PRINCIPIA **28**(4): 541–561 (2024) doi: 10.5007/1808-1711.2024.e93783
Published by NEL — Epistemology and Logic Research Group, Federal University of Santa Catarina (UFSC), Brazil.

La Carga Ontológica de las Matemáticas y el Realismo Científico

The Ontological Burden of Mathematics and Scientific Realism

Rafael Andrés Alemañ Berenguer
Universidad de Alicante, España
rafael.aleman@ua.es
https://orcid.org/0000-0002-3612-8167

Abstract. The mathematical representation of nature is so important in the scientific research of the world that some authors have defended the existence of an ontological burden in the mathematical formalism used by scientists. According to this view, the use of a certain formalism would entail an implicit commitment to the type of entities that the populate the material world. This paper will analyze (i) whether mathematics carries an unavoidable ontological burden in its application to physics, and (ii) whether this alleged ontological burden compromises in some way the metaphysical realism on which scientific activity is based. To do this, the applicability of mathematics to the physical world will be taken for granted and, based on the different examples presented throughout the text, it will be found that there are no reasons to hold such assumptions. Therefore, the non-existent ontological implications of mathematical formalism do not pose any threat to realistic metaphysics in any of its modalities, such as structural realism.

Keywords: ontology • realism • mathematical structure • theoretical representation

RECEIVED: 10/04/2023 REVISED: 29/12/2023 ACCEPTED: 22/05/2024

1. Introducción

La posible influencia de los formalismos matemáticos sobre el tipo de mundo que las teorías científicas nos permiten construir sigue alimentando un apasionante debate que probablemente tardará largo tiempo en extinguirse. Nadie discutiría hoy la abrumadora sucesión de triunfos logrados por la matematización de las ciencias naturales en la descripción de la realidad física. En un largo proceso que puede rastrearse hasta la Edad Media (Clagget 1959; Duhem 1988; Crombie 1990) o incluso antes (Bochner 1991; Sambursky 2009, 2011) la aplicación de las técnicas matemáticas al estudio de la naturaleza cosechó un éxito tan duradero que aun hoy día parece lejos de agotarse. Tan satisfactorios resultados no dejaron de suscitar preguntas de hondo calado filosófico, entre las que destacan la relación de las matemáticas con la experiencia y su asombrosa efectividad en la descripción del universo (Wigner 1960; Steiner 1998, 2005; Colyvan 2001a; Arezoo 2017).

Analizando la cuestión con el cuidado que merece encontramos una dificultad de principio en el lenguaje empleado. ¿Es realmente correcto decir que la naturaleza es matemática en el sentido de que los formalismos matemáticos son propiedades del mundo material en sí mismo? Tal vez resultaría mucho más prudente limitarnos a aceptar que el carácter matemático pertenece a nuestras afirmaciones sobre el universo, y no tanto al universo mismo. La pregunta adquiere entonces otra dimensión, pues habríamos de interrogarnos acto seguido por los motivos que hacen tan eficaz el uso de un lenguaje matemático para representarnos inteligiblemente los sucesos del cosmos.

Kant no hubiese dudado ni un instante en responder que los conceptos de la matemática surgen de las formas a priori de nuestra sensibilidad y por ello son ineludiblemente certeros. No es que en la creación del cosmos se haya recurrido a herramientas matemáticas, sino más bien que el entendimiento humano está ahormado de tal forma que no puede captarlo por otra vía. Desde esta perspectiva, si hay parcelas de la realidad ajenas al poder de las matemáticas nunca podremos saberlo, ya que nuestro conocimiento jamás franqueará las fronteras de lo matematizable (Kant 1989, p.30–31).

Quienes consideren la propuesta kantiana ampliamente superada por el paso del tiempo acaso sientan la tentación de sustituir las formas apriorísticas de la intuición por la selección natural darwiniana, trasladando la incógnita a un nuevo plano. Si la mente humana ha sido evolutivamente forjada partiendo de la materia inerte, de poco sirve decir que nuestras aptitudes matemáticas reflejan el carácter de las regularidades a las que se somete la materia de la cual provenimos. Simplemente estaríamos reformulando la misma pregunta en otros términos sin ofrecer respuesta: ¿por qué la selección natural se ha mostrado tan prodiga con la humanidad en cuanto a talento matemático y tan cicatera en otros aspectos?

Otras cuestiones no menos profundas e interesantes conciernen al estatuto ontológico de las matemáticas y, muy especialmente, sus repercusiones sobre la ontología subyacente a las teorías físicas dependientes de un cierto aparato matemático. ¿Cómo influyen nuestras opiniones acerca de la ontología de las entidades matemáticas sobre la ontología de los objetos físicos que representamos gracias a ellas? Si tal influencia existiese habríamos de plantearnos primero cuál es la propia ontología de los entes matemáticos, lo que no es una cuestión menor y ha alentado controversias que en buena parte aún perduran.

De acuerdo con las consideraciones precedentes, el objetivo de este trabajo es analizar la posibilidad de que el andamiaje matemático comporte una carga ontológica que influya, acaso insospechadamente, en nuestra indagación científica del mundo natural. Es decir, se examinará hasta qué punto es cierto que la elección de un formalismo matemático concreto nos impone aceptar la existencia de un tipo igualmente concreto de entidades en el mundo material que pretendemos representar mediante dicho formalismo. De ocurrir así cabe preguntarse cuál sería el contenido ontológico que irremediablemente nos aporta el uso de unos u otros utensilios matemáticos en nuestras teorías físicas.

Con ese fin, en las siguientes secciones abordaremos tres posibles interpretaciones de la presunta carga ontológica arrastrada por el utillaje matemático con el que los científicos operan. Si esa hipotética carga ontológica de las matemáticas sobre la física existe, ha de tener un origen —total o parcial— que no puede hallarse sino en la ontología de las propias matemáticas, razón por la cual comenzaremos en el epígrafe segundo con un breve recorrido histórico por las suposiciones ontológicas adoptadas con mayor frecuencia en la física y las matemáticas. En el epígrafe tercero contemplaremos la versión más radical del pitagorismo, a cuyo juicio toda estructura matemática debe realizarse de alguna forma en el mundo material.

Tras rechazar ese radicalismo pitagórico pasaremos en el cuarto apartado a una versión moderada en la que se sostiene que, si bien no toda idea matemática ha de manifestarse en la naturaleza, todo lo que podemos conocer científicamente sobre la realidad sí obedece alguna prescripción de tipo matemático. El supuesto de que la elección de un instrumental matemático concreto ancla nuestras teorías sobre determinadas clases de referencia se examinará en el quinto apartado. El epígrafe sexto considerará si las discusiones previas pueden minar nuestra confianza en el realismo como filosofía fundacional del trabajo científico, con especial atención a su influencia en el realismo estructural. Finalmente, el séptimo apartado presentará unas breves conclusiones que cerrarán este artículo.

2. Ontologías en la matemática y la física

La archifamosa observación de Galileo, según la cual la naturaleza está escrita en caracteres matemáticos, suele citarse como epítome del sustrato intelectual que alentó la Revolución Científica de los siglos XVI y XVII. En su tenor literal decía así (Galileo 1981[1623], p.62–63):

> [...]. La filosofía está escrita en ese grandísimo libro que tenemos abierto ante los ojos, quiero decir, el universo, pero no se puede entender si antes no se aprende a entender la lengua, a conocer los caracteres con que está escrito. Está escrito en lengua matemática y sus caracteres son triángulos, círculos y otras figuras geométricas, sin las cuales es imposible entender ni una palabra; sin ellos es como girar vanamente en un obscuro laberinto.

Semejante punto de visa, no obstante, disfrutaba ya de un rancio abolengo en el momento de ser recogido por el sabio de Pisa. En torno al siglo VI a.C. Pitágoras de Samos había proclamado que los números son el fundamento último de la realidad natural, iniciando una tradición que se prolonga hasta nuestros días en las excentricidades de algunos —pocos— idealistas. Platón desarrolló ciertos aspectos de las doctrinas pitagóricas para construir su propia filosofía, presidida por una radical escisión entre el mundo material y el ideal, donde el primero venía a ser una triste sombra proyectada por el segundo. El dualismo platónico dejó abierta la cuestión sobre el modo en que se relacionaban los entes ideales con los objetos materiales, interrogante que han mantenido sin resolver todas las versiones posteriores del idealismo.

El platonismo matemático pareció recibir un fuerte impulso durante el siglo XX en la estela del argumento de existencia debido a Willard Van Ornam Quine (1960, 1969), según el cual la cuantificación de objetos matemáticos resulta indispensable para la ciencia, ya sea en su faceta formal o fáctica. Ahora bien, si hemos de admitir como cierta esa cuantificación, de ello se deriva un compromiso ontológico con la veracidad de tales entidades matemáticas, cuya realidad debemos aceptar. Quine nunca llegó a formular específicamente esta tesis, que fue reproducida posteriormente por Hilary Putnam (1971), aun cuando este último nunca la respaldó plenamente (Colyvan 2001b; Deacock 2002; Liggins 2008; Sereni 2015; Molinini, Pataut y Sereni 2016; Bueno 2018).

La indispensabilidad de Quine, pese a su popularidad en determinados círculos matemáticos y filosóficos, pronto recibió contraataques nada desdeñables. Así se interpretó el trabajo del franco-estadounidense Paul Benacerraf (1965) en el que insistía, más que en los números en sí mismos, sobre la importancia de las estructuras que la aritmética involucraba. De este cambio de perspectiva surgió el llamado problema de identificación, en torno a la existencia de diversos candidatos —los ordinales de Zermelo y los de Von Neumann— para el tratamiento de los números naturales en términos de la teoría de conjuntos. Más adelante este mismo autor expuso el problema epistemológico (Benacerraf 1973), en virtud del cual una justificación de la verdad matemática podía ser coherente con una teoría semántica general o con una teoría epistemológica general, pero no con ambas a la vez.

El que posiblemente fuese el más recio embate contra el platonismo matemático llegó desde las filas de los ficcionistas, quienes se negaban a conceder a los entes matemáticos la misma realidad que a los objetos físicos (Field 1980, 1989; Burgess y Rosen 1997; Balaguer 1998; Yablo 2002; Bueno 2009; Leng 2009; Kasa 2010; Liggins 2010; Nutting 2020; Clarke-Doane 2022). El ficcionismo sostiene que los conceptos matemáticos se inventan, no se descubren, porque el descubrimiento propiamente dicho solo se da cuando operamos con sistemas materiales, que son los únicos existentes en este sentido. Los entes ideales de la matemática, así pues, no habitan un limbo ultramundano aprehensible intelectualmente, sino que existen tan solo formalmente como parte de la actividad mental (cerebral) de individuos concretos, en general capaces de comunicarse y compartir sus ideas. Estos individuos —prosiguen los ficcionistas— poseen facultades cognitivas suficientes para detectar los aspectos matematizables de las regularidades objetivas que rigen la naturaleza, lo que explicaría el rotundo éxito práctico de la ciencia moderna (Bunge 1974, 1977; Marquis 2006, 2011, 2012, 2018; Thomasson 1999; Thomas 2000, 2002). La razón de que el mundo resulte ser matematizable, al menos en parte, queda extramuros del ficcionismo.

El triunfo del método empírico-matemático que caracteriza la ciencia moderna, asimismo, nos invita a preguntarnos por la ontología de los sistemas materiales que tan solícitamente se prestan a la formalización abstracta en manos de los teóricos. Desde el dúo aristotélico sustancia-accidente hasta la pareja kantiana noúmeno-fenómeno, la tradición occidental ha mostrado una marcada tendencia a dividir la realidad en un escaparate más o menos vistoso (las apariencias) y una trastienda misteriosa (el propio ser). Que esta no es la única posibilidad a nuestro alcance lo demuestra el hecho de que, al menos desde Hume, se dispone de la teoría metafísica de los objetos como haces de propiedades. Desde este punto de vista, los objetos materiales se identifican con el entramado de sus propiedades, entendidas estas como los "modos de ser" de las cosas. No habría, pues, un sustrato al cual pudiésemos llegar en el límite —siquiera teóricamente— despojando a las cosas de todas sus propiedades (Lafrance 2015; Barker y Jago 2018; Robert 2019).

La combinación e interconexión entre esos modos de ser que llamamos propiedades proporciona algo más que una simple suma mereológica, dando lugar al complejo de propiedades y relaciones que llamamos "objeto" en su más amplia acepción. La objeción habitual consiste en señalar el problema del cambio: cuando se altera alguna de las propiedades que lo componen el haz cambia y, por tanto, ya no estaríamos hablando del mismo objeto. Este critica queda muy debilitada cuando se identifica el objeto físico con la serie cronológica de los haces de propiedades que lo constituyen en cada instante, de manera que el cambio queda incorporado en su misma entidad. En consecuencia, es la estructura de relaciones entre sus propiedades a través del tiempo lo que confiere a cada cosa su identidad particular. Y esa estructura parece ser susceptible de representarse matemáticamente, en tanto lo permitan los lenguajes formales que los seres humanos vamos construyendo.

3. El moderno pitagorismo y sus objeciones

Un primer significado que cabría asociar a la carga ontológica de las matemáticas nos devuelve al espíritu pitagórico, por el cual el fundamento último de la realidad es la matemática (Tegmark 2008; MacDonnell 2016; Baron 2024). Y ya que de ella todo surge, sería de algún modo más real que la propia materia. Algo así parece tener en mente el sueco-estadounidense Max Tegmark, defensor de la pluralidad cósmica bajo el nombre de "multiverso", un concepto confuso que suele manejarse con una soltura impropia de su intrínseca oscuridad. A juicio de Tegmark puede hablarse de universos múltiples en diversos sentidos, uno de ellos incluye la totalidad de estructuras matemáticas concebibles, aunque no las observemos como realidades físicas en nuestro universo. Constituye la clase más abstracta de posibles universos múltiples considerados por este autor y, por tanto, la menos intuitiva de todas.

Aunque no nos aventuremos en las profundidades de los universos paralelos, nos bastaría permanecer en el nuestro y suscribir un pitagorismo más refinado, afirmando que todas las ideas matemáticas autoconsistentes se realizarán de una manera u otra en el mundo físico, aunque todavía no las hallamos descubierto. De ser así no habría una carga ontológica de las matemáticas mayor que esta, como sugiere el descubrimiento de interpretaciones físicas insospechadas en la función ζ de Riemann (Bender, Brody y Müller 2017; Bourgade y Keating 2012) o el hallazgo de un algoritmo para el cálculo de en la configuración de niveles cuánticos del átomo de hidrógeno (Friedmann y Hagen 2015). Sin embargo, un examen más atento de la situación apunta justamente en la dirección contraria.

Un ejemplo bien conocido nos lo suministra el fermión de Majorana, una clase de partículas elementales estudiadas teóricamente a comienzos del siglo XX por el físico italiano Ettore Majorana, cuya existencia aún no ha sido constatada con absoluta seguridad. Este tipo de partículas se caracterizan por ser ellas mismas su propia antipartícula, como explica la detallada caracterización matemática debida a su autor (Pal 2011). Y, sin embargo, no parecen existir en la naturaleza; casi todas las partículas elementales conocidas incumplen la teoría de Majorana, si bien nadie sabe la razón de ello. La única excepción es el neutrino, cuya adscripción en este sentido sigue siendo objeto de polémica.

Un caso todavía más obvio de objeto físico inexistente, aunque matemáticamente bien definido, es el del monopolo magnético. Desde un punto de vista teórico, el descubrimiento de siquiera un único monopolo ayudaría a explicar por qué las cargas eléctricas se presentan cuantizadas —es decir, en cantidades discretas como múltiplos de una unidad fundamental— en el universo. No obstante, aun cuando el tratamiento matemático de los monopolos magnéticos resulta sólido y solvente (Dirac 1931; Malkus 1951; 't Hooft 1974; Drukier y Nussinov 1982; Cho y Maison 1997; Milton 2006), ningún indicio se ha manifestado hasta ahora que nos lleve a pensar en la existencia de un correlato real de semejante concepto.

A fin de aplicar todo el aparato matemático del cálculo infinitesimal resulta imprescindible no solo garantizar el carácter suave y diferenciable de nuestra variedad de base –en concreto, el espacio-tiempo físico– sino también que la estructura diferenciable sobre él definida sea única. De no ser así, no podríamos estar seguros de que las operaciones de integración o diferenciación proporcionan un resultado único, y por ello tampoco sabríamos si estamos comparando los experimentos con las cantidades numéricas oportunas.

Ahora bien, las variedades de cuatro dimensiones como nuestro espacio-tiempo, lejos de poseer una estructura diferencial unívoca, admiten una infinidad no numerable de ellas (Donaldson 1990; Donaldson & Kronheimer 1990). Las variedades de dimensión menor poseen siempre una única estructura diferenciable, mientras que las de dimensionalidad superior pueden clasificarse según sean, o no, diferenciables. La variedad 4-dimensional más simple, R^4, además de aceptar estructuras diferenciables atípicas puede poseer asimismo una cantidad infinita no numerable de estructuras diferenciables no equivalentes (Taubes 2000; Sładkowski 1996).

En la teoría cuántica de campos (especialmente cuando tratamos con extensiones de Yang-Mills, típicamente no abelianas, del Modelo Standard) suelen introducirse rutinariamente artificios de cálculo, llamados “fantasmas”, para garantizar la autoconsistencia de la teoría. Estos fantasmas cuánticos son estados no físicos que se incorporan al sistema pese a su carencia de sentido físico —algo que nadie les atribuye— por motivos puramente instrumentales (DeWitt 2003). Se trata de una suerte de andamiaje formal, una ficción útil, que permite conservar simetrías y restricciones convenientes para la coherencia interna de teorías tan ampliamente empleadas como las integrales de camino de Feynman. Estos “fantasmas” constituyen una prueba más de la prolijidad de herramientas ofrecidas por las matemáticas sin conexión directa con el mundo físico.

Una superfluidad matemática mucho menos advertida recibe el nombre de “libertad funcional” (Penrose 2017), en relación con la profusa diversidad de expresiones matemáticas con que podemos describir los mismos fenómenos naturales. Sin demasiado rigor cabría decir que, cuando el campo de una magnitud física toma sus valores en una cierta variedad V, entonces lo que llamamos una configuración del campo se identificaría con una sección del haz fibrado de V sobre el espacio-tiempo; en otras palabras, tendríamos una función que asocia valores de V con puntos del espacio-tiempo. La clave reside aquí en percatarse de que el espacio de funciones en V —configuraciones del campo— es una variedad de dimensión infinita (suponiendo el dominio local de dichas funciones compacto para evitar complicaciones mayores). Por ello, si los grados de libertad de un campo en un cierto punto se parametrizan mediante una variedad de dimensión infinita, V, entones los grados de libertad espacio-temporales habrían de parametrizarse también por medio de un espacio de funciones (una “cartografía” o *mapping*, en inglés) asimismo de dimensión infinita.

No siempre la dimensionalidad de V ha de ser infinita, de modo que podría escribirse V_N para indicar un número cualquiera N de dimensiones. Las reticencias al respecto de críticos como Penrose se deben en buena parte a los intentos de subsumir teorías dependientes de V_N en otras caracterizadas por $V_{N'}$ cuando usualmente $N \ll N'$. Por ello, la objeción de Penrose subraya que en tal caso el número inmensamente mayor —a veces, infinitamente mayor— de configuraciones de los campos que permitiría N' debería manifestarse de algún modo mucho más visible, hasta el punto de que, en ciertas condiciones, podrían convertir en físicamente incoherentes los modelos deducidos de las teorías ampliada. Si no sucede así habría de explicarse por qué, como sería —en su opinión— la situación típica de las supercuerdas en la actualidad.

Los ejemplos desgranados en los parágrafos anteriores, provengan del área de la física que se quiera, señalan en la misma dirección: el lenguaje matemático empleado para estudiar la naturaleza posee redundancias y anexos sin relación directa con el mundo real. Este hecho basta para refutar la posibilidad de que la carga ontológica de las matemáticas —si es que tal cosa existe— se deba a su capacidad para crear la realidad.

4. La naturaleza como libro matemático

Si descartamos la solución idealista que identifica las matemáticas con la raíz ontológica del mundo material, tal vez cabría recurrir a una versión suavizada de esta opinión extrema. Quizás no sea cierto que toda estructura matemática concebible —ya conocida o todavía por dilucidar— ha de realizarse en la naturaleza, aunque bien pudiera ser que todos los fenómenos del universo obedezcan alguna pauta matemática, presumiblemente al alcance del raciocinio humano. Expresado con otras palabras, este viene a ser el mensaje de la tan repetida observación de Galileo sobre el libro de la naturaleza, mencionada en la introducción.

Acaso no todos los conceptos matemáticos que habitan el limbo platónico tengan su correlato el mundo material, pero todos los procesos naturales existentes sí poseerían una contrapartida matemática en ese reino ideal. Este es un planteamiento paralelo al de la filosofía natural entendida como la búsqueda de una comprensión general de la naturaleza mediante la matemática como herramienta conceptual básica (Truesdell 1966, p.86–88):

> El primer objetivo de la filosofía natural es describir y estudiar los fenómenos naturales por medio de los conceptos matemáticos más ajustados. Los más ajustados no necesitan ser los más modernos, aunque puedan serlo; [...]. La segunda diferencia de método resulta más profunda. La mayoría de los científicos de la física consideran que el tratamiento matemático pertenece sólo a una etapa posterior en el desarrollo de una teoría. [...]. En la filosofía natural moderna, los conceptos físicos en sí mismos se hacen matemáticos desde el comienzo, y la matemática se usa para formular teorías.

Admítase o no, este parece haber sido el credo implícito que ha guiado a los modernos científicos y a buena parte de los antiguos filósofos en sus indagaciones sobre el cosmos. La propia palabra "cosmos" proviene del vocablo griego "orden" (κόσμος), en oposición al "desorden" o "caos" (Χάος); y dónde mayor perfección —cabría preguntarse— que en el orden matemático. Más allá de aquilatar significados, ahuyentar inconsistencias y cuantificar con exactitud, el empleo de la matemática en la investigación científica suele ejercer una irresistible fascinación en sus más devotos practicantes que —y de ahí la perplejidad— parece llevarlos casi siempre por el buen camino. No sucede invariablemente así, pero con una intrigante frecuencia el devenir de la naturaleza aparenta discurrir por senderos previamente embaldosados con ideas matemáticas cuya conexión con la física se intuía poco o nada.

Ptolomeo y sus seguidores pretendieron describir las trayectorias celestes mediante una abstrusa superposición de epiciclos y deferentes. Su modelo, tan longevo como fue, resultó superado por la moderna astronomía, si bien dos mil años después un gran matemático francés reivindicó en parte al astrónomo alejandrino (Bochener 1991). Gracias a las series de Fourier hoy sabemos que una adecuada combinación de funciones circulares —senos y cosenos— consigue reproducir cualquier curva cerrada con el grado de exactitud que se desee, lo que explica la relativa eficacia del método ptolemaico. Kepler fracasó en su empeño de ajustar las orbitas de los planetas visibles en su época a la belleza de los sólidos platónicos (Koyré 1966), aunque dio el primer paso en el descubrimiento de que las orbitas físicamente reales consisten en las curvas cónicas estudiadas milenios antes por el griego Apolonio.

Newton y Leibniz crearon el cálculo infinitesimal a la par con sus estudios matemáticos sobre el movimiento, estudios que culminaron con la obra de Euler y los geómetras del siglo XVIII, verdaderos artífices de la mecánica racional en su forma clásica. La fusión del análisis matemático con la geometría dio lugar a la geometría diferencial, hoy herramienta imprescindible en las teorías de campos y de medios continuos. Cuando el alemán Woldemar Voigt introdujo el concepto de tensor en el siglo XIX para lidiar con las tensiones en un sólido elástico no pudo imaginar que varias décadas después, en manos de Einstein, su creación se emplearía en alumbrar un nuevo concepto de la gravitación y una novedosa cosmología. Heisenberg redescubrió por sí mismo las reglas del cálculo de matrices mientras examinaba las transiciones energéticas en el primer modelo cuántico del átomo debido a Bohr, casi ochenta años después de que los matemáticos establecieran esa noción en su propio campo de trabajo.

Los ejemplos podrían multiplicarse, aunque si buscamos un alegato en favor de la indispensabilidad de las matemáticas en las ciencias naturales, pocos encontraremos tan poderosos como el ofrecido por el método de las simetrías gauge. Ensayado infructuosamente por Herman Weyl en 1918 para incorporar la gravedad y el electromagnetismo como propiedades del espacio-tiempo, pronto se constató que su verdadera utilidad residía en la entonces naciente física cuántica (Alemañ 2011, Capítulo 4). Cuando tomamos el ángulo de fase característico de las funciones de onda y lo sometemos a una modificación global, alterando su valor la misma cantidad en todos los puntos del espacio-tiempo, las ecuaciones dinámicas de la teoría permanecen invariantes. Esta simetría se pierde al relajar los requisitos del cambio de fase permitiendo que este se dé localmente, es decir, de manera distinta en cada punto espacio-temporal. Semejante proceder equivale a considerar ahora la fase como una variable de campo, debido a lo cual la invariancia de las ecuaciones solo se preservará introduciendo un nuevo campo que compense en cada lugar la variación arbitraria de la fase. Este nuevo campo, susceptible de cuantización, resulta ser el correspondiente a la interacción electromagnética.

Parecería que aquí nos enfrentamos con un caso evidente de determinación ontológica de una entidad física (por ejemplo, el campo electromagnético) por medio de un requisito formal (la simetría gauge). Una mirada más atenta nos revelará que las cosas no son exactamente así. El campo electromagnético, es cierto, se deduce de la simetría gauge cuando esta se impone para conservar la invariancia de las ecuaciones dinámicas de la teoría. Pero no es menos cierto que tal invariancia viene a dar un ropaje matemático a características del mundo físico, como la homogeneidad e isotropía del espacio-tiempo o la indistinguibilidad de algunos sistemas de referencia. Se trata de expresar formalmente una hipótesis concreta sobre el universo —que puede verificarse o no— resumida en la afirmación de que, si los procesos naturales pueden agruparse en ciertas clases de equivalencia, las ecuaciones que los gobiernan deben presentar determinadas simetrías que garantizan la igualdad de su armazón matemático en tales casos.

Con todo y ello, estamos muy lejos de poder asegurar que la realidad se halle por entero al alcance de nuestra capacidad de conocerla, como señala con agudeza Barrow (1997, p.98–99):

> Hemos distinguido entre operaciones que son computables y las que no lo son. Pero en la vida real, el ser computable quizá no sea muy útil si el programa que efectúa la computación requerida necesita un millón de años para llevarla a cabo. El mundo podría ser matemático, e incluso estar lleno de funciones computables, y aun así podría ser de una profundidad y complejidad tal que seamos incapaces de encontrarlas en nuestros ordenadores más rápidos incluso si estuvieran funcionando durante miles de años.

En este punto nos vemos ante una encrucijada: o bien admitimos simplemente como un hecho bruto que el universo material es así —dato que un temperamento religioso atribuiría a la voluntad divina— o bien recurrimos a una dudosa proliferación de universos ente los cuales el nuestro ha sido seleccionado por un no menos discutible postulado, como el célebre “principio antrópico”. Sea como fuere, las matemáticas no parecen imponer aquí ninguna restricción ontológica a la realidad física, salvo quizás el hecho de que sea comprensible para la mente humana, lo que más bien se diría un prerrequisito de cualquier investigación racional del mundo.

5. ¿Exige la matemática un compromiso ontológico?

La tercera posibilidad de dotar de significado a la noción de "carga ontológica" aplicada a las matemáticas proviene de la línea de pensamiento según la cual no existe una frontera nítida entre la estructura matemática de una teoría científica y su ontología, porque esta última se halla irremediablemente incorporada en aquella. Es decir, al escoger un cierto formalismo matemático estaríamos asumiendo a la vez, nos guste o no, un compromiso ontológico sobre los referentes de la teoría del que nadie puede eximirnos (Psillos 1995, 1999; Madrid 2010).

A fin de garantizar la claridad de los argumentos, convendría precisar primero qué entendemos aquí por ontología como término contrapuesto a la estructura matemática. Siguiendo a Bergliaffa, Vucetich y Romero (1993, p.12):

> [...] la ontología de la teoría es la restricción factual del conjunto formado por la unión de los dominios de todas las variables relacionadas con los cuantificadores lógicos que aparecen en la base axiomática de la teoría (por restricción factual entendemos una restricción del dominio de los subconjuntos formados por todos los elementos no conceptuales). En los axiomas, cuantificamos sobre los elementos de la base generativa o sobre los objetos conceptuales generados por ella. [...]. En nuestro sentido restringido, la ontología coincide con la clase de referencia de la teoría.

La clase de referencia de una teoría, en su más amplia acepción, puede estar formada por objetos conceptuales o materiales. En el primer caso tendríamos una teoría de la matemática pura y en el segundo una teoría física. Quienes abogan por la carga ontológica de las matemáticas no suelen detenerse en las consecuencias de aplicar esta noción a las propias matemáticas; tal vez porque inmediatamente se constata que no existe un lazo inextricable entre el formalismo teórico y su clase de referencia. Un emblemático ejemplo nos lo ofrece la mecánica matricial de Heisenberg, la cual típicamente reemplaza el álgebra de funciones sobre el espacio fásico de la mecánica clásica por un álgebra no conmutativa. Pero el álgebra no conmutativa, considerada como teoría general, puede aplicarse en muchas otras situaciones: el espacio de representaciones irreducibles de un grupo discreto, los espacios no simplemente conexos de un grupo fundamental no abeliano, el espacio de hojas en la foliación de una variedad, los grupos cuánticos (contrapartida cuántica de los grupos de Lie de la geometría diferencial clásica), etc. Todos estos casos constituyen aplicaciones concretas de una teoría —el álgebra no conmutativa— con mayor grado de abstracción.

Las conexiones geométricas tradicionales, de las que dimana el concepto de curvatura, ampliaron su alcance gracias a la noción de espacios fibrados (Darling 1994; Taubes 2011). Con estas herramientas fue posible establecer puentes entre teorías físicas basadas en la geometría diferencial y otras aparentemente alejadas de ellas, como la teoría gauge del electromagnetismo. En esta última, el potencial electromagnético equivaldría a la conexión y el propio campo de él deducido jugaría el papel de la curvatura en el pertinente espacio fibrado. Otro tipo de geometría, la llamada simpléctica, ha resultado ser una estructura básica tanto de la mecánica clásica como la física cuántica, revelando con ello su falta de compromiso con cualquier posible referente externo.

Concediendo esta libertad a la matemática con respecto a sí misma, ¿se impone algún compromiso ontológico sobre las teorías físicas que adoptan un cierto lenguaje matemático? La respuesta a esta pregunta dependerá críticamente de si se admite, o no, una nítida separación entre la estructura y la ontología de una teoría física, o mejor dicho, entre su base formal y su base de conceptos primitivos, los cuales se interpretan semánticamente a través de los axiomas de la teoría. En otras palabras, ¿la elección de una base formal concreta limita de algún modo la base conceptual, quizás restringiendo las hipótesis semánticas disponibles? De ser así, una misma estructura matemática no resultaría compatible con diferentes ontologías —clases de referencia— ya que se perdería la neutralidad ontológica del formalismo.

La historia de la física, e incluso su quehacer diario, desacredita rotundamente esta opinión. Ya en el siglo XIX los trabajos de Hamilton y Jacobi demostraron que las ecuaciones hamiltonianas constituían un formato tan inespecífico como para dar cuenta por igual de la mecánica clásica de partículas y de la óptica ondulatoria (Goldstein 1990). La función escalón de Heaviside evolucionó hacia la delta de Dirac hasta convertirse en un formalismo respetable mediante la teoría de distribuciones de Schwartz. Hoy en día estas funciones generalizadas se utilizan fructíferamente en multitud de áreas de la física y las matemáticas muy alejadas de su fuente original.

Especialmente desafortunado es el recurso a la dualidad onda-corpúsculo de De Broglie para sostener que el cambio en la interpretación de una teoría se debe principalmente a la alteración de su estructura matemática. En los primeros tiempos de la física cuántica no fue posible discernir que las partículas elementales clásicas debían reemplazarse por campos cuantizados dependientes del tiempo y caracterizados por números complejos. No cabe equipararlos a ondas elásticas o electromagnéticas (ya que la ecuación de Schroedinger no es de segundo orden en las derivadas respecto al espacio y al tiempo), por lo que resulta sumamente equivocado emplear la frase “mecánica ondulatoria”, como sigue siendo habitual hoy día (Alonso 1994).

Quienes rechazan la posibilidad de divorciar la estructura matemática de la ontología física —negando que se trate de dominios esencialmente independientes— suelen situar el eje de sus críticas en la dicotomía continuo-discontinuo, o en términos más propios de la ciencia natural, el antagonismo campo-partícula. La tesis de que el indeterminismo cuántico rompió el matrimonio entre la física y las ecuaciones diferenciales al introducir discontinuidades se ve desmentida por el hecho de que la ecuación de Schroedinger es una ecuación diferencial, sin olvidar que las ecuaciones de autovalores surgían en numerosas situaciones físicas —donde las discontinuidades se manejaban con asiduidad— mucho antes de la teoría cuántica.

Las ecuaciones diferenciales requieren un continuo matemático, no físico, al que aplicarse. Esto significa que para utilizarlas provechosamente basta suponer que el conjunto de elementos bajo estudio se comporta en algún aspecto como si constituyese un medio continuo, y con esa aproximación suelen obtenerse resultados excelentes. Por ejemplo, las ecuaciones de Lotka-Volterra para las dinámicas predador-presa pertenecen a la familia de las ecuaciones diferenciales de primer orden no lineales, pese a que todos sabemos que las poblaciones de animales en interacción no forman en absoluto un continuo matemático. Truesdell y Noll (1965, p.5) lo subrayaron muy adecuadamente en el siguiente fragmento, cuyas cursivas proceden del original:

> Amplio es el malentendido de que quienes formulan teorías del continuo creen que la materia "realmente es" continua, negando la existencia de moléculas. Esto no es así. La física del continuo *nada* presume concerniente a la estructura de la materia. Se confina de por sí a relaciones entre los fenómenos en bruto, dejando de lado la estructura de la materia a menores escalas. Si la aproximación del continuo se justifica, en algún caso particular, es un asunto, no para la filosofía o la metodología de la ciencia, sino para la *prueba experimental*. [...]

Es más, desde mediados del siglo XX se han venido probando teoremas según los cuales el planteamiento estadístico —que presupone una estructura discreta— y el continuo, aplicados a sistemas materiales, conducen al mismo comportamiento macroscópico. Para todo conjunto de partículas (iguales o diferentes entre sí, escasas o numerosas, libres o afectadas por cualesquiera fuerzas externas o internas de interacción), sometidas a cualquier distribución admisible de probabilidad, es posible definir magnitudes dinámicas, mediante promedios adecuados de las variables del espacio de fases, que satisfagan exactamente las ecuaciones de los medios continuos (Noll 1955; Dahler y Scriven 1963). No parece, por tanto, que el formalismo matemático porte carga ontológica alguna, toda vez que no se inclina por ninguna preferencia acerca de la continuidad o discontinuidad de sus referentes y sus resultados macroscópicos tampoco obligan a decidir entre tales alternativas.

Dicho brevemente, las matemáticas pueden definirse como el estudio y desarrollo de sistemas formales, cerrados para la operación lógica de deducción, pero que no son puramente sintácticos sino interpretables. Tal interpretación se da a través de su clase de referencia, la cual —a diferencia de las teorías físicas— está formada tan solo por artefactos conceptuales. Esas construcciones mentales elaboradas por seres humanos solo existen en el contexto de un determinado formalismo en el que se introducen. En consecuencia, las matemáticas carecen de contenido ontológico propio, pues sus referentes no pueden existir con independencia de la mente humana (Romero 2018).

6. El realismo científico reivindicado

El realismo, lejos de ser una opción metafísica más, se presenta como una precondición del conocimiento humano en general y del conocimiento científico en particular. Ningún científico cree seriamente que el mundo cuyas regularidades investiga sea un producto fantasmal de su propia conciencia, o que salga y entre de la existencia dependiendo de que alguien se digne a observarlo. La ciencia se ocupa de explorar y descubrir fenómenos existentes con anterioridad a nuestro conocimiento de ellos, que subsisten cuando no les dedicamos nuestra atención, lo cual constituye el nervio y la raíz del realismo filosófico (Bunge 2006).

Las numerosas variantes de esta doctrina propician otros tantos apellidos para ella: realismo estructural, epistémico, óntico, perspectivista, selectivo, etc. Todos estos matices concuerdan en la existencia de un mundo extramental independiente de nuestras percepciones del mismo, pero difieren en qué y cómo es susceptible de ser conocido. La línea de pensamiento predominante en la actualidad viene trazada por el realismo estructural, que sostiene la persistencia de las estructuras matemáticas subyacentes a los reemplazamientos teóricos que denominamos progreso científico. Si esas estructuras carecen de carga ontológica —como se ha argumentado en los epígrafes anteriores— no supone amenaza alguna para el realismo metafísico que dos teorías describan la misma realidad física con diferentes estructuras matemáticas isomorfas entre sí, tal cual nos muestran algunos ejemplos históricos. Al ser todos ellos ontológicamente neutrales, diferentes aparatos matemáticos pueden referirse a la misma realidad objetiva sin peligro de empujarnos a caer en el irrealismo.

Cuando una teoría científica hasta ese momento aceptada se ve sustituida por otra más acorde con los hechos, las estructuras matemáticas que conformaban el fuselaje de la teoría relegada se mantienen en las nuevas propuestas. En un célebre ejemplo, Worrall (1989, p.117) adujo que “Fresnel identificó de modo completamente erróneo la naturaleza de la luz, pero no es ningún milagro que su teoría disfrutase del éxito empírico predictivo que tuvo; [...], porque [...] atribuyó a la luz la estructura correcta”.

Así ocurre por la evidente independencia lógica entre el formalismo de la teoría, que delimita las estructuras conjeturadas para el proceso analizado, y la interpretación que fija la clase de referencia —o la “ontología”, si se prefiere decirlo así. No tiene cabida aquí la postura semirrealista de Chakravartty (1998), que aúna el realismo respecto a las estructuras con el antirrealismo acerca de los referentes. En efecto, no es posible aceptar la realidad de ciertas relaciones sin admitir también la realidad de aquellos individuos a los que se aplican. Por eso resulta tan contraproducente la defensa del estructuralismo óntico en el intento de sustituir la noción de objeto por la de estructura (French y Ladyman 2003). Un mundo solo de estructuras, sin objetos, se asemejaría al gato de Cheshire —creado por Lewis Carroll para su novela *Alicia* *en el País de las Maravillas*— cuya sonrisa permanece mientras su rostro se esfuma. Como perspicazmente advierte Van Fraassen (2007, p.55): "¿Tiene sentido concebir una estructura que no es estructura de algo? Una estructura de nada es nada".

La posición más razonable en este terreno reconoce que las estructuras matemáticas de nuestras teorías más poderosas reflejan de algún modo las pautas y regularidades objetivas que constituyen el modo de ser del mundo material. Las estructuras no son reales en el mismo sentido en que lo es el árbol con el que tropezamos al pasear distraídamente por el bosque. Somos nosotros quienes, con mayor o menor sagacidad, proyectamos sobre el universo las estructuras que nuestro intelecto elabora esperando que capturen y nos revelen alguna de sus intimidades. Los referentes de esas estructuras —los constituyentes últimos del cosmos, en las teorías fundamentales— solo nos son conocidos parcialmente, de manera que siempre queda abierta la posibilidad de modificaciones y enmiendas en los conceptos que sobre ellos hilvanamos.

Nuestra información sobre la naturaleza profunda de la realidad siempre resultará incompleta y precaria, lo que no implica en modo alguno que debamos renegar del realismo filosófico. Cada nuevo hallazgo podrá descubrir nuevas propiedades, o nuevas relaciones entre las ya registradas, de un objeto previamente conocido en otros aspectos. Esto no significa que cada vez sostengamos la existencia de objetos distintos a medida que nuestra comprensión aumenta, porque lo que se altera sucesivamente son los constructos intelectuales que ideamos para representarlo, no el objeto mismo.

Los fenómenos explicados mediante la óptica geométrica, siendo los mismos, adquieren una nueva consistencia gracias a la óptica ondulatoria, la cual a su vez se ve superada en amplitud y profundidad por la teoría cuántica de campos (aunque las integrales de caminos de Feynman o las técnicas de renormalización hayan de adquirir todavía una forma lógicamente cerrada). El caso de la teoría matricial de Heisenberg y la ondulatoria de Schroedinger, esgrimido a menudo como ejemplo en contra, aparece como uno de los mejores argumentos a favor de la independencia ontológica entre física y matemáticas.

Fue Heisenberg, y no su método matemático, el que acaso presuponía la existencia de partículas corpusculares, si bien renunció a cualquier imagen mental para centrarse en las frecuencias de transición entre los orbitales atómicos. Y fue Schroedinger —no la ecuación que lleva su nombre— quien deseaba reconducir la naciente teoría cuántica hacia la familiar física ondulatoria, pero fracasó demostrando con ello que su ecuación, libre de compromisos ontológicos, podía acomodar funciones muy distintas a las representativas de las ondas tradicionales. En última instancia, ambos comprendieron que los conceptos de onda y corpúsculo sólo constituían límites clásicos de un objeto físico tan radicalmente novedoso como el campo cuántico.

Es un grave error suponer que dos teorías matemáticamente equivalentes —esto es, con estructuras matemáticas isomorfas— que satisfacen por igual la evidencia empírica, han de compartir un mismo sustrato ontológico; véase el caso de las ecuaciones de fluidos y del campo electromagnético que, pese a su equivalencia matemática, nos remiten a referentes físicos muy distintos. Más bien debería decirse que las clases de referencia de ambas teorías están formadas por elementos algunas de cuyas propiedades —y relaciones entre tales propiedades— comparten ciertos aspectos de su descripción formal, tolerando por tanto las mismas estructuras matemáticas. La clave reside en que esa correspondencia no necesariamente es isomórfica, sino que podría darse como un homomorfismo (Bueno, French y Ladyman 2002), lo que expresa el carácter siempre parcial y revisable del vínculo entre nuestras teorías y el mundo real.

La formulación semántica representa las teorías como familias de modelos de la teoría de conjuntos porque se supone que de este modo es posible captar diversos rasgos de la práctica científica real que la concepción sintáctica (es decir, las teorías entendidas como conjuntos de enunciados) deja escapar. Para conseguir su objetivo, la perspectiva semántica se ha extendido a través de la noción de estructuras parciales (Bueno 1997, 1999; French y Ladyman 1997, 1998, 1999) y la de homomorfismo parcial (Bueno y French 2011; French 20000; Lutz 2019). Mediante este procedimiento se pretende dar cuenta de la estructura extra que los formalismos matemáticos arrastran consigo cuando se aplican al mundo material, tanto como de la apertura y fertilidad —en múltiples direcciones de posible desarrollo— de estas estructuras matemáticas. Este peculiar vínculo entre teorías físicas y matemáticas podría expresarse mejor en términos de una aplicación parcial de un dominio al otro por medio de un homomorfismo también parcial entre las estructuras correspondientes, lo que dependerá de cada caso.

Por consiguiente, es otro serio malentendido exigir isomorfismos para considerar legítima las inferencias realistas sobre la naturaleza a partir de las estructuras teóricas. Nos basta con las posibilidades deductivas que conecten la teoría con el universo material, y no al revés, porque el camino contrario encierra una demanda imposible: si somos nosotros los que proyectamos las estructuras que inventamos sobre la naturaleza, tan solo cabe espera que el puente entre ambos dominios se transite con facilidad en un único sentido.

7. Conclusiones

El presente trabajo ha indagado en la posibilidad de que la elección de estructuras matemáticas específicas para nuestras teorías físicas conlleve una serie de compromisos ontológicos sobre el mundo que tales teorías aspiran a representar. Y la respuesta ha sido abiertamente contraria: las matemáticas de por sí no aportan contenido ontológico alguno a las teorías físicas que las emplean, es decir, no obligan a especificar unívocamente el tipo de objetos materiales a los que se aplican. Para llegar a esa conclusión se han examinado tres posibles interpretaciones de la afirmación según la cual las matemáticas comportan una carga ontológica que necesariamente orienta en determinada dirección la ontología con que equipamos cada teoría física.

La experiencia histórica acumulada y un somero análisis del conocimiento adquirido nos lleva a rechazar el platonismo extremo de quienes sostienen que todas las ideas matemáticas autoconsistentes han de realizarse en la naturaleza. Tampoco parece justificarse la metáfora galileana que equipara el mundo material con un libro escrito en lenguaje matemático. La naturaleza no es un texto, cualquiera que sea el lenguaje empleado para describirlo, y lo genuinamente matemático es el esfuerzo humano por describirlo y comprenderlo de la forma más abarcadora posible.

La tercera posibilidad sugiere que las herramientas matemáticas utilizadas en las teorías físicas comportan un cierto compromiso ontológico sobre la clase de entidades cuya existencia tales teorías presuponen. Sin embargo, el examen de la cuestión conduce indefectiblemente a un veredicto desfavorable. Las matemáticas no comportan compromiso ontológico alguno cuando se recurre a ellas como armazón básico de nuestro conocimiento del mundo. Son las hipótesis semánticas incluidas en la base axiomática de una teoría las que marcan su conexión con el universo material especificando los referentes físicos de dicha teoría. No existe un vínculo ineludible entre la dimensión semántica de una teoría física y el formalismo matemático en la que esta se expresa.

Esta libertad proporcionada por la falta de compromiso ontológico de los métodos matemáticos no acarrea el menor problema al realismo como presupuesto metafísico del conocimiento científico. Los objetos físicos existen con independencia de nuestras limitaciones para conocerlos, sin que podamos exigir de nuestras representaciones teóricas más de lo que resulta lógicamente posible esperar de ellas. Nuestras mejores teorías matemáticas sobre el mundo físico nunca serán completas, perfectas y definitivas, sin que por ello debamos abstenernos de inferir aquello que esas mismas teorías nos permitan, pese a sus inevitables carencias. La infradeterminación teórica de la realidad física, por la cual siempre será lógicamente posible desarrollar más de una teoría para explicar el mismo conjunto de hechos, acompañará siempre el quehacer científico sin que una ilusoria carga ontológica de nuestro repertorio matemático alivie lo que en definitiva constituye un ingrediente consustancial del conocimiento humano.

Referencias

Alemañ, R. 2011. *El desafío de Einstein, vol. I: En busca de la unificación*. Moscú: Editorial URSS.

Alonso, M. 1994. La dualidad onda-partícula: ¿Misterio o mito?. *Revista Española de Física* 8(1): 38–41.

Arezoo I. 2017. A match not made in heaven: on the applicability of mathematics in physics. *Synthese* 194(12): 4839–4861.

Balaguer, M. 1998. *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. New York: Oxford University Press.

Barker, S.; Jago, M. 2018. Material objects and essential bundle theory. *Philosophical Studies* 175: 2969–2986.

Baron, S. 2024. Mathematical Explanation: A Pythagorean Proposal. *British Journal for the Philosophy of Science* 75(3): 663–685. DOI: 10.1086/716181.

Barrow, J. 1997. *¿Por qué es el mundo matemático?*. Barcelona: Grijalbo.

Benacerraf, P. 1965. What Numbers Could Not Be. *The Philosophical Review* 74(1): 47–73.

Benacerraf, P. 1973. Mathematical Truth. *The Journal of Philosophy* 70: 661–679.

Bender, C.; Brody, D.; M'uller, M. 2017. Hamiltonian for the Zeros of the Riemann Zeta Function. *Phys. Rev. Lett.* 118: 130201.

Bergliaffa, S.; Vucetich, H.; Romero. G. 1993. Axiomatic Foundations of Nonrelativistic Quantum Mechanics: A Realistic Approach. *Int. J. Theor. Phys.* 32(9): 1507.

Bochner, S. 1991. El papel de la matemática en el desarrollo de la ciencia. Madrid: Alianza.

Bourgade, P.; Keating, J. 2012. Quantum Chaos, Random Matrix Theory, and the Riemann ζ-function. *Progress in Mathematical Physics* 66. DOI: 10.1007/978-3-0348-0697-8_4.

Bunge, M. 1974. *Treatise on Basic Philosophy. Vol. 1. Semantics I: Sense and Reference*. Dordrecht: Reidel.

Bunge, M. 1977. *Treatise on Basic Philosophy. Vol. 3. Ontology I: The Furniture of the World*. Dordrecht: Reidel.

Bunge, M. 2006. *Chasing Reality: Strife over Realism*. Toronto: University of Toronto Press.

Burgess, J.; Rosen, G. 1997. *A Subject with No Object*. Oxford: Oxford University Press.

Bueno, O. 1997. Empirical Adequacy: A Partial Structures Approach. *Studies in History and Philosophy of Science* 28: 585–610.

Bueno, O. 1999. What is Structural Empiricism? Scientific Change in an Empiricist Setting. *Erkenntnis* 50: 59–85.

Bueno, O. 2009. Mathematical Fictionalism. In O. Bueno; Ø. Linnebo (ed.), *New Waves in Philosophy of Mathematics*, p.59–79. London: Palgrave Macmillan

Bueno, O. 2018. Putnam's indispensability argument revisited, reassessed, revived. *Theoria* 33(2): 201–218.

Bueno, O.; French, S. 2011. How Theories Represent. *British Journal for the Philosophy of Science* 62(4): 857–894

Bueno, O.; French, S.; Ladyman, J. 2002. On representing the relationship between the mathematical and the empirical. *Philosophy of Science* 69(3): 497–518.

Cho, Y.; Maison, D. 1997. Monopole configuration in Weinberg–Salam model. *Phys. Lett. B* 391: 360–365.

Claggett, M. 1959. Science of Mechanics in the Middle Ages. Madison: University of Wisconsin Press.

Clarke-Doane, J. 2022. Mathematics and Metaphilosophy. Cambridge: Cambridge University Press.

Colyvan, M. 2001a. The Miracle of Applied Mathematics. *Synthese* 127(3): 265–278.

Colyvan, M. 2001b. *The Indispensability of Mathematics*. New York: Oxford University Press.

Crombie, A.C. 1990. *Science, Optics and Music in Medieval and Early Modern Thought*. London: Hambledon & London Ltd.

Dahler, H.S.; Scriven, L.E. 1963. Theory of Structured Continua. *Proc. Roy. Soc. Lond. A* 275: 505–527.

Darling, R. 1994. *Differential Forms and Connections*. Cambridge: Cambridge University Press.

Decock, L. 2002. Quine's Weak and Strong Indispensability Argument. *Journal for General Philosophy of Science* 33(2): 231–250.

DeWitt, B. 2003. *The Global Approach to Quantum Field Theory. Vols. I – II*. New York: Oxford University Press.

Dirac, P. A. M. 1931. Quantised singularities in the electromagnetic field. *Proc. R. Soc. London A* 133: 60–72.

Donaldson, S. 1990. Polynomial invariants for smooth four-manifolds. *Topology* 29: 257–315.

Donaldson, S.; Kronheimer, P. 1990. *The geometry of four-manifolds*. Oxford: Clarendon Press.

Drukier, A. K.; Nussinov, S. 1982. Monopole pair creation in energetic collisions: is it possible?. *Phys. Rev. Lett.* 49: 102–105.

Duhem, P. 1988. *Le système du monde: Histoire des doctrines cosmologiques de Platon à Copernic*. Paris: Hermann.

Field, H. 1980. *Science without Numbers*. Princeton: Princeton University Press.

Field, H. 1989. Realism, Mathematics, and Modality. *Philosophical Topics* 16(1): 57–107.

French, S. 1998. A Semantic Perspective on Idealisation in Quantum Mechanics. In N. Shanks (ed.), *Idealization VIII: Idealization in Contemporary Physics*, p.51–73. Amsterdam: Rodopi.

French, S. 1999. Reinflating the Semantic Approach. *International Studies in the Philosophy of Science* 13: 99–117.

French, S. 2000. The Reasonable Effectiveness of Mathematics: Partial Structures and the Application of Group Theory to Physics. *Synthese* 125(1–2): 103–120.

French, S.; Ladyman, J. 1997. Superconductivity and Structures: Revisiting the London Account. *Studies in History and Philosophy of Modern Physics* 28: 363–393.

French, S.; Ladyman, J. 2003. Remodelling Structural Realism: Quantum Physics and the Metaphysics of Structure. *Synthese* 136: 31–56.

Friedmann, T.; Hagen, C. 2015. Quantum mechanical derivation of the Wallis formula for π. *J. Math. Phys.* 56: 112101.

Galileo. 1981 [1623]. *El Ensayador*. Buenos Aires: Aguilar.

Goldstein, H. 1990. Mecánica cláásica. Barcelona: Reverté. Kasa, I. 2010. On Field's Epistemological Argument against Platonism. *Studia Logica* 96(2): 141–47.

Kant, I. 1989 [1786]. *Principios metafísicos de la ciencia de la naturaleza*. Madrid: Alianza.

Koyré, A. 1966. *Études Galiléennes*. Paris: Hermann.

Lafrance, J.D. 2015. A bundle of universals theory of material objects. *The Philosophical Quarterly* 65(259): 202–219.

Leng, M. 2009. *Mathematics and Reality*. Oxford: Oxford University Press.

Liggins, D. 2008. Quine, Putnam, and the 'Quine–Putnam' Indispensability Argument. *Erkenntnis* 68(1): 113–127.

Liggins, D. 2010. Epistemological Objections to Platonism. *Philosophy Compass* 5(1): 67–77.

Lutz, S. 2019. Generalizing empirical adequacy II: partial structures. *Synthese* 198: 1351–1380.
MacDonnell, J. 2016. *The Pythagorean World. Why Mathematics is Unreasonably Effective in Physics*. New York: Palgrave Macmillan.
Madrid, C. 2010. Sr. realista estructural, tenemos un problema: La carga ontológica de las matemáticas. *Principia* 14(2): 201–209.
Malkus, W. V. R. 1951. The interaction of the Dirac magnetic monopole with matter. *Phys. Rev.* 83: 899–905.
Marquis, J.-P. 1997. Abstract Mathematical Tools and Machines for Mathematics. *Philosophia Mathematica* 5(3): 250–272.
Marquis, J.-P. 2006. A Path to the Epistemology of Mathematics: Homotopy Theory. In J. Gray; J. Ferreiros (ed.), *The Architecture of Modern Mathematics*, p.239–260. Oxford: Oxford University Press.
Marquis, J.-P. 2011. Mario Bunge's Philosophy of Mathematics: An Appraisal. *Science & Education* 21(10): 1567–1594.
Marquis, J.-P. 2012. Categorical Foundations of Mathematics: or how to provide foundations for abstract mathematics. *The Review of Symbolic Logic* 6(1): 51–75.
Marquis, J.-P. 2018. Unfolding FOLDS: A Foundational Framework for Abstract Mathematical Concepts. In E. Landry (ed.), *Categories for the Working Philosopher*, p.136–162. New York: Oxford University Press.
Milton, K.A. 2006. Theoretical and experimental status of magnetic monopoles. *Rep. Prog. Phys.* 69: 1637–1711.
Molinini, D.; Pataut, F.; Sereni, A. 2016. Indispensability and explanation: an overview and introduction. *Synthese* 193(2): 317–332.
Noll, W. 1955. Die Herleitung der Grundgleichungen der Thermomechanik der Kontinua aus der statistischen Mechanik. *Journal of Rational Mechanics and Analysis* 4: 627–646.
Nutting, E. S. 2020. Benacerraf, Field, and the Agreement of Mathematicians. *Synthese* 197(5): 2095–110.
Pal, P. B. 2011. Dirac, Majorana, and Weyl fermions. *American Journal of Physics* 79(5): 485–498.
Penrose, R. 2017. *Moda, fe y fantasía en la nueva física del universo*. Madrid: Debate.
Psillos, S. 1995. Is structural realism the best of both worlds?. *Dialectica* 49: 15–46.
Psillos, S. 1999. *Scientific Realism: How Science Tracks Truth*. Londres: Routledge.
Putnam, H. 1971. *Philosophy of Logic*. New York: Harper & Row.
Quine, W. V. O. 1960. *Word and Object*. Cambridge, MA: MIT Press
Quine, W. V. O. 1969. Existence and Quantification. In *Ontological Relativity and Other Essays*, p.91–113. New York: Columbia University Press.
Robert, G. 2019. Can the Realist Bundle Theory Account for the Numerical Difference Between Qualitatively Non-Discernible Concrete Particulars?. *Teorema: Revista Internacional de Filosofía* 38(1): 25–40.
Romero, G. 2018. *Scientific Philosophy*. New York: Springer.
Sambursky, S. 2009. *El mundo físico a finales de la antigüedad*. Madrid: Alianza Universidad.
Sambursky, S. 2011. *El mundo físico de los griegos*. Madrid: Alianza Universidad.
Sereni, A. 2015. Frege, Indispensability, and the Compatibilist Heresy. *Philosophia Mathematica* 23(1): 11–30.

Sładkowski, J. 1996. Exotic smoothness, noncommutative geometry, and particle physics. *International Journal of Theoretical Physics* 35(10): 2075–2083.

Smolin, L. 2016. *Las dudas de la física en el siglo XXI*. Barcelona: Crítica.

Steiner, M. 1998. *The Applicability of Mathematics as a Philosophical Problem*. Cambridge, MA: Harvard University Press

Steiner, M. 2005. Mathematics – Application and Applicability. In S. Shapiro (ed.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, p.625–650. Oxford: Oxford University Press.

Taubes, C. 2000. *Seiberg-Witten and Gromov invariants for symplectic fourmanifolds*. Somerville: International Press.

Taubes, C. 2011. *Differential geometry: Bundles, connections, metrics and curvature*. Oxford: Oxford University Press.

Tegmark, M. 2008. The Mathematical Universe. *Foundations of Physics* 38(2): 101–150

Thomas, R. 2000. Mathematics and Fictions I: Identification. *Logique et Analyse* 43(171–172): 301–340.

Thomas, R. 2002. Mathematics and Fictions II: Analogy. *Logique et Analyse* 45(177–178): 185–228.

Thomasson, A. 1999. *Fiction and Metaphysics*. Cambridge: Cambridge University Press.

’t Hooft, G. 1974. Magnetic monopoles in unified gauge theories. *Nucl. Phys. B* 79: 276–284.

Truesdell, C. 1966. *Six Lectures on Modern Natural Philosophy*. New York: Springer.

Truesdell, C.; Noll, W. 1965. *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. New York: Springer.

Van Fraassen, B. 2007. Structuralism(s) about Science: Some Common Problems. *Proc. Arist. Soc.* 81: 45–61.

Wigner, E. P. 1960. The unreasonable effectiveness of mathematics in the natural sciences. *Communications on Pure and Applied Mathematics* 13(1): 1–14.

Worrall, J. 1989. Structural Realism: The Best of Both Worlds?. *Dialectica* 43: 99–124.

Yablo, S. 2002. Go figure: A path through Fictionalism. *Midwest Studies in Philosophy* 25: 72–102.