres humanos pensam [. . .].

133. As proposições da lógica [...] trazem à tona a técnica do pensamento. Elas mostram o que é o pensamento [...].⁴⁰ (Wittgenstein 1967, p.41, nossa tradução)

E isso nos leva para a última parte da nossa discussão.

6. A técnica do pensamento

O que nós temos a dizer aqui é um tanto especulativo. Porque, em nenhum lugar do trecho que nós estamos examinando, Wittgenstein se propõe a explicar o que é essa tal de técnica do pensamento. O nosso palpite é que – da mesma maneira que acontece com a lógica — Wittgenstein pretende apenas mostrar a técnica do pensamento em ação, por meio do seu próprio texto.

Mas se isso é o caso, então tudo depende da nossa capacidade de ver...

Por outro lado, nós não temos a pretensão de fazer a mesma coisa. Quer dizer, a seguir nós vamos nos colocar na posição um tanto arriscada de dizer alguma coisa de específico sobre a técnica do pensamento. E já antecipando um pouco o final da história, nós vamos dizer que ela se trata da *técnica da dupla alavanca*.



Figura 4: Técnica da dupla alavanca

Vejam os. Tanto Frege como Wittgenstein concebem o pensamento em termos de um movimento que se realiza tomando algo que não se move como apoio. E nós observamos que a ideia de que as coisas se estruturam em termos de algo que se move enquanto uma outra coisa permanece no lugar (com a função de guia ou ponto de apoio) é uma ideia muito geral.

Por exemplo, as teorias científicas que explicam os fenômenos naturais se organizam dessa maneira:

- de um lado nós temos alguma noção de *estado*, que descreve como as coisas estão, mas que pode mudar de um momento para outro;
- e de outro lado nós temos as *leis de movimento*, que especificam como o estado muda, mas que não mudam elas próprias com o passar do tempo.

A mesma coisa também vale para as regras de cálculo. E de maneira mais geral, é assim que se estrutura o fenômeno da computação:

- de um lado nós temos os *dados*, que são escritos e reescritos durante a computação;
- e de outro lado nós temos o *programa*, que especifica como os dados devem ser manipulados, mas que não muda ele próprio durante a computação.

Certo. Mas tanto num caso como no outro, ainda falta o nosso engajamento direto com o mundo. Quer dizer, é no contexto das atividades práticas de uma pessoa que o pensamento (ou um jogo de linguagem) é utilizado como ferramenta.

No casos mais simples de atividade prática, o comportamento pode ser concebido de maneira reativa:

- quando ocorre alguma perturbação externa (ou estímulo), nós reagimos de uma determinada maneira, e isso já pode ser suficiente para deixar as coisas como estão

Nos casos mais interessantes, por outro lado, nós estamos tipicamente engajados em promover alguma mudança na situação atual. E nesses casos, é comum que a gente tome alguns elementos da própria situação como ponto de apoio, para produzir a mudança que nós queremos. Para a coisa funcionar, claro, é preciso que esses elementos permaneçam no lugar durante a atividade. E não é incomum que isso seja conseguido por meio da nossa própria intervenção — i.e., nós podemos construir os nossos próprios pontos de apoio. Por exemplo, nós aparafusamos o corrimão de maneira firme na parede, para que ele nos ajude a descer a escada. E mesmo a escada também é um ponto de apoio, que nos ajuda a subir e descer de um lugar para outro.

Aqui já começa a aparecer a imagem da primeira alavanca.

Mas elementos fixos que nunca saem do lugar são de pouca valia. E após algum tempo, eles começam mais a atrapalhar do que a nos ajudar a fazer as coisas. Por outro lado, algo que se move ao sabor das circunstâncias não é de valia alguma — não pode ser usado como ponto de apoio. Quer dizer, o que nós precisamos mesmo é de algo que se move de acordo com a nossa vontade — ou de acordo com o fluxo da nossa atividade. Em outras palavras, o que nós precisamos é de regras, que especificam como os nossos pontos de apoio devem mudar — mas as regras elas próprias, claro, elas não podem mudar.

Aqui já começa a aparecer a segunda alavanca.

Resumindo, a primeira alavanca consiste na ideia de movimento apoiado: nós nos apoiamos em alguma coisa para fazer uma outra coisa mudar. E a segunda alavanca consiste na ideia de que aquilo que é mantido fixo em um primeiro momento (para ser usado como ponto de apoio) também é algo que se pode mover, pelo mesmo tipo de movimento apoiado.

O nosso palpite é que Wittgenstein formula os seus exemplos e experimentos para ver (e nos ajudar a ver) os movimentos de segunda alavanca. E que ele também vê esses movimentos acontecendo nos jogos formais de proposições — onde a lógica exhibe a técnica do pensamento. Mas o lugar onde isso aparece com a maior clareza é na análise de Turing para o fenômeno da computação.

Quer dizer, como todo mundo sabe, a máquina de Turing é um mecanismo definido em termos de uma coleção de estados, uma fita de símbolos, e um conjunto de regras de transição. E em cada passo da computação, uma regra especifica o comportamento da máquina, com base no estado atual e no símbolo que está sendo lido na fita:

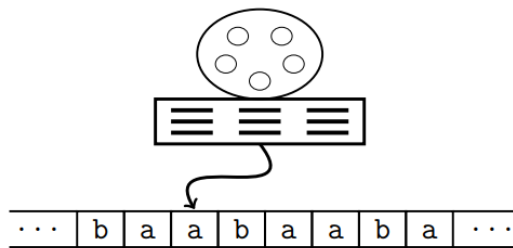


Figura 5: Máquina de Turing

Quando Gödel viu a máquina de Turing, ele se convenceu de que o problema de caracterizar a noção de *effective calculability* havia sido resolvido de uma vez por todas:

A definição resultante do conceito de [computação] mecânica pelo preciso conceito de ‘performável por uma máquina de Turing’ é tanto correto quanto único. [...] Além disso, é absolutamente impossível que alguém que entenda a questão e conheça a definição de Turing deva decidir por um conceito diferente.⁴¹ (Wang 2016, p.84, nossa tradução)

Sim, mas o que será que Gödel viu na máquina de Turing?

Bom, o nosso palpite é que ele viu o mecanismo de dupla alavanca. Para ver isso, é preciso examinar o funcionamento da máquina com um pouco mais de detalhe. E para fazer esse exame, é conveniente lançar mão das noções de leitura e escrita. Quer dizer, a ideia mais básica é que leitura e escrita é aquilo que acontece com os símbolos da fita — (i.e., a máquina lê os símbolos, e a máquina reescreve os símbolos).

Mas a gente também pode ver aquilo que acontece com os estados em termos de leitura e escrita. Quer dizer, quando a máquina muda de estado, isso pode ser entendido como uma operação de escrita. E quando a gente consulta o estado atual da máquina para escolher a regra do próximo passo de computação, isso pode ser entendido como uma operação de leitura.

Daí, vendo as coisas desse modo, a gente nota que:

- a leitura do símbolo na fita condiciona a mudança no estado da máquina — (*i.e.*, *escrita*);
- a leitura do estado da máquina condiciona a mudança do símbolo na fita — (*i.e.*, *escrita*).

Quer dizer, uma coisa fica parada (servindo de ponto de apoio) para que uma outra coisa mude (de maneira controlada). E a gente pode pensar que aquilo que fica parado e aquilo que muda, vão se alternando ao longo do tempo — (*tic-tac, tic-tac, tic-tac, ...*) Mas na máquina de Turing, as duas coisas mudam ao mesmo tempo:

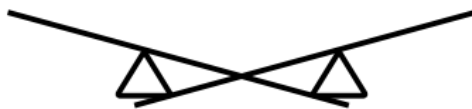


Figura 6: Pontos de apoio na máquina de Turing

7. Aliens lógicos

Certo.

Mas já está na hora de voltar para a conversa entre Wittgenstein, Frege e o lógico-psicológico. Quer dizer, cada um deles tem o seu próprio ponto de vista. E no final das contas, Wittgenstein está mais próximo de Frege do que do lógico-psicológico. Ou melhor, a nossa ideia é que a posição de Wittgenstein é uma elaboração da posição de Frege. Quer dizer, Frege dá um primeiro passo no seu debate com o lógico-psicológico. E esse passo é seguido por um segundo passo de Wittgenstein no seu debate com Frege — de um modo tal que a reaproximação com o lógico-psicológico é apenas aparente.

Vejam como isso acontece. A oposição entre Frege e o lógico-psicológico corresponde na prática à distinção apontada por Frege entre os dois sentidos da palavra ‘lei’:

O duplo sentido da palavra “lei” aqui é fatal. Num sentido implica o que é, no outro prescreve o que deve ser. [...] Mas a expressão “leis do pensamento” induz à opinião de que essas leis governam o pensamento da mesma maneira que as leis da natureza governam eventos no mundo externo.⁴² (Frege 1983, XV, nossa tradução)

Quer dizer, a posição do lógico-psicológico está associada à ideia de leis científicas ou empíricas, que descrevem como um fenômeno natural é. E as coisas devem ser

assim mesmo. Quer dizer, não pode ser o caso que o fenômeno seja de um jeito e a lei empírica diga que ele é de um outro jeito. Por outro lado, uma vez que nós temos a lei, nós sempre podemos pensar em uma lei diferente, e daí nós podemos nos colocar a imaginar como seria o fenômeno que corresponde a essa outra lei.

Mas Frege observa que as coisas se passam de modo bem diferente com o pensamento e as leis lógicas da verdade. Quer dizer, Frege quer ver as leis lógicas como leis do pensamento. Mas ele percebe claramente que o pensamento não precisa necessariamente ser guiado pelas leis da verdade — apesar de Frege acreditar que o pensamento deva sim fazer isso. Para piorar as coisas, Frege acha inconcebível a ideia de que possam existir leis (lógicas) diferentes para guiar o pensamento. E é assim que se chega ao nó na conversa entre Frege e o lógico-psicológico.

Como já foi dito, o nosso palpite é que Wittgenstein vê nas observações de Frege a ideia de que o pensamento guiado pelas leis lógicas é como um movimento que se apoia em algo que permanece no lugar — a primeira alavanca. E daí, fica fácil entender a dificuldade de Frege com a ideia de que as leis lógicas possam mudar. Porque você não pode remover o ponto de apoio no próprio movimento que é apoiado por esse ponto de apoio: “Se outras pessoas presumem reconhecer uma lei e duvidar dela no mesmo fôlego, isso me parece uma tentativa de saltar para fora da própria pele” (Frege 1893, XVII, nossa tradução).

Quer dizer, Frege sabe que o pensamento não precisa se apoiar nas leis lógicas da verdade. Mas ele pensa que ao não fazer isso nós incorremos em erro. E Wittgenstein não discorda disso. Mas ele localiza o erro em outro lugar. Não é que as leis (lógicas) do pensamento tenham um caráter eterno e incondicional. O pensamento e as suas leis são como ferramentas: elas são adequadas quando elas nos ajudam a fazer as coisas. E quando Wittgenstein vê as coisas desse modo, ele vislumbra um outro ponto de apoio que pode ser utilizado para modificar as leis do pensamento — a segunda alavanca.

Mas aqui as coisas se complicam. . .

Porque nós vimos há pouco que a segunda alavanca é ela própria um mecanismo de dupla alavanca. *E agora?*

Bom, agora é a hora de recapitular as coisas ainda mais uma vez. Quer dizer, Wittgenstein leva a análise para o domínio da atividade prática. E no contexto da atividade prática, é comum utilizar elementos da própria situação como ponto de apoio, para realizar a mudança que nós queremos. Eventualmente, nós podemos querer que os próprios pontos de apoio se modifiquem também, de acordo com o fluxo da nossa atividade. E aqui surge a ideia de que nós precisamos de regras para regular a mudança dos pontos de apoio.

Certo.

Quando a gente fala em ponto de apoio nesse contexto, isso se refere a algo do domínio objetivo da atividade prática. E aqui é conveniente pensar no ponto de

apoio como um instrumento ou uma ferramenta. Por outro lado, a ideia de regra que nós temos em mente é algo que pertence ao domínio do sujeito. Quer dizer, elas se referem à maneira como nós utilizamos as nossas ferramentas. Nesse sentido, as regras tem relação com a nossa vontade. Mas a nossa vontade pode mudar, e ainda assim nós podemos continuar usando as mesmas regras.

Frege pensa que as regras não podem mudar — essa é a sua rocha. Mas a questão é apenas que elas não precisam mudar. Quer dizer, as regras não estão amarradas diretamente ao mundo — elas pertencem ao domínio do sujeito. As regras apenas regulam a manipulação das nossas ferramentas (ou pontos de apoio). Daí que, no momento em que a nossa vontade muda, basta mudar a programação que a gente faz das regras — ou o uso que a gente faz das ferramentas. Mas as regras não precisam mudar.

Só que Wittgenstein gosta de brincar de mudar as regras. E é fazendo isso que ele percebe que as regras não estão amarradas diretamente ao mundo. Quer dizer, as regras estão amarradas às ferramentas. E as ferramentas se agarram aos objetos do mundo. Mas somos nós que escolhemos as ferramentas que vamos utilizar, somos nós que encaixamos as ferramentas nos objetos, e somos nós que fazemos a programação das regras que regula o uso das ferramentas.

Nesse sentido, as regras não tem uma semântica pré-definida — elas estão muito, muito longe do mundo. Mas essa semântica aparece no momento em que nós usamos as nossas ferramentas — por meio da programação que nós fazemos das regras. E se as coisas são assim, então nós podemos trocar um conjunto de regras por outro, e isso não precisa fazer a menor diferença.

Por outro lado, Wittgenstein também percebe que, independente de quais sejam as regras, o pensamento sempre opera tomando algum conjunto de regras como base (ou ponto de apoio). Essa é a técnica do pensamento — a rocha de Wittgenstein.

Mas não é que as regras estejam sempre lá.

Quer dizer, ao crescer e ser educado em uma sociedade, nós herdamos todo um monte de ferramentas e regras — e técnicas de programação. Mas às vezes acontece de a gente se encontrar em uma situação relativamente nova. Daí, por um certo tempo, nós nos sentimos confusos — e daí não acontece pensamento; ou pelo menos, nós não costumamos chamar isso de pensamento. Mas então, guiados pela nossa vontade e interagindo com os elementos da situação, nós vamos aos poucos transformando o domínio desconhecidos em um espaço de programação.

Não é que a partir de agora nós já sabemos exatamente o que fazer em qualquer situação. É só que a partir de agora nós já sabemos mais ou menos como as coisas funcionam. E diante de uma situação nova, com um pouquinho de experimentação, nós descobrimos como posicionar os nossos pontos de apoio, e conseguimos programar as regras para alcançar aquilo que nós queremos.

A análise de Turing mostra em detalhe como esse espaço de programação está

organizado. Quer dizer, ele opera como um mecanismo de dupla alavanca (*tic-tac, tic-tac, tic-tac, ...*). Turing mostra isso por meio da máquina de Turing. Mas na prática nós desenvolvemos toda uma grande coleção de cálculos (ou jogos de linguagem) para servir de apoio para o pensamento em situações diferentes.

Resumindo, portanto, e já chegando no fim, nós podemos dizer que a técnica do pensamento consiste na atividade de criação e uso (programação) de regras. E em meio a toda mudança (em nós e à nossa volta), é isso que Wittgenstein aponta como invariante. Quer dizer, não é que o pensamento tenha que ser assim para ser pensamento. Wittgenstein está apenas indicando como o pensamento humano funciona. Daí que, no final das contas, Wittgenstein está mesmo do lado do lógico-psicológico (*que coisa...*):

141. O que nós fornecemos, na realidade, são observações sobre a história natural do homem; no entanto, não são curiosidades, mas antes observações sobre fatos dos quais ninguém duvidava e que somente passaram despercebidos porque eles sempre estiveram diante dos nossos olhos.

131. As leis da lógica [...] mostram como seres humanos pensam e também o que seres humanos chamam de “pensar”.⁴³ (Wittgenstein 1967, p.43 e 41, nossa tradução)

E agora, nós podemos parafrasear Frege: “[...] permanece aberta a possibilidade de serem descobertos humanos ou outros seres capazes de realizar juízos contradizendo nossas leis da lógica”⁴⁴ (Frege 1893, XVI, nossa tradução). Mas se isso for o caso, então dificilmente nós conseguiríamos nos entender com esses ‘aliens lógicos’.

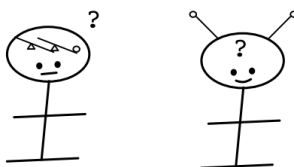


Figura 7: Alien lógico

Referências

- Frege, G. 1893. *Grundgesetze der Arithmetik*. Jena: Verlag von Hermann Pole.
- Wittgenstein, L. 1967 [1937-44]. *Bemerkungen Über die Grundlagen der Mathematik*. Cambridge, Massachusetts and London: The MIT Press.
- Wittgenstein, L. 2012 [1949-50]. *Da Certeza*. Tradução de Maria Elisa Costa. Lisboa: Edições 70.
- Wang, H. 2016. *From Mathematics to Philosophy*. New York: Routledge.

Notas

¹Grundgesetze der Arithmetik.

²Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik.

³Über Gewissheit.

⁴Wie aber, wenn sogar Wesen gefunden würden, deren Denkgesetze den unsern geradezu widersprüchen und also auch in der Anwendung vielfach zu entgegengesetzten Ergebnissen führten? Der psychologische Logiker könnte das nur einfach anerkennen und sagen bei denen gelten jene Gesetze, bei uns diese. Ich würde sagen: Da haben wir eine bisher unbekannte Art der Verrücktheit.

⁵“[...] die logischen Gesetze Richtschnuren für das Denken sein sollen zur Erreichung der Wahrheit [...]”

⁶Der Doppelsinn des Wortes „Gesetz“ ist hier verhängnisvoll. In dem einen Sinne besagt es, was ist, in dem andern schreibt es vor, was sein soll. Nur in diesem Sinne können die logischen Gesetze Denkgesetze genannt werden, indem sie festsetzen, wie gedacht werden soll.

⁷Aber das Wort „Denkgesetz“ verleitet zu der Meinung, diese Gesetze regierten in derselben Weise das Denken, wie die Naturgesetze die Vorgänge in der Außenwelt. Dann können sie nichts anderes als psychologische Gesetze sein; denn das Denken ist ein seelischer Vorgang.

⁸Ja, wenn es sich in der Logik um das Fürwahrhalten - werden handelte, und nicht vielmehr um das Wahrsein! [...] So wird denn schließlich die Wahrheit auf das Fürwahrhalten der Einzelnen zurückgeführt.

⁹“Dem gegenüber kann ich nur sagen: Wahrsein ist etwas anderes als Fürwahrhaltenwerden, sei es von Einem, sei es von Vielen, sei es von Allen, und ist in keiner Weise darauf zurückzuführen.”

¹⁰“[...] sind auch die Gesetze des Wahrseins nicht psychologische Gesetze, sondern Grenzsteine in einem ewigen Grunde befestigt, von unserm Denken überfluthbar zwar, doch nicht verrückbar.”

¹¹“Sie stehen nicht in dem Verhältnisse zum Denken, wie die grammatischen Gesetze zur Sprache, so dass sie das Wesen unseres menschlichen Denkens zum Ausdruck brächten und sich mit ihm änderten.”

¹²“Ganz anders ist natürlich die Auffassung der logischen Gesetze bei Herrn Erdmann. Dieser bezweifelt ihre unbedingte, ewige Geltung und will sie einschränken auf unser Denken, wie es jetzt ist.”

¹³“Danach bliebe die Möglichkeit offen, dass Menschen oder sonstige Wesen entdeckt würden, die unsern logischen Gesetzen widersprechende Urtheile vollziehen könnten. Wenn das nun geschähe?”

¹⁴“Herr Erdmann würde sagen: Da sehen wir, dass jene Grundsätze nicht überall gelten. [...] Bei denen gelten jene Gesetze, bei uns diese.”

¹⁵“Ich würde sagen: Da haben wir eine bisher unbekannte Art der Verrücktheit.”

¹⁶“Frege sagt im Vorwort der ‚Grundgesetze der Arithmetik‘: ‘... hier haben wir eine bisher unbekannte Art der Verrücktheit’— aber er hat nie angegeben, wie diese ‘Verrücktheit’ wirklich aussehen würde.”

¹⁷Frege nennt ‘ein Gesetz des menschlichen Fürwahrhaltens’: “Den Menschen ist es ... unmöglich, einen Gegenstand als von ihm selbst verschieden anzuerkennen.”¹ — Wenn ich

denke, daß mir das unmöglich ist, so denke ich, daß ich versuche, es zu tun. Ich schaue also auf meine Lampe und sage: "diese Lampe ist verschieden von ihr selbst." (Aber es rührt sich nichts.) Ich sehe nicht etwa, daß es falsch ist, sondern ich kann damit garnichts anfangen.

¹⁸Was geht da vor, wenn Einer versucht, eine Figur mit ihrem Spiegelbild durch Verschieben in der Ebene zur Deckung zu bringen und es ihm nicht gelingt?

[...]

Was geht vor, wenn Einer versucht, ein Gewicht aufzuheben und es ihm nicht gelingt, weil das Gewicht zu schwer ist?

[...] Worin zeigt sich die geometrische, logische Unmöglichkeit der ersten Aufgabe?

¹⁹Denk dir diese seltsame Möglichkeit: Wir hätten uns bisher immer in der Multiplikation 12×12 verrechnet. Ja, es ist unbegreiflich, wie das geschehen konnte, aber es ist geschehen. Also ist alles falsch, was man so ausgerechnet hat! — Aber was macht es? Es macht ja garnichts!

²⁰"Die logischen Gesetze sind allerdings der Ausdruck von 'Denkgewohnheiten' [...]."

²¹"Die Sätze der Logik sind 'Denkgesetze', [dann] Sie zeigen, was das Denken ist [...]."

²²"Wer unter logischen Gesetzen solche versteht [...] oder Gesetze des Wahrseins, nicht Naturgesetze des menschlichen Fürwahrhaltens, der wird fragen: wer hat Recht?"

²³"141. Was wir liefern, sind eigentlich Bemerkungen zur Naturgeschichte des Menschen [...]."

²⁴136. Denke, jemand würde so behext, daß er rechnete: Nun soll er seine Rechnung anwenden. Er nimmt viermal 3 Nüsse und noch 2, und verteilt sie unter 10 Leute; und jeder erhält eine Nuß: denn er teilt sie, den Bögen der Rechnung entsprechend, aus und so oft er Einem eine zweite Nuß gibt, ist sie verschwunden.

²⁵Es könnte praktisch sein, mit einem Maßstab zu messen, der die Eigenschaft hat, sich auf etwa die Hälfte seiner Länge zusammen zu ziehen, wenn er aus diesem Raum in jenen gebracht wird. Eine Eigenschaft, die ihn unter andern Verhältnissen zum Maßstab untauglich machen würde. Es könnte praktisch sein, beim Abzählen einer Menge, unter gewissen Umständen, Ziffern auszulassen; sie abzuzählen: 1, 2, 4, 5, 7, 8, 10.

²⁶Wir lehren jemand ein Haus errichten; dabei auch, wie er sich die genügenden Mengen von Material, etwa Brettern, anschaffen soll, hiezu eine Technik des Rechnens. Die Technik des Rechnens ist ein Teil der Technik des Hausbaues. Leute verhaufen und kaufen Scheitholz; die Stöße werden mit einem Maßstab gemessen, die Maßzahlen der Länge, Breite, Höhe multipliziert, und was dabei herauskommt, ist die Zahl der Groschen, die sie zu fordern und zu geben haben.

²⁷147. Jene Leute — würden wir sagen — verkaufen das Holz nach dem Kubikmaß aber haben sie darin recht? Wäre es nicht richtiger, es nach dem Gewicht zu verkaufen — oder nach der Arbeitszeit des Fällens [...]? Und warum sollten sie es nicht für einen Preis hergeben, der von alledem unabhängig ist: jeder Käufer zahlt ein und dasselbe, wieviel immer er nimmt (man hat etwa gefunden, daß man so leben kann). Und ist etwas dagegen zu sagen, daß man das Holz einfach verschenkt?

²⁸"148. Gut; aber wie, wenn sie das Holz in Stöße von beliebigen, verschiedenen Höhen schlichtesten und es dann zu einem Preis proportional der Grundfläche der Stöße verkauften? [...]"

²⁹"[...] Und wie, wenn sie dies sogar mit den Worten begründeten: 'Ja, wer mehr Holz kauft, muß auch mehr zahlen?'"

³⁰149. Wie könnte ich ihnen nun zeigen, daß — wie ich sagen würde — der nicht wirklich mehr Holz kauft, der einen Stoß von größerer Grundfläche kauft? — Ich würde z.B. einen, nach ihren Begriffen, kleinen Stoß nehmen und ihn durch Umlegen der Scheiter in einen ‘großen’ verwandeln. Das könnte sie überzeugen — vielleicht aber würden sie sagen: “ ja, jetzt ist es viel Holz und kostet mehr” — und damit wäre es Schluß.

³¹Wenn Andere es wagen, in einem Athem ein Gesetz anzuerkennen und es zu bezweifeln, so erscheint mir das als ein Versuch, aus der eignen Haut zu fahren, vor dem ich nur dringend warnen kann.

³²134. [...] muß also etwas falsch sein in unsrer Idee von Wahrheit und Falschheit der arithmetischen Sätze.

155. [...] Aber man zieht sie nicht darum nicht in Frage, weil sie ‘sicher der Wahrheit entsprechen’.[...] Es handelt sich hier garnicht um irgendeine Entsprechung des Gesagten mit der Realität [...].

³³“[...] sind auch die Gesetze des Wahrseins [...], sondern Grenz steine in einem ewigen Grunde befestigt, von unserm Denken überfluthbar zwar, doch nicht verrückbar.”

³⁴137. [...] Du schreitest in dem Beweis von Satz zu Satz; aber läßt du dir auch eine Kontrolle dafür gefallen, daß du richtig gegangen bist? — Oder sagst du bloß, “ Es muß stimmen” und mißt alles andere mit dem Satz, den du erhältst?

138. Denn, wenn es so ist, dann schreitest du nur von Bild zu Bild.

³⁵143. [...] Wir lehren freilich die Kinder das Einmaleins in Form von Sätzchen, aber ist das wesentlich? Warum sollten sie nicht einfach: rechnen lernen?, Und wenn sie es können, haben sie nicht Arithmetik gelernt?

144. Aber in welchem Verhältnis steht dann die Begründung eines Rechenvorgangs zu der Rechnung selbst?

145. “Ja, ich verstehe, daß dieser Satz aus diesem folgt.” — Verstehe ich, warum er folgt, oder verstehe ich nur, daß er folgt?

³⁶154. Wäre es möglich, daß Leute heute eine unsrer Berechnungsdurchgingen und von den Schlüssen befriedigt wären, morgen aber ganz andre Schlüsse ziehen wollen, und einen andern Tag wieder andere?

Ja, kann man sich nicht denken, daß dies mit einer Gesetzmäßigkeit so geschehe; daß, wenn er einmal diesen Übergang macht, er eben darum (etwa) das nächste Mal einen andern macht, und darum (etwa) das nächste Mal wieder den ersten?

³⁷155. Ist es nicht so: Solange man denkt, es kann nicht anders sein, zieht man logische Schlüsse. [...] Die Schritte, welche man nicht in Frage zieht, sind logische Schlüsse.”

³⁸“Die Schritte, welche man nicht in Frage zieht, sind logische Schlüsse. Aber man zieht sie nicht darum nicht in Frage, weil sie ‘sicher der Wahrheit entsprechen’— oder dergl.”

³⁹“solange *das und das gar nicht in Frage gezogen wird.*”

⁴⁰131. [...] man kann sagen, sie zeigten: wie Menschen denken [...].

133. Die Sätze der Logik [...] die Technik des Denkens zum Ausdruck bringen [...]. Sie zeigen, was das Denken ist [...].

⁴¹The resulting definition of the concept of mechanical [computation] by the sharp concept of “performable by a Turing machine” is both correct and unique. [...] Moreover it is absolutely impossible that anybody who understands the question and knows Turing’s definition should decide for a different concept.

⁴²Der Doppelsinn des Wortes „Gesetz“ ist hier verhängnisvoll. In dem einen Sinne besagt es, was ist, in dem andern schreibt es vor, was sein soll. [...] Aber das Wort „Denkgesetz“ verleitet zu der Meinung, diese Gesetze regierten in derselben Weise das Denken, wie die Naturgesetze die Vorgänge in der Aussenwelt.

⁴³141. Was wir liefern, sind eigentlich Bemerkungen zur Naturgeschichte des Menschen; aber nicht kuriose Beiträge, sondern Feststellungen von Fakten, an denen niemand gezweifelt hat, und die dem Bemerkwerden nur entgehen, weil sie sich ständig vor unsem Augen herumtreiben.

131. Die logischen Gesetze [...] zeigten: wie Menschen denken und auch, was Menschen “denken” nennen.

⁴⁴“[...] die Möglichkeit offen, dass Menschen oder sonstige Wesen entdeckt würden, die unsern logischen Gesetzen widersprechende Urtheile vollziehen könnten. Wenn das nun geschähe?”