Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O CONCEITO DE LIMITE SEGUNDO GODFREY HAROLD HARDY (1908) E ELON LAGES LIMA (1976)

The Concept Of Limit According To Godfrey Harold Hardy (1908) And Elon Lages Lima (1976)

Circe Mary Silva da SILVA
Universidade de Bielefeld, Bielefeld, Alemanha
cmdynnikov@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-4828-8029

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Esta investigação, inserida no campo da História da Educação Matemática, pretende responder à seguinte pergunta investigativa: como Hardy e Lima abordaram o conceito de limite em seus respectivos livros: *Um curso de matemática pura,* de 1908, e *Curso de Análise,* de 1967? A pesquisa é de cunho descritivo e analítico, revela o que cada autor apresentou sobre o conceito de limite e identifica a abordagem didática de ambos. À luz da teoria dos três mundos de Tall (2013), analisei a abordagem de cada autor, procurando identificar em que mundo conceitual cada um se insere: mundo corporificado (intuitivo); simbólico; formalizado, ou alguma mescla deles. Constatei que a abordagem de Hardy é uma mescla entre o mundo corporificado e simbólico-formalizado, enquanto Lima insere-se no mundo formalizado.

Palavras-chave: História da Matemática, Cálculo Diferencial, David Tall, Ensino da Matemática

ABSTRACT

This investigation, inserted in the field of History of Mathematics Education, aims to answer the following investigative question: how did Hardy and Lima approach the concept of limit in their respective books: A course of pure mathematics, from 1908, and Course of Analysis, from 1967? The research is descriptive and analytical in nature, revealing what each author presented about the concept of limit and identifying the didactic approach of both. In light of Tall's theory of the three worlds (2013), I analyzed each author's approach, trying to identify which conceptual world each one fits into: embodied (intuitive) world; symbolic; formalized, or some mixture of them. I found that Hardy's approach is a mix between the embodied and symbolic-formalized world, while Lima is inserted in the formalized world.

Keywords: History of Mathematics, Differential Calculus, David Tall, Teaching Mathematics

1. MOTIVAÇÃO E CAMINHO DA PESQUISA

> Entre todos os conceitos que se apresentam no cálculo infinitesimal, o de limite é, sem dúvida, o mais importante, e talvez também o mais difícil (Spivak, 1996, p. 107)

Uma boa dose de honestidade transparece na epígrafe acima: o conceito de limite, embora fundamental para o Cálculo, segundo Spivak, é **difícil**. Autores de livros didáticos de Cálculo, ao abordar o conceito de limite, parecem não levar em consideração o desafio que é a compreensão desse conceito para muitos alunos. Spivak (1996), na introdução do capítulo 5 de seu livro de *Cálculo*, com primeira edição em 1967, chamou a atenção para este fato. Tall (2013, p.149) compartilha dessa visão quando diz que a ideia de uma quantidade tornar-se arbitrariamente pequena foi complicada historicamente e continua a ser problemática para os iniciantes pois “[...] imaginam o processo de uma sequência de números tendendo a zero, dando um limite que é quase zero, mas não completamente”. Tall (2013) realizou, em parceria com outros pesquisadores, investigações para compreender como os estudantes tentam dar sentido ao conceito de limite na análise matemática.

A motivação para investigar a abordagem do conceito de limite segundo Hardy surgiu quando eu pesquisava sobre a história do simbolismo matemático para este conceito. No livro *História das Notações,* de Cajori (1993), encontrei a referência ao nome de Hardy. Li seu livro *Um curso de matemática pura,* de 2011, uma reimpressão da edição comemorativa ao centenário da obra. A surpreendente abordagem de Hardy e as dificuldades dos iniciantes na compreensão do conceito de limite, instigaram-me a procurar um matemático brasileiro de sucesso que tivesse escrito amplamente sobre esse conceito, a fim de tentar uma comparação de abordagens. Na entrevista que realizei com o professor Elon Lages Lima, em 1998, ele citou o livro de Hardy como exemplo de um bom livro didático (Silva, 2002). Posteriormente, constatei que este matemático integra a lista de referências de Lima (1976). Essas duas razões que me conduziram, naturalmente, a escolher Lima, como o autor brasileiro que eu procurava. Os livros de Hardy e Lima, cujas publicações foram feitas com quase duas décadas de diferença, são amplamente utilizadas no ensino, com muitas edições e reedições; são, portanto, livros de sucesso.

A presente investigação insere-se no campo da História da Educação Matemática, no qual os livros escolares desempenham significativo papel. O livro didático exerce múltiplas funções, coexiste com outros materiais didáticos e envolve, na sua produção e divulgação, uma diversidade de agentes. Entre as quatro funções exercidas pelo livro didático, segundo Choppin (2004), está a função referencial ou curricular – aquela que serve como suporte aos conteúdos educativos. Nesse sentido, os livros de Hardy e Lima são obras em que a função referencial é a função precípua, uma vez que são livros escritos para o ensino de Cálculo Diferencial e Integral ou Análise Matemática em cursos universitários. Esta pesquisa é de cunho descritivo e analítico, revelando o que cada autor apresentou sobre o conceito de limite, mas não se limita a isso: procura, principalmente, identificar a apresentação didática por eles seguida. À luz da teoria dos três mundos de Tall (2013), a abordagem de cada autor foi analisada, procurando identificar em que mundo conceitual cada uma predominantemente se insere: mundo corporificado (intuitivo); simbólico; formalizado, ou alguma mescla deles.

Motivada pelas razões expostas, escolhi o conceito matemático de limite para análise. A tese de doutorado de Cornu, em 1983, abordou a aprendizagem da noção de limite. Cornu (1991, p. 153) manifestou-se a respeito do conceito de limite, dizendo o seguinte:

> [...] é uma noção particularmente difícil, típica do tipo de pensamento exigido na matemática avançada. Ocupa uma posição central que permeia toda a análise matemática - como fundamento da teoria da aproximação, da continuidade e do cálculo diferencial e integral.

A importância desse conceito reflete-se nas pesquisas já realizadas e divulgadas por experientes pesquisadores. Cotrill et al (1996, p. 167) afirmam que "o conceito de limite apresenta grandes dificuldades para a maioria dos alunos e eles têm muito pouco sucesso na compreensão desta importante ideia matemática". Na mesma linha de pensamento, Katz e Tall (2015, p.7) afirmam que pesquisas realizadas revelam que:

> Embora os matemáticos possam aprender a usar sua abordagem formal com grande sucesso, a transição da matemática intuitiva, cheia de ideias imaginativas, para a matemática formal, baseada em definições e dedução passo a passo apresenta dificuldades significativas para muitos alunos.

A tese de Domingos (2003), ao tratar de conceitos matemáticos avançados, aborda a aprendizagem do conceito de limite. O autor concluiu que a aprendizagem de limite não é fácil porque, mesmo antes deste conceito ser introduzido, os alunos já têm certas ideias, intuições e imagens proporcionadas por sua experiência diária.

Insucessos e dificuldades na aprendizagem, obstáculos e desafios para o ensino, são algumas constatações que matemáticos, historiadores, psicólogos, pesquisadores relatam sobre o conceito de limite. Os livros didáticos, em geral, como diz Cornu (1991) dedicam um capítulo ao conceito geral de limite, incluindo uma definição formal, uma declaração de sua unicidade e teoremas sobre operações aritméticas aplicadas aos limites. Os exercícios voltam-se mais para as operações com limites. Seria isso suficiente?

O livro didático tem a autoridade da palavra impressa, essa é uma das características de um livro, mas, no caso, dos dois autores analisados, essa autoridade advém, também, do capital científico de seus autores. Como definiu Bourdieu (2002), o capital científico é essa soma de experiências, conhecimentos científicos e recursos acumulados durante a vida do indivíduo. Godfrey Harold Hardy (1877-1947) era um matemático da Universidade de Cambridge, com reputação internacional; escreveu mais de 300 artigos científicos, foi presidente da Sociedade de Matemática de Londres. Elon Lages Lima (1929-2017) era matemático do Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA) - local de pesquisas reconhecido internacionalmente - conhecido como o autor dos melhores livros didáticos de matemática em língua portuguesa; escreveu 24 livros.

Feita a escolha dos dois autores, procedeu-se à identificação das unidades de significado: discursos nos prefácios; ordenação dos conceitos de limite; emprego de simbologia; representações de conceitos; exemplos; abordagem didática e referências. As unidades de significado identificadas relacionam-se com as seguintes questões, com as quais se pretende comparar as obras:

Quadro 1- Unidades de significado

Unidades de Significado	**Questões**
Discursos nos prefácios	O que outros autores afirmam sobre o livro didático? Como o próprio autor se posiciona a respeito de seu livro?
Emprego de simbologia	Quais simbologias são empregadas? Com que frequência?
Representações de conceitos	Qual a frequência de figuras no texto?
Exemplos	Como os exemplos são introduzidos e com qual frequência?
Abordagem conceitual do autor	Qual a abordagem conceitual do autor, de acordo com os mundos conceituais de Tall?
Referências	Quais os autores que foram citados no texto?

Fonte: elaborado pela autora

A partir dessas unidades de significado, cheguei às categorias mais específicas: abordagem mesclada corporificada-simbólica; abordagem mesclada simbólica-formalizada, abordagem formalizada, segundo Tall (2013).

A teoria do pesquisador David Tall (2013) contribui com a teoria de aprendizagem matemática, ao propor que o pensamento matemático pode ser visto sob três aspectos: 1) mundo corporificado (embodied), que é aquele relacionado às características físicas dos objetos matemáticos, é um mundo de significado sensorial; 2) mundo simbólico, que é aquele relacionado às características dos objetos apresentados em palavras tradicionais e familiares onde os cálculos podem ser feitos (ambos: aritméticos e algébricos), e 3) mundo axiomático formal, que é aquele relacionado ao formalismo matemático dos conceitos. Da matemática prática: formada por números, formas e espaço – o pensamento progride para uma matemática teórica – da álgebra e geometria euclidiana. “Enquanto a geometria se constrói através do aumento da sofisticação estrutural, o simbolismo se desenvolve através da compressão operacional das operações incorporadas ao simbolismo manipulável que então tem propriedades estruturais que desenvolvem suas próprias formas de definição e prova” (Tall, 2013, p. 402-403). Finalmente, o terceiro mundo da matemática formal axiomática constrói um nível formal baseado na definição da teoria dos conjuntos e nas demonstrações formais.

A Figura 1 ilustra como os três mundos conceituais de Tall se mesclam. Os mundos ao se mesclarem tornam-se mais realistas, pois permitem uma amplitude de olhares, não são vistos mais como estanques.

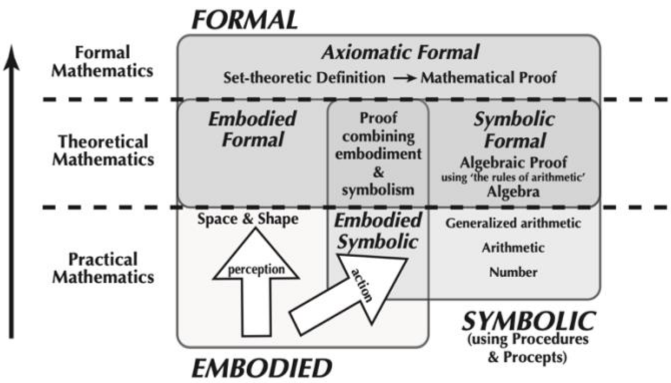

Figura 1: Os três mundos conceituais de Tall
Fonte: Tall (2013, p. 19)

Para Tall (2013), o uso do termo formal necessita ser flexibilizado. Para um matemático, o termo formal é aquele da parte superior da Figura 1, envolvendo definições teóricas a partir de uma axiomática e demonstrações formais. Entretanto, para um educador matemático, o formal pode ser empregado como uma das fases de Piaget denominada operacional formal. A fim de resolver o impasse, ele sugere que se use a mescla corporificado e simbólico-formalizado como o ápice da matemática escolar e, também, como uma base para as aplicações da matemática a níveis mais elevados.

2. APRESENTAÇÃO DE LIMITE SEGUNDO GODFREY HAROLD HARDY

> *Cours d'analyse* de Jordan – nunca esquecerei a surpresa com que li essa obra notável [...]. Daquela época em diante, me tornei, a minha maneira, um matemático de verdade, com sadias ambições matemáticas e uma paixão verdadeira pela matemática (Hardy, 2000, p.137)

O poder de um bom livro nunca pode ser subestimado, como nos lembra o depoimento de Hardy que constitui a epígrafe: o livro de análise que marcou a vida desse autor foi relembrado como um marco muitas décadas depois de ter sido lido. Um livro nunca é apenas um livro, por isso a tarefa de analisá-lo, seja do ponto de vista histórico, epistemológico ou metodológico, é um desafio para o pesquisador.

Um curso de matemática pura de G. H. Hardy (1908) é um dos livros didáticos de análise que, mesmo centenário, permanece um clássico a ser lido e comentado. Pode-se aprender com o entusiasmo e rigor do controverso matemático de Cambrigde, uma vez que ele aprofunda com clareza e maestria os fundamentos da análise, mas não se limita a isso: ele também dialoga com o leitor fazendo uso de muito humor. Hardy retomou a tradição de bons livros didáticos de análise no início do século XX (O primeiro autor inglês dessa leva foi Whittaker, com *Um Moderno Curso de Análise* de 1902; seguido, em 1907, por Hobson, com o livro *A teoria das funções de uma variável real)*. O humor fino de Hardy, aparece já no prefácio da primeira edição, quando afirmou: "Eu considero o [este] livro como sendo realmente elementar" (Körner, 2011, p. xiii). Na sétima edição, ele fez uma autocrítica de seu livro, afirmando que se sentiu muitas vezes tentado a fazer drásticas mudanças no texto, em substância e estilo. Aquilo que escreveu, segundo diz, evidenciava uma ênfase e um entusiasmo que vinte anos depois lhe pareciam "ridículos". No prefácio da décima edição, Körner diz: "Ler Hardy é ler um matemático plenamente consciente de suas habilidades, mas que lhe trata como um igual natural".

Algo me surpreendeu neste livro: a ausência de pressa que Hardy habilmente demonstrou na apresentação do conceito de limite. O livro está dividido em dez capítulos, dos quais o quarto e quinto são dedicados a limites (da página 110 a 183), embora este assunto tenha sido tratado também em outros capítulos. E como Hardy abordou o conceito de limite? Por que teria usado tantas tantas páginas com esse conceito? Importa assinalar que, antes de introduzir o conceito de limite, ele apresenta os números reais pelos cortes de Dedekind, funções e números complexos. E também: ele não parte de uma definição formalizada de limite de uma sequência ou de uma função qualquer. Seu ponto de partida foi considerar as sequências como funções, cujo domínio é o conjunto dos números inteiros positivos e, após muitos exemplos, explicar em detalhes o que significa a expressão "**n** tende para o infinito" e discutir o "comportamento de uma função de **n** quando **n** tende para o infinito", tomando a função $\varphi(n) = \frac{1}{n}$ como a sua grande protagonista. Só então aparecerá a estrela da cena – a definição de limite. Segundo Hardy, após essa introdução, o leitor poderá apreciar a noção de limite.

O caminho perseguido é mais ou menos este: considere-se uma sucessão de valores **n** que assume os valores 1, 2, 3, ... sucessivamente. É preciso ter uma frase para se expressar este crescimento sem fim de **n**; em matemática, diz-se que **n** tende ao infinito ou **n**→ ∞, em que ∞ é o símbolo para o infinito. Para Hardy, não existe um número ∞; o símbolo nada significa a não ser na frase "tende ao infinito". Para explicar melhor e atacar o significado de expressões que envolvem o infinito, ele diz que: "1) o símbolo ∞ não significa nada em si mesmo, embora uma expressão contendo-o, signifique, algumas vezes, algo; 2) em todos os casos em que uma expressão contenha o símbolo ∞, significa simplesmente que se irá fazer algo com ele atribuindo significado por meio de uma definição" (Hardy, 2011, p. 117).

O comportamento de uma função de **n** quando **n** tende para o infinito é explicada com o auxílio das funções $\varphi(n) = \frac{1}{n}$ e $\varphi(n) = 1 - \frac{1}{n}$. Ele faz duas afirmações que, em sua opinião são óbvias: a) a função φ é pequena para valores grandes de **n**; b) a função φ é próxima de 1 para valores grandes de **n**. Depois de discutir amplamente sobre o significado dessas expressões, usando exemplos numéricos, ele formaliza melhor a questão afirmando que as expressões a) e b) são equivalentes uma à outra quando: "se δ é qualquer número positivo, por menor que seja, então $\frac{1}{n} < \delta$ para valores de **n** suficientemente grandes". Ou, de maneira ainda mais formal: "Se δ é qualquer número positivo, por menor que seja, então pode-se encontrar um número n_0 tal que $\frac{1}{n} < \delta$ para todos os valores de n maiores ou iguais a n_0" (Hardy, 2011, p. 118). Ele ressalta ainda que n_0 é função de δ, o que pode ser enfatizado escrevendo $n_0(\delta)$.

Hardy, além do humor fino, gostava de jogos e, entre todos, o que mais apreciava era o críquete; além disso, ele inventava jogos para se divertir com os amigos (Snow, 2000). Por isso, não é de se estranhar que ele usasse metáforas de jogos no livro. Tentando explicar a definição acima, ele dizia que o leitor poderia imaginar que, se ele estivesse confrontado com um adversário, o oponente apresentaria números cada vez menores, começando com 0,001; o leitor deveria replicar $\frac{1}{n} < 0{,}001$ assim quando n>1000. O oponente tentaria com um número ainda menor - 0, 0000001. O leitor replicaria com n> 10.000.000 e, assim por diante. Ele concluiu que, neste caso, o leitor sempre teria o melhor argumento, e ganharia.

Podemos entender a ideia intuitiva de Hardy na exemplificação acima, como uma tentativa de passar gradualmente pelos três mundos conceituais, conforme Tall (2013). Afinal, casos de infinito, limites de sequências infinitas, limites mínimos e máximos são casos especiais de uma metáfora conceitual em que processos se prolongam indefinidamente.

Essa apresentação gradual do conceito, com numerosos exemplos e metáforas era um artifício para não ingressar diretamente na formalização. A fim de introduzir a simbologia de limite, ele novamente toma a função particular $\varphi(n) = \frac{1}{n}$. Aqui, segue Leathem (1905), que introduziu a seta em lugar do sinal de igual no símbolo de limite. “Dizemos que o limite de $\frac{1}{n}$ quando n tende para ∞ é zero, uma expressão que podemos expressar simbolicamente como $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}$ = 0, ou simplesmente lim $\frac{1}{n} = 0$. Nós podemos também escrever $\frac{1}{n} \to 0$ quando n → ∞ " (Hardy, 2011, p. 119).

Além de explorar funções que se aproximam de zero, ele considerou aquelas que tendem ao infinito, por exemplo $\varphi(n) = n^2$, e $\varphi(n) = -n^2$. Para essas funções, introduziu, por conveniência, os símbolos $+\infty$ e $-\infty$. Essa simbologia, segundo ele, não tem significado em si, só adquirindo significado em situações como o resultado do cálculo de funções, consoante explicado anteriormente quando $n^2 \to +\infty$ e $-n^2 \to -\infty$.

Embora a ideia esteja clara, para evitar expressões ambíguas, ele apresenta a definição 1, com formalidade:

> Definição 1: diz-se que a função $\varphi(n)$ tende para o limite l quando n tende a ∞, se, por menor que seja o número positivo δ, $\varphi(n)$ difere de l pelo menos para valores suficientemente grandes de n; ou seja, se, por menor que seja o número positivo δ, podemos determinar um número $n_0(\delta)$ correspondente a δ, de modo que a $\varphi(n)$ difere de l por menor que seja, para todos os valores de n maior ou igual a $n_0(\delta)$ (Hardy, 2011, p. 120)

Com maior simbolismo, ele dá uma definição mais curta.

> Se, dado qualquer número positivo δ, por menor que seja, nós pudermos encontrar $n_0(\delta)$ tal que $|\varphi(n) - l\,| < \delta$ quando n≥ n_0, então diz-se que $\varphi(n)$ tende ao limite l quando n tende ao ∞ e escreve-se $\lim_{n\to\infty} \varphi(n) = l$ (Hardy, 2011, p. 120)

As ilustrações aparecem amplamente no livro de Hardy (60 figuras). Aqui, o autor usa uma função elementar, a função constante, para mostrar geometricamente o significado do limite $\lim_{n \to \infty} \varphi(n) = l$ (Figura 1). Ele toma a função constante $\varphi(n) = l$, ou y= l considera duas retas paralelas y = l - δ e y= l + δ .

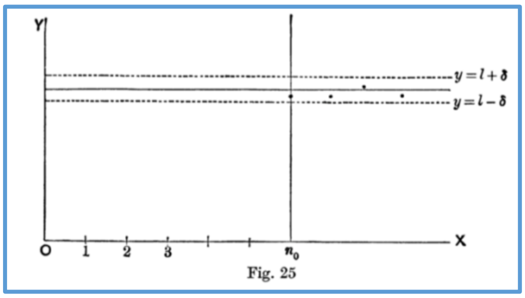

Figura 2: Ilustração do limite de uma função constante
Fonte: Hardy (2011, p. 121)

Em sua explicação geométrica, na Figura 2, afirma que não importa quão perto estas retas estejam, podemos sempre desenhar a linha x= n_0 de modo que todos os pontos à direita estejam entre eles.

Esse modo de apresentar o limite, encontra-se num mundo mesclado entre o corporificado, simbólico e formalizado. Hardy não foge às sutilezas, ele as expõe abertamente, quando diz: “O leitor não pode imprimir esses fatos com muita intensidade em sua mente. Um limite não é um valor da função: é algo bastante distinto destes valores, embora seja definido pelas suas relações com eles e possa ser igual a alguns deles” (Hardy, 2011, p. 124). Ele explica isso com exemplos. Para a função $\varphi(n) = 0{,}1$, o limite é igual para todos os valores de n, mas se $\varphi(n) = \frac{1}{n}$, ele não é igual a nenhum valor desse $\varphi(n)$. Ele discute também as funções oscilantes, quando $\varphi(n)$ não tende nem para +∞, em para - ∞. Apresenta alguns teoremas envolvendo operações com limites e, ao introduzir a proposição – Se $\phi(n)$ e $\psi(n)$, tendem aos limites a e b, então $\phi(n) + \psi(n)$, tendem ao limite a+b – ele observa que isso é “quase óbvio”. Mas o que significa ser óbvio? Como os matemáticos gostam de usar a expressão “é óbvio”, o que muitas vezes desconcerta os alunos, o comentário de Hardy (2011, p. 130) a esse respeito merece ser transcrito:

> Que um teorema é 'óbvio' neste sentido não prova que é verdade, uma vez que os mais confiantes julgamentos intuitivos do senso comum são frequentemente considerados errados; e mesmo que o teorema seja verdadeiro, o facto de ser também 'óbvio' não é motivo para não o provar, se for possível encontrar uma prova. O objetivo da matemática é provar que certas premissas implicam certas conclusões; e o fato de que as conclusões podem ser tão 'óbvias' quanto as premissas nunca diminui a necessidade, e muitas vezes nem mesmo o interesse da prova.

Então, o que ele quer dizer com é “quase óbvio”?

> Queremos dizer que um momento de reflexão não deve apenas convencer o leitor da verdade daquilo que é dito, mas deve também sugerir-lhe as linhas gerais de uma prova rigorosa. E, muitas vezes, quando uma declaração é 'óbvia' neste sentido, pode-se omitir a prova, não porque a prova seja desnecessária, mas porque é uma perda de tempo declarar em detalhes o que o leitor pode facilmente fornecer para si mesmo. O conteúdo destas observações foi-me sugerido há muitos anos pelo Prof. Littlewood (Hardy, 2011, p. 130)

A convergência de séries é explorada de maneira ampla, com a inclusão de vários teoremas concernentes às séries infinitas. Apresenta, também, contra-exemplos simples para alguns resultados. Curiosamente não utiliza a palavra “conjunto”, preferindo “agregado”, com o mesmo significado. Desta maneira, introduz o importante conceito de limites de um agregado (conjunto) limitado. Este preâmbulo é necessário para a introdução dos limites de uma função limitada. A partir daí, ele chega às definições de limites superiores e inferiores. Simbolicamente, $\Lambda = \overline{lim}\ \phi(n)$ e $\lambda = \underline{lim}\ \phi(n)$.

O capítulo V é dedicado a limite de funções, à continuidade e descontinuidade. Assim como no capítulo anterior, ele começa a abordagem com o limite de funções que tendem ao infinito, lembrando que a única diferença, agora, é de que **x** pode assumir qualquer valor. Nestas circunstâncias, sugere que um ponto P que corresponde a **x** coincide com cada ponto à direita da sua posição inicial, enquanto na situação anterior, no caso das sequências, o ponto tendia por “saltos” – essa distinção é expressa da seguinte maneira – **x** tende continuamente ao infinito. Ele chama a atenção para o fato de que as definições e os teoremas, neste caso mais geral, são praticamente repetições daqueles do último capítulo. Mas, ele não se furta de a essas apresentar definições. A definição 1 refere-se ao limite l, quando x tende ao infinito e a definição 2 do limite infinito, quando x tende a infinito e a definição 3, quando o limite oscila. No parágrafo 93, toma o caso particular do limite quando x tende a zero. Finalmente, apresenta o caso mais geral do limite de uma função quando x tende a um valor **a**. Assim, ele considera o limite de uma função $\phi(x)$ quando x tende ao valor **a**, dizendo: “Se dado δ, pode-se sempre determinar $\varepsilon\ (\delta)$ tal que $|\phi(x) - l| < \delta$ quando $0 < |x - a| \leq\ \varepsilon\ (\delta)$ então $\lim_{x \to a} \phi(x) = l$” (Hardy, 2011, p. 177).

Finalmente, o autor introduziu notações para os limites laterais, afirmando que, se os dois limites coincidirem, aquele será o valor do limite no ponto (conforme Figura 3).

Thus $\lim_{x \to a} \phi(x) = l$ is equivalent to the two assertions

$$\lim_{x \to a+0} \phi(x) = l, \qquad \lim_{x \to a-0} \phi(x) = l.$$

Figura 3: Teorema sobre limites laterais
Fonte: Hardy (2011, p. 177)

Hardy repete afirmações que parecem ser caras para ele. Por exemplo: $\lim_{x \to 0} \phi(x) = l$, é uma afirmação sobre os valores de $\phi(x)$ quando x tem qualquer valor distinto de zero, mas diferindo pouco de zero, ela não é uma afirmação sobre o valor de x quando este é igual a zero. Na verdade, nada afirmamos sobre o valor da função em x = 0; a afirmação quer dizer que, quando x é quase igual a zero, $\phi(x)$ é quase igual a l. Aliás, $\phi(x)$ não precisa estar definida para x=0. Ele exemplifica essa questão de maneira bem simples: Seja a função $\phi(x) = 0$ para todo x, o $\lim_{x \to 0} \phi(x) = 0$. Mas, se a função $\psi(x) = 1$ para x=0 e $\psi(x) = 0$ para x$\neq$ 0, o $\lim_{x \to 0} \psi(x) = 0$, mesmo que $\psi(0) = 1$. Isso quer dizer, geometricamente, que, se nos movermos ao longo do gráfico de um lado a outro, a ordenada da curva sendo zero, o limite tenderá a zero.

Alguns exemplos de Hardy são esclarecedores, como este: a função $y = \frac{\left(sin\frac{1}{x}\right)}{\left(sin\frac{1}{x}\right)}$ tende a um limite quando x tende a 0? A resposta dele: “Não, a função é igual a 1 exceto quando s$in\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, isto é quando x= $\frac{1}{\pi}$, $\frac{1}{2\pi}$, ...,$-\frac{1}{\pi}$, -$\frac{1}{2\pi}$, ... pois, para estes valores, a fórmula para y não tem significado ou seja, é $\frac{0}{0}$, e y não está definida para uma infinidade de valores de x” (Hardy, 2011, p. 183).

Muitos exemplos apresentados para as sequências são retomados quando x é um número real qualquer. Ele sugere que o leitor considere as seguintes funções: $\frac{1}{x}$, 1+($\frac{1}{x}$), x^2, x^k , $[x]$, x-$[x]$, $[x] + \sqrt{\{x - [x]\}}$ quando x→ ∞. As primeiras funções são simples, ele trabalhou intensivamente com elas, os gráficos das últimas três funções foram construídos no capítulo 2., e será fácil ver que $[x]$ tende para ∞ , que x-$[x]$ oscila e que $[x] + \sqrt{\{x - [x]\}}$ tende para ∞.

As representações geométricas são sugeridas para facilitar o cálculo do limite (Figuras 4 e 5):

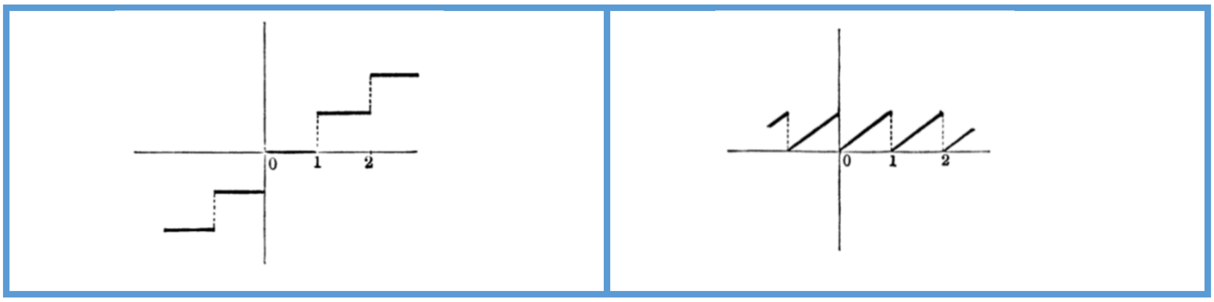

Figura 4: Gráficos das funções $[x]$ (à esquerda) e x-$[x]$ à $direita$
Fonte: Hardy (2011, p. 58)

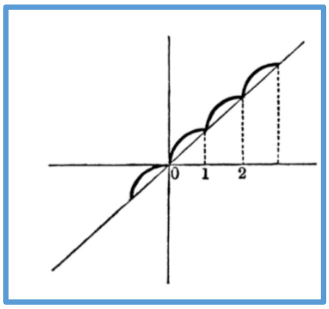

Figura 5: Gráfico da função $[x] + \sqrt{\{x - [x]\}}$
Fonte: Hardy (2011, p. 58)

Nos capítulos sobre limites, os autores citados por Hardy não são em número expressivo e, em geral, aparecem em notas de rodapé.

Quadro 2: Referências de Hardy

Bromwich, Thomas John "'Anson (1875-1929)	*An introduction to the theory of infinite series (1908)* "[...] melhor matemático puro entre os matemáticos aplicados em Cambridge, e o melhor matemático aplicado entre os matemáticos puros" (Hardy, Mc Tutor, disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bromwich/
Hobson, Ernest Willian (1856-1933)	*Theory of Functions of a Real Variable (1907)* Hardy acreditava que este trabalho tinha sido de grande importância no desenvolvimento da matemática pura na Grã-Bretanha.
Littlewood, John Edensor (1885-1977)	Em parceria com Hardy: *Some problems of Diophantine approximation. Acta mathematica, v. 37*
Ingham, Albert (1900-1967)	*Não indica o trabalho específico, apenas que o argumento usado é devido a Ingham*

Fonte: a autora

O matemático J. E. Littelwood, colega com quem Hardy mais escreveu em parceria, em torno de 100 artigos, adotaram regras em comum para tal trabalho[1].

[1] Quando um escrevia ao outro, era completamente indiferente se aquilo que escrevia era certo ou errado. Quando um recebia uma carta do outro, não era obrigado a lê-la, muito menos a respondê-la. Embora não importasse realmente que ambos pensassem simultaneamente nos mesmos pormenores, era preferível que

O quanto a escrita de Hardy tem a ver com o pensamento de Littlewood é difícil de ser avaliado, mas eles foram mutuamente influenciados em suas investigações.

Sucintamente, concluo que as unidades de significado encontradas na narrativa de Hardy permitem mostrar como a sua abordagem passa pelos três mundos conceituais: o corporificado – transparece desde o prefácio quando ele entende seu texto como elementar, seguindo com a apresentação de muitos exemplos, inclusive um deles com pitada de humor, antes de chegar a simbolização e definições formais, incluindo diálogos com o leitor; o mundo simbólico está presente em todo o livro e nele inclui observação histórica quanto a notação de limite; o mundo formal, que surge como ápice da sua abordagem, transparece inclusive nas referências que usa, que inclui poucos matemáticos puros.

3. APRESENTAÇÃO DE LIMITE SEGUNDO ELON LAGES LIMA

> Todos os conceitos e resultados importantes da Análise Matemática se referem, quer explícita, quer indiretamente, a limites (Lima, 1992, p. 77)

Assim como Hardy, Lima escolheu iniciar a abordagem de limites pelas sequências, justificando que esta é a noção mais simples de limite. Pensar intuitivamente é o primeiro conselho do autor: "[...] sugerimos ao leitor pensar numa sequência $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ de números reais como uma sequência de pontos da reta" (Lima, 1992, p. 77). Partindo de um pensamento intuitivo, um número real é limite de uma sequência se, para valores muito grandes de n, podemos tornar os x_n tão próximos quanto quisermos. Entretanto, precisamos em matemática ter mais precisão e, por isso, depois deste curto divagar, o autor introduz a definição formalizada de limite:

> Diz-se que o número real a é limite deda sequência (x_n) de números reais, e escreve-se a=lim x_n, ou a= $\lim_{n} x_n$, ou a=$\lim_{n\to\infty} x_n$, quando para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, for possível obter um inteiro $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$, sempre que n>n_0 (Lima, 1992, p. 83)

Segundo Lima (1992, p. 83), a forma conveniente a ser usada pelo professor no quadro negro é a da Figura 6, em que as palavras são excluídas, e a definição refinada utiliza apenas símbolos matemáticos.

não o fizessem. Era bastante indiferente que um deles não tivesse contribuído nem um pouco para o conteúdo de um artigo com o seu nome comum (O'Connor; Robertson, 2003).

$$\lim x_n = a .\equiv. \forall \varepsilon > 0 \, \exists n_0 \in \mathbb{N};\ n > n_0 \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

Figura 6: Definição usando apenas símbolos para limite
Fonte: Lima (1992, p. 83)

Acompanhando essa definição, Lima (1992) esclarece cada símbolo. Entretanto, segundo Tall (2013), dar sentido a uma definição assim formulada é problemático porque há quantificadores envolvidos ∀ [para todos] e ∃ [existe] e esta expressão pode ser complicada de manusear. Os resultados de pesquisas de Dubinski et al (1988, p. 44) sobre quantificadores possibilitaram que eles concluíssem o seguinte:

> A capacidade de trabalhar com a quantificação existencial e universal de proposições lógicas é uma das ferramentas mais importantes e úteis para aceder a um vasto exército de ideias matemáticas a quantificação é, por outro lado, um dos conceitos menos frequentemente adquiridos e mais raramente compreendidos a todos os níveis, desde o ensino secundário até à Pós – Graduação.

Quando Hardy, em 1908, propôs uma definição mais simbólica para o limite de sequência, não usou os quantificadores. Aliás, segundo Cajori (1993), foi Peano (1908) que introduziu o quantificador existencial no seu livro *Formulaire*. Para Peano, o símbolo ∃ podia ser aplicado à existência de um elemento ou de uma classe. O símbolo ∀ não aparece em Peano. Em Cajori (1993), o símbolo usado era "[all]", que em inglês significa: uma classe consistindo de todos (elementos, funções, etc) que têm uma propriedade específica. Posteriormente, a letra A de "all" sofreu uma simetria e foi usada como quantificador universal ∀ [para todos].

A "limpeza" da linguagem ordinária realizada por Lima é a ideal para um matemático teórico porque ela o livra das ambiguidades inerentes à língua. Mas, para o principiante, seria uma boa alternativa?

Lima, para amenizar o impacto dessa definição simbólica, aproveita para contar a história de Hardy com o jogo dos adversários, já relatado; entretanto, logo retoma o linguajar matemático, dizendo "Voltando a falar sério" (Lima, 1992, p. 84). Faz uma representação para explicar o limite da sequência (x_n), conforme a figura 6. Ao todo, no livro, o autor apresenta 29 figuras.

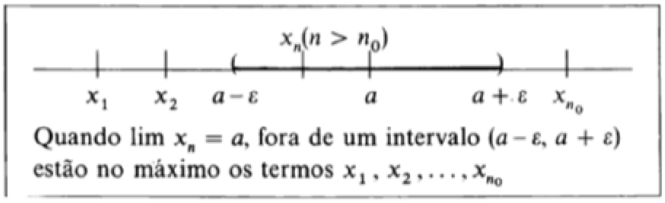

Figura 7: Representação do limite de uma sequência
Fonte: Lima (1992, p. 84)

Seguem-se muitos resultados importantes, entre outros o da unicidade do limite e de operações com ele Tais resultados são sempre acompanhados pelas devidas demonstrações, além de numerosos exemplos muito detalhados. O autor inclui os limites superiores e inferiores de sequências. A introdução às séries é bastante semelhante à de Hardy.

No capítulo 6, Lima retoma o conceito de limite de uma forma mais geral que o limite de sequências. A definição de limite de uma função é apresentada numa roupagem totalmente formalizada, admitindo que o ponto **a** para o qual a variável x tende deve ser um ponto de acumulação. Assim, ele parte de uma função *f* com valores reais, definida num subconjunto X de $\mathbb{R}$ e escreve:

> Diremos que o número real L é o limite de f(x) quando x tende para a, e escreveremos $\lim_{x \to a} f(x) = L$, para significar o seguinte: para cada número real $\varepsilon > 0$, dado arbitrariamente, podemos encontrar $\delta > 0$ de modo que se tenha $|f(x) - L| < 0$, sempre que se tenha $x \epsilon X$ e $0 < |x - a| < \varepsilon$ (Lima, 1992, p. 153)

Embora a definição seja bem formalizada, o autor, assim como fez para o limite de uma sequência, afirma que esta pode ser ainda abreviada. E escreve que o $\lim_{x \to a} f(x) = L$ pode ser escrito como: "$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0; x \epsilon X, 0 < |x - a| < \delta \implies |f(x) - L| < \varepsilon$" (Lima, 1992, p. 153).

A terceira formulação da mesma definição é apresentada usando expressões da topologia: "Assim $\lim_{x \to a} f(x) = L$ significa que, para todo intervalo aberto $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$, existe um intervalo $(a - \delta, a + \delta)$ tal que, pondo-se $V_\delta = (X - \{a\}) \cap (a - \delta, a + \delta)$, vale $f(V_\delta) \subset (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$" (Lima, 1992, p. 153).

Após estas definições, faz a seguinte afirmação no que chamou de "linguagem simples", assim: "é possível tornar f(x) arbitrariamente próximo de L, desde que se tome $x \epsilon X$ suficientemente próximo de a (e diferente de a!)" (Lima, 1992, p. 153).

Os comentários que seguem as diferentes formulações da definição de limite são interessantes, pois o autor chama a atenção para particularidades que podem passar despercebidas como: “Ao considerarmos o limite $\lim_{x \to a} f(x) = L$ não exigimos que **a** pertença ao domínio da função f. Nos casos mais interessantes de limite, tem-se $a \notin X$” (Lima, 1992, p. 153).

Os limites laterais, limites no infinito, limites infinitos e expressões indeterminadas são também objeto de análise pelo autor. Com muitos exemplos, ele amplia as definições para chegar a valores de aderência de uma função e aos limites superior e inferior. Entretanto, o autor não usa representações geométricas para os importantes exemplos de funções como $f(x) = sen(\frac{1}{x})$, apenas afirma que o limite superior quando x→ 0 é 1, e o limite inferior quando x→ 0 é -1.

Nos dois capítulos que abordam limites, a única representação geométrica é a da figura 7. A quase ausência de figuras talvez seja explicada pela necessidade que o autor teve de algebrizar esse conceito. No prefácio, Lima (1992) ressaltou a relevância de apelarmos à intuição por meio de figuras, ficando essa a cargo do leitor.

As referências são apresentadas no final do livro e, praticamente, não há citações destes autores no corpo do texto, exceção feita a Hardy (1952). Integram as referências 22 autores, destes são brasileiros apenas o próprio autor, Jacy Monteiro e Djairo Figueiredo. Autores que escreveram mais especificamente sobre Análise, estão no Quadro 3.

Quadro 3: Referências de E. L. Lima

Bartle, R. G.	The elements of real analysis (1964)
Figueiredo, D. G.	Análise I (1974)
Gleason, A. M.	Fundamentals of abstract analysis (1966)
Goffman, C.	Introduction to real analysis (1946)
Landau, E.	Analysis, I (1968)
Phillips, E. G.	A course of analysis (1956)
Rudin, W.	Princípios de análise matemática (1971)
Spivak, M.	Calculus (1967)

Fonte: elaborado pela autora a partir de Lima (1992, p. 338)

Lima reforçou, no prefácio da primeira edição, que as referências bibliográficas dizem respeito aos assuntos tratados no livro. Entretanto, destaca: “a lista é bastante seletiva, refletindo meu gosto pessoal [...] foram incluídos os livros que, no meu entendimento, servem como leitura colateral, esclarecendo, completando ou abordando sob outros aspectos os temas estudados neste livro” (Lima, 1992, s. p.).

Sucintamente, concluo que as unidades de significado analisadas na narrativa de Lima contemplam principalmente o mundo simbólico e formal. Raramente, o autor traz imagens, e mesmo afirmando que deve-se pensar intuitivamente, não auxilia o leitor nessa tarefa. Os autores citados nas referências são também matemáticos puros e autores de livros didáticos para o ensino superior. A sua narrativa mostra magistralmente o seu ideal de formalismo.

4. ANÁLISE COMPARATIVA DAS OBRAS

O *curso de matemática pura* de Hardy, de 1908, conforme Körner afirmou no prefácio, é um livro para iniciantes no Cálculo Diferencial e Integral, isto vale dizer, um livro destinado a um público com pouca experiência em demonstrações e com reduzida fluência algébrica, além de pouca experiência em aplicações à geometria e mecânica. Körner, ao comparar, em 2008, esse livro com o livro Cálculo, de Spivak – por ele considerado excelente – dizia ser o livro de Hardy ilustrado com exemplos muito mais ricos (Körner, 2011). Na minha visão, além disso, Hardy inaugurou um novo período no ensino de limites ao utilizar amplamente o então recente simbolismo criado por Leathem (1905) para limites, qual seja, a seta para indicar “tender a”. O *Curso de Análise* de Lima foi escrito para alunos detentores de alguns conhecimentos em Cálculo Diferencial e Integral, portanto, com familiaridade em aspectos computacionais e conhecedores da “interpretação intuitiva de certas noções como limites, continuidade, derivadas, integrais e séries” (Lima, 1992, s.p.). O quadro 4 mostra os conteúdos abordados nos dois livros.

Quadro 4: Conteúdos dos livros de Hardy e Lima

Hardy (1908)	Lima (1976)
Cap. 1: Variáveis reais Cap. 2: Funções de variável real Cap. 3: Números complexos Cap. 4: Limites de funções de variáveis positivas Cap. 5: Limites de funções de uma variável real. Funções contínuas e descontínuas Cap. 6: Derivadas e Integrais Cap. 7: Teoremas adicionais no Cálculo Diferencial e Integral Cap. 8: A convergência de séries infinitas e integrais infinitas Cap. 9: As funções logarítmica, exponencial e funções circulares de variável real Cap. 10: A teoria geral dos logaritmos, exponenciais e funções circulares	Cap. 1: Conjuntos e funções Cap. 2:Conjuntos finitos, enumeráveis e não-enumeráveis Cap. 3: Números reais Cap. 4: Sequências e séries de números reais Cap. 5: Topologia da reta Cap. 6: Limites de funções Cap. 7: Funções contínuas Cap. 8: Derivadas Cap. 9: Integral de Riemann Cap. 10: Sequências e séries de funções

Fonte: Dados extraídos dos índices dos livros

Ambos tratam praticamente dos mesmos conteúdos, embora com algumas particularidades: Hardy aborda os números complexos, enquanto Lima não trata de variáveis complexas; Lima dedica um capítulo à topologia da reta, que está ausente em Hardy. Hardy dedicou 73 páginas ao conceito de limite, enquanto Lima, 83 páginas. Eles se assemelham na ordenação dos conceitos: primeiro, limite de uma sequência; após, limite de uma função qualquer. Ambos usam amplamente a simbologia, mas ela aparece mais fortemente em Lima; Hardy não usou os quantificadores. Há em Hardy mais um apelo à intuição, começando com exemplos bem simples. Ele dialoga mais com o leitor, enquanto a escrita de Lima é mais formalizada e dialoga menos com o leitor. Os exemplos em ambos são abundantes, resolvidos e com sugestões para resolução. As figuras são mais exploradas em Hardy, enquanto Lima as deixa para o leitor. Naturalmente, as referências de Hardy não são as mesmas daquelas de Lima que, após décadas escreveu seu livro, já contando com outros livros modernos. Constatei que ambos usaram referências de autores contemporâneos.

Hardy e Lima foram matemáticos puros, e para estes, segundo Tall (2013), o conceito formal de limite é um divisor de águas entre a matemática elementar e superior. Nenhum deles fugiu ao mundo conceitual formal, mas cada um escolheu um estilo próprio de introduzir essa formalidade: Hardy mais lentamente e intuitivamente, passando pelo mundo corporificado e simbólico, enquanto Lima o fez rapidamente sem apelo ao mundo real. Ambos entenderam o papel fundamental de tal conceito na base da Análise Matemática.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os bons livros são presenças teimosas do passado. Os livros de Hardy e Lima – essas teimosias persistentes – permitiram que eu identificasse duas abordagens do conceito de limite à luz da teoria dos mundos conceituais de Tall (2013). A apresentação do conceito de limite de Hardy, que usa amplamente as novas simbologias, tem em seu âmago uma dose do mundo corporificado, com um sutil apelo à intuição. Entretanto, não se pode dizer que não é uma apresentação formalizada. Assim, entendi que sua abordagem é uma mescla dos três mundos: corporificado e simbólico- formalizado. Ele mostra que, no ensino, não se precisa começar com ideias formais de limites, mas sim com ideias corpóreas, com exemplos simples de processos que se prolongam indefinidamente. A seguir, o simbolismo aparece mais fortemente quando ele utiliza a nova notação introduzida por Leatham e por fim, a definição de limite com o nível de rigor exigido para pertencer ao mundo formal.

Por outro lado, a abordagem de Lima é predominantemente formalizada. Ele usa amplamente as notações e ingressa no mundo conceitual formal sem muitos preâmbulos. A definição de limite é usada para demonstrar os teoremas que envolvem este conceito, o que é uma característica do mundo conceitual formal. O matemático brasileiro parece ter optado por trazer o máximo de simbolizações matemáticas e a moderna linguagem da topologia. Aquilo que ele chama de “linguagem simples”, em sua visão, não é muito apropriada para o tipo de apresentação que pretende dar à análise. Pesquisadores como Tall, Dubynski, Cornu, entre outros, apontam para a necessidade de repensarmos o ensino do conceito de limites para os iniciantes considerando que este faz parte do domínio do pensamento avançado e, quando ele é abordado a partir da sua definição formal, pode causar dificuldades em termos de compreensão. A pesquisa de Domingos (2003) revelou que alunos apresentam dificuldades enormes quando deixam de operar com objetos matemáticos concretos e passam a operar com objetos mais abstratos, a partir de sua definição simbólica. Os livros, aqui analisados, revestidos do rigor que se espera de um matemático analista, precisam ser lidos e usados com cautela. A intervenção do professor em sala de aula, visando à compreensão do conceito, precisa vir acompanhada de diferentes representações, principalmente as gráficas.

A definição do conceito de limite, explorada neste artigo a partir da leitura e análise de dois autores do século XX, objetiva o diálogo entre um conhecimento matemático, sua história e o ensino e aprendizagem de um conceito. A temática poderá ser mais amplamente explorada em futuras pesquisas sobre livros didáticos de Cálculo da atualidade.

REFERÊNCIAS

Bordieu, P. (2002). *Os usos sociais da ciência*. São Paulo: Unesp.

Cajory, F. F. *A history of mathematical notations*. New York: Dover, 1993.

Choppin, A. (2004). História dos livros e das edições didáticas: sobre o estado da arte. *Educação e Pesquisa*. V. 30 (3), 549-566.

Cornu, B. (1983). *Apprentissage de la notion de limite: conceptions er obstacles*. Tese de doutorado Universidade de Grenoble.

Cornu, B. (1991) Limits. *Advanced mathematical thinking*. Edited by D. O. Tall. Mathematics Education Library, 11. Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 153-166.

Cotrill, J; et al. (1996). Understanding the limit concept: Beginning whit a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, Norwood, v. 15 (2), 167-192, jan.

Domingos, A. M. D. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos Avançados - A matemática no início do Ensino Superior* - Dissertação para grau de doutor em Ciências de Educação, Universidade Nova Lisboa.

Dubinsky, E. U, E.; Elterman, F.; Gong, C. (1988). The student's constructions of quantification. *For the Learning of Mathematics*, 8, 2 44-51.

Hardy, G. H. (1908). *A course of pure mathematics*. 10ª ed. Cambridge: University Press, 1908.

Katz, M.; Tall, D. (2011). The tension between intuitive infinitesimals and formal mathematical analysis. In: Bharath Sriraman, Editor. *Crossroads in the History of Mathematics and Mathematics Education*. The Montana Mathematics Enthusiast Monographs in Mathematics Education 12, Information Age Publishing, Inc., Charlotte, NC, 1-19.

Körner, T. W. (1908). Foreword. In: G. H. Hardy, *A course of pure mathematics, Cambridge,* University Press, v.- xi.

Lima, E. L. *Curso de análise*. V. 1. 7ª ed. Rio de Janeiro: Projeto Euclides, Sociedade Brasileira de Matemática.

O'Connor, J. J; Robertson, E. F. (2003). *John Edensor Littlewood*. Disponível em: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Littlewood/. Acesso em 8 de fev. 2024.

Pinto, M. M. F., & Tall, D. O. (1999). Student constructions of formal theory: Giving and extracting meaning. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of PME*, Haifa, Israel, 4, 65–73.

Spivak, M. (1992). Cálculo Infinitesimal.2ª ed. Barcelona: Editorial Reverté.

Snow, C. P. (2000). Introdução. In G. H. Hardy. *Em defesa de um matemático*. São Paulo: Martins Fontes.

Tall, D. (2013). *How humans learn to think mathematically*. Cambridge: University Press.

Weber, K. (2004) Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course, *Journal of Mathematical Behavior*, 23, 115–133.

NOTAS DA OBRA

TÍTULO DA OBRA
O Conceito de limite segundo Godfrey Harold Hardy (1908) e Elon Lages Lima (1976)

Circe Mary Silva da Silva
Maior titulação acadêmica: doutorado
Universidade de Bielefeld, Faculdade de Matemática, Bielefeld, Alemanha
cmdynnikov@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-4828-8029

Endereço de correspondência do principal autor
Rua dos Tucanos 57 ap. 403, Bairro Quinta da Serra, Canela cep: 95681-045.

AGRADECIMENTOS
Oclide Dotto

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Obra individual

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
CNPq - Chamada CNPq/MCTI/FNDCT No 18/2021 - Faixa A - Grupos Emergentes
Processo: 403837/2021-9

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica

CONFLITO DE INTERESSES
Informar conflitos de interesse: financeiros, pessoais, entre possíveis revisores e editores, e/ou possíveis vieses temáticos. Se não houver, mencionar: Não se aplica. Para mais informações: https://www.abecbrasil.org.br/arquivos/whitepaper_CSE.pdf

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 11-04-2024 – Aprovado em: 02-10-2024