Artigo Original

REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

CONHECIMENTO DO RACIOCÍNIO PROPORCIONAL E SEU ENSINO: UM ESTUDO SOBRE O USO DE TABELAS E MATERIAIS MANIPULÁVEIS

Knowledge Of Proportional Reasoning And Its Teaching: A Study On Tables And Manipulative Materials

Angelica da Fontoura Garcia SILVA
Universidade Unopar Anhanguera, Paraná, Brasil
angelicafontoura@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-2435-9240

Helena do Carmo Borba MARTINS
Colégio Adventista da Liberdade
helenacbm.martins@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-9894-3020

Ruy Cesar PIETROPAOLO
Universidade Unopar Anhanguera, Paraná e Unian São Paulo, Brasil
rpietropaolo@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1353-2191

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo

RESUMO

Esta pesquisa visa a identificar e compreender os conhecimentos profissionais dos professores que ensinam Matemática nos anos iniciais a respeito do desenvolvimento do Raciocínio Proporcional entre seus alunos, por meio da discussão coletiva sobre o uso de tabelas e materiais manipuláveis durante a resolução de duas situações-problema. A pesquisa utiliza como referencial teórico o modelo multidimensional de domínio do conhecimento matemático para o ensino, proposto por Ball, Thames e Phelps, que categoriza os conhecimentos profissionais dos professores que ensinam a disciplina. Os procedimentos metodológicos adotados envolvem uma abordagem qualitativa, que emprega dados coletados durante uma sessão de estudo em grupo com seis professoras que ensinam Matemática nos anos iniciais. As atividades propostas durante a sessão de estudos demandam reconhecer e usar os princípios da proporcionalidade. Observou-se que as estratégias de resolução adotadas pelas professoras para resolver a situação envolveram, inicialmente, a utilização de cálculo mental e representações visuais. Identificam-se dificuldades das professoras em operar com números racionais e proporções, mas também se observou o desenvolvimento do raciocínio proporcional ao longo da discussão e da reflexão em grupo. A aplicação de recursos como materiais manipuláveis e tabelas de proporção, propostas por Lamon, foi reconhecida como uma ferramenta eficaz para auxiliar o ensino de números racionais e favorecer o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

Palavras-chave: Educação Matemática, Formação de Professores, Anos Iniciais, Proporcionalidade

ABSTRACT

This research aims to identify and understand the professional knowledge of teachers who teach mathematics in the early years regarding the development of proportional reasoning among their students through collective discussion on tables and manipulative materials during the resolution of two problem situations. The research uses the multidimensional model of mastery of mathematical knowledge for teaching as a theoretical framework proposed by Ball, Thames, and Phelps, categorizing the professional knowledge of teachers who teach the subject. The methodological procedures adopted involve a qualitative approach, using data collected during a group study session with six teachers who teach mathematics in the initial years. The activities proposed during the study session require recognizing and using the principles of proportionality. The strategies adopted by the teachers to solve the situation initially involved mental calculations and visual representations. Teachers' difficulties in operating with rational numbers and proportions were identified, but the development of proportional reasoning was also observed throughout the discussion and group reflection. The application of resources such as manipulative materials and proportion tables, proposed by Lamon, was an effective tool to help teach rational numbers and encourage the development of proportional reasoning.

Keywords: Mathematics education, Teacher education, Early years, Proportionality

1 INTRODUÇÃO

O Raciocínio Proporcional (RP) desempenha um papel significativo em muitas atividades humanas e está intrinsecamente ligado a várias áreas do conhecimento científico. Esta significância é corroborada por documentos oficiais brasileiros, que não apenas endossam a utilidade do raciocínio proporcional na interpretação de fenômenos do mundo real, mas também o integram como elemento fundamental no processo cognitivo. Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) de 1997 e a recente Base Nacional Comum Curricular (BNCC) de 2018 destacam a centralidade da proporcionalidade, incorporando-a em todos os Blocos de Conteúdo ou Unidades Temáticas da área matemática.

Nesse contexto, tanto os PCN quanto a BNCC enfatizam a seleção de temas baseados no RP, priorizando sua aplicação prática e o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Estudos como os de Lesh, Post e Behr (1988) e Lamon (2006) ratificam a complexidade do raciocínio proporcional, abordando a sensação de covariação, comparações múltiplas e processamento de informações. Assim, o raciocínio proporcional transcende a mera aplicação de regras, sendo uma habilidade complexa que demanda análises qualitativas e quantitativas.

Lamon (2006) aprofunda essa questão ao identificar habilidades específicas que os alunos devem desenvolver, tais como entender a covariação de grandezas e a capacidade de reconhecer situações proporcionais, bem como justificar o pensamento proporcionalmente. A relevância de explorar o conceito de proporcionalidade desde os primeiros anos da Educação Básica também é ressaltada em estudos nacionais como os de Spinillo (1992, 2002), por exemplo. A autora destaca a compreensão intuitiva das crianças sobre o tema, especialmente em relação à ideia de "metade", muitas vezes subutilizada ao longo da trajetória escolar delas.

Como bem pontuam Garcia Silva, Campos e Pietropaolo (2011), o papel do professor no ensino da Matemática é muito relevante, pois ele é o principal ator no planejamento do trabalho pedagógico em sala de aula. Em vista disso, cabe investigar os conhecimentos desse profissional para orientar o ensino.

Nesse contexto, torna-se relevante realizar uma investigação voltada a identificar e compreender os conhecimentos dos professores que lecionam Matemática nos anos iniciais sobre o RP, quando estudam em grupo tal temática. Em sendo assim, foram examinadas situações de aprendizagem e atividades que promovessem esse tipo de pensamento, incentivando reflexões sobre o ensino do RP no ambiente escolar. Antes de descrever os procedimentos utilizados, vamos apresentar os pressupostos teóricos utilizados nesta pesquisa.

2 MARCO TEÓRICO

Na análise dos conhecimentos matemáticos para o ensino (MKT), baseamo-nos em princípios delineados por Ball, Thames e Phelps (2008). Na Figura 1, é apresentado um modelo multidimensional de domínio do conhecimento matemático que os pesquisadores categorizaram como essenciais para a docência.

Figura 1

Modelo apresentado por Ball, Thames e Phelps

Fonte: Adaptado de Ball, Thames e Phelps (2008, p. 403)

Eles delineiam os conhecimentos profissionais do professor de Matemática em seis categorias distintas: Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), Conhecimento do Conteúdo no Horizonte (HCK), Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK), Conhecimento do Conteúdo e do Estudante (KCS), Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT) e Conhecimento do Conteúdo e do Currículo (KCC). Neste estudo, concentraremos nossa análise em três dessas categorias em particular: Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK), Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS) e Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT), as quais serão explicadas a seguir.

Conforme Ball, Thames e Phelps (2008), o Conhecimento Comum do Conteúdo (CCK) abarca o domínio dos conceitos matemáticos que todos os profissionais, inclusive aqueles fora da área de ensino, deveriam possuir. O Conhecimento do Conteúdo e dos Estudantes (KCS) requer do professor um entendimento tanto da Matemática quanto dos alunos, incluindo a habilidade de compreender o raciocínio matemático deles, prever possíveis erros e identificar métodos para resolver problemas.

O Conhecimento do Conteúdo e do Ensino (KCT) pressupõe que o professor tenha uma compreensão aprofundada dos conteúdos matemáticos específicos, bem como uma clara visão sobre as práticas de ensino. Isso implica entender o propósito de ensinar um determinado conteúdo, decidir sobre a melhor abordagem para sua introdução, estabelecer uma sequência adequada para o desenvolvimento da compreensão, incluindo selecionar, organizar e adaptar tarefas e materiais, escolher situações de aprendizagem introdutórias e avançadas e saber quando e como apresentar atividades complementares.

Essa categoria está intimamente relacionada aos recursos que o professor emprega durante o planejamento do ensino, representando uma integração entre o domínio dos conteúdos matemáticos específicos e a compreensão das questões pedagógicas. Na visão de Ball, Thames e Phelps (2008), esse conhecimento é a intersecção entre o conhecimento matemático e o conhecimento sobre como ensiná-lo. Neste estudo, buscaremos identificar e analisar esses conhecimentos, evidenciados durante uma sessão de estudo em grupo.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Este estudo, que adota uma abordagem qualitativa, integra a investigação conduzida no âmbito de uma dissertação de mestrado, conduzida por Martins (2022). A pesquisa recebeu aprovação da comissão de ética do sistema CEP/Conep, identificada pelo número de registro CAEE 43483721.1.0000.5493 e parecer 4.657.800.

O conjunto de participantes foi composto por seis docentes responsáveis pelo ensino de Matemática nos primeiros anos de uma instituição privada, localizada em uma cidade na região metropolitana de São Paulo, Brasil. Para preservar suas identidades, serão designadas pelas abreviações: PA, PB, PC, PD, PF e PG. Todas as professoras possuem formação em Pedagogia. Quatro delas também concluíram cursos de especialização relacionados a sua prática profissional (PA, PB, PD e PG), enquanto uma detém um título de doutorado em Educação, com ênfase em Inclusão (PD). Quanto a sua trajetória profissional, o grupo possui menos de uma década de experiência no ensino, sendo duas professoras com menos de um ano de experiência (PB e PF).

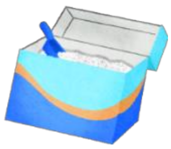
Os dados examinados neste estudo foram obtidos durante uma das sessões de estudo, por meio de anotações feitas pelas professoras durante a resolução de duas propostas, bem como por meio da gravação em vídeo da referida sessão, posteriormente transcrita. A sessão ocorreu de forma híbrida, com cinco delas professoras participando presencialmente e uma de forma remota (PD), devido aos efeitos da pandemia de Covid-19. Durante essa sessão, foram apresentadas e discutidas duas situações – representadas na Figura 2 – com o grupo de professoras.

Figura 2

Situações discutidas no encontro

Atividade 3- Para um jantar, você planejou preparar 2 kg de macarrão para 8 pessoas, porém 10 pessoas estão vindo. Que quantidade em quilogramas, você deve preparar para manter a quantidade planejada para cada convidado?

Atividade 4- Se uma caixa de detergente em pó contém 80 medidas do pó e a sua máquina recomenda $1\frac{1}{4}$ medidas por lavagem, quantas lavagens serão possíveis com uma caixa desse detergente?



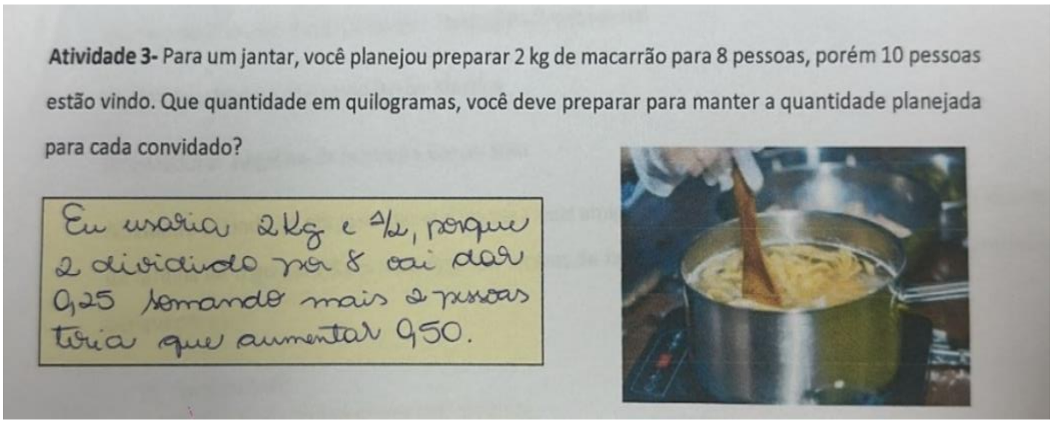
Fonte: Atividade 1 adaptada de Bryant et al. (2012, p. 46) e atividade 2 adaptada de Lamon (2006, p. 14, tradução nossa)

Observando as atividades, é evidente que ambas as situações demandam reconhecer e usar os princípios da proporcionalidade. Além disso, é notável que a resolução da primeira situação requer o cálculo proporcional com números inteiros, enquanto a segunda envolve operações com números racionais, sobretudo, com frações impróprias. Acreditamos que isso poderia aumentar o nível de dificuldade da segunda situação (Siebert, 2015).

. ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Propusemos ao grupo discutir as estratégias de resolução da situação-problema do jantar. Ao ter dificuldade com a alteração na quantidade de macarrão, PB declarou: “*Agora percebo o quanto eu cozinho a olhômetro*”. Logo, afirmou que colocaria mais meio pacote. Não conseguia encontrar um caminho para fazer o cálculo correto do aumento do macarrão seguindo a proporção da receita até que, após um tempo, buscando meios de resolução, chegou à resposta correta. Para tanto, valeu-se de cálculo do valor unitário, relacionando a quantidade de macarrão com o número de pessoas que participariam do jantar, conforme o protocolo da Figura 3:

Figura 3
Protocolo de PB


Atividade 3- Para um jantar, você planejou preparar 2 kg de macarrão para 8 pessoas, porém 10 pessoas estão vindo. Que quantidade em quilogramas, você deve preparar para manter a quantidade planejada para cada convidado?

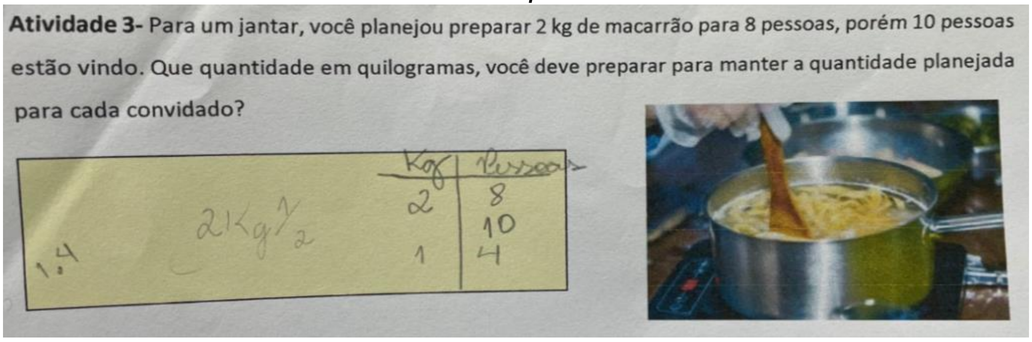
Eu usaria 2kg e 1/2, porque 2 dividido por 8 vai dar 0,25 somando mais 2 pessoas teria que aumentar 0,50.

Fonte: Dados da pesquisa

PD se utilizou do valor unitário. A participante declarou que fez uma divisão e encontrou o valor de massa em kg para uma pessoa e depois multiplicou por 10 pessoas. Discutimos sobre o fato de essa ser uma das estratégias de resolução, mas lançamos o desafio para que o grupo encontrasse outras formas de representar as resoluções dessa situação. Nos registros escritos por PA, é possível observar que ela igualmente utilizou do cálculo unitário. Todavia, após as discussões sobre a proposta de Lamon (2006) de utilizar tabelas para ajudar a pensar proporcionalmente sobre grandezas envolvidas, a professora usou uma tabelinha de proporções, acrescentada no protocolo (Figura 4).

Figura 4

Protocolo de PA para a atividade 3



Atividade 3- Para um jantar, você planejou preparar 2 kg de macarrão para 8 pessoas, porém 10 pessoas estão vindo. Que quantidade em quilogramas, você deve preparar para manter a quantidade planejada para cada convidado?

1,4

2Kg/2

Kg	Pessoas
2	8
	10
1	4

Fonte: Dados da pesquisa

Analisando o protocolo, é possível perceber que a primeira resposta – a da esquerda – registra apenas o resultado do valor unitário, sem a descrição dos procedimentos utilizados. Na segunda resposta, a participante tentou usar o esquema da tabelinha, mas não deu continuidade à anotação. Assim, não pudemos aferir se ela identificou corretamente um meio de resolução naquele momento por meio da utilização da estratégia, proposta por Lamon (2006). Essas dificuldades, ao lidar com frações e números racionais, estão em consonância com as ideias de Spinillo (1992, 2002), que destaca a importância de conceitos intuitivos, como a ideia de "metade", no desenvolvimento do raciocínio proporcional. A autora sugere que o desenvolvimento desse tipo de raciocínio se constrói inicialmente a partir de noções simples, como "metade", com frequência subutilizadas no contexto escolar. No presente estudo, essa observação reforça a necessidade de explorar tais noções intuitivas para promover maior compreensão de operações com números racionais, tanto para os professores quanto para os alunos. Ao integrar essas ideias no ensino, é possível ampliar o entendimento do raciocínio proporcional de forma mais consistente desde os anos iniciais.

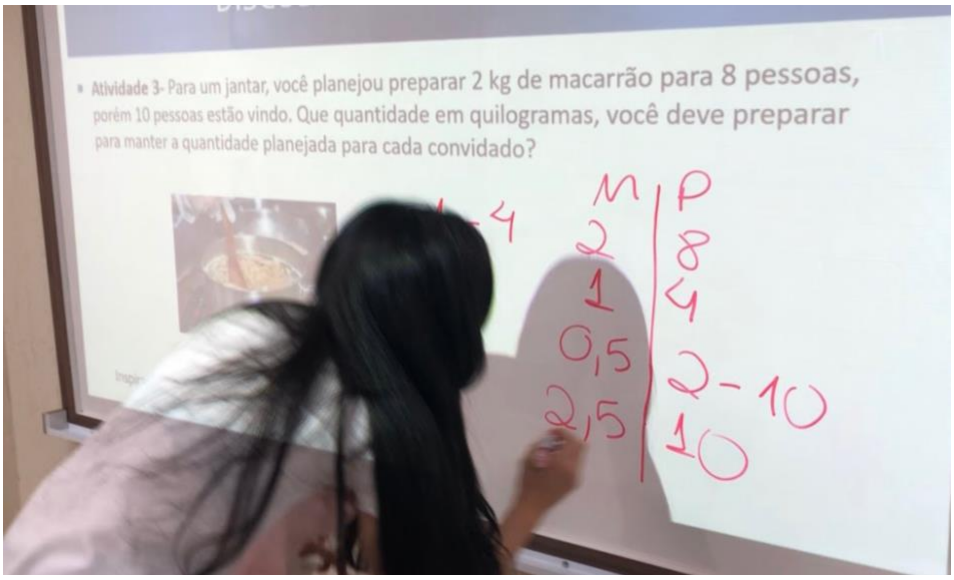
Convidamos PB e PF para uma resolução estruturada na lousa para discutirmos coletivamente a partir do registro, conforme proposto por Lamon (2006), a utilização da tabela. Para alimentar as discussões e as reflexões do grupo, a pesquisadora realizou perguntas que fizessem as participantes pensarem de modo indutivo ao raciocínio, por exemplo:

Protocolo de áudio e vídeo 18: Discussão sobre esquemas de cálculo em RP
Pesquisadora para PF: *Percebeu as grandezas que estão sendo comparadas no problema?*
PF: *Ainda não...*
Pesquisadora: *Olha..., uma é quantidade de macarrão. E a outra?*
PF: *São as pessoas...*
Pesquisadora: *Isso, então faça o registro.*
PF: *Está difícil, não sei como continuar...*
Pesquisadora: *Então, vamos dissecar essa relação entre o 2 e o 8. E se fosse 1 kg de macarrão?*
PF: *Ah..., 4 pessoas..., já consegui visualizar... como continuar... Então, é 1 kg de macarrão para 4 pessoas e 0,5 kg de macarrão para 2 pessoas.*

Seguem as resoluções da participante na lousa (Figura 5):

Figura 5

Participante PF resolvendo a situação problema na lousa



Fonte: Dados da pesquisa

As participantes, nesse momento, concluíram que o uso da tabela poderia auxiliá-las na resolução e ampliar a compreensão do problema, proporcionando também respostas que nem haviam sido solicitadas. PA falou: “*Nossa, essa forma de pensar ajuda a gente a pensar na proporção, não é?*”. PC, por sua vez, respondeu: “*Verdade, vendo a forma como PF resolveu, eu vi um jeito de ensinar meus alunos a registrar*”. As participantes finalizaram a resolução do problema com mais confiança em utilizar essa forma de registro e vislumbraram a possibilidade de desenvolver com seus alunos esse tipo de raciocínio: *“Com essa tabela, eu também acho que consigo ir além, mostrando essa forma de pensar”* (PC). Analisando a utilização desse recurso, conforme sugerido por Lamon (2006), sob a perspectiva do Conhecimento Especializado do Conteúdo de Ball, Thames e Phelps (2008), consideramos que o uso de tabelas pode ser visto como mais uma possibilidade de ferramenta para desenvolver o RP das professoras e futuramente de seus alunos.

Na sequência da discussão, discutimos a situação-problema 2 a partir do enunciado: “Se uma caixa de detergente em pó contém 80 medidas do pó e a sua máquina recomenda $1\frac{1}{4}$ medidas por lavagem, quantas lavagens serão possíveis com uma caixa desse detergente?”

> Protocolo de áudio e vídeo 19: Discussão sobre esquemas de cálculo em RP
>
> PG: *Dá 100?*
> Pesquisadora: *Será?*
> PG: *Não é? Como não?*
> Pesquisadora: *Vamos ver, se quantidade de sabão para cada lavagem é mais do que 1 medida por lavagem, 1 e ¼. A quantidade de lavagens pode ser maior do que a quantidade de medidas existente na caixa?*
> *PG: Nossa, pelo contrário, deve ser menor. Então, tenho de dividir o 1 em 4?*
> Pesquisadora: *Pode ser, para achar o ¼ em valor decimal.*

Enquanto PG tentava trabalhar com o número misto, outras participantes preferiram trabalhar com o valor racional de 1¼ em decimal.

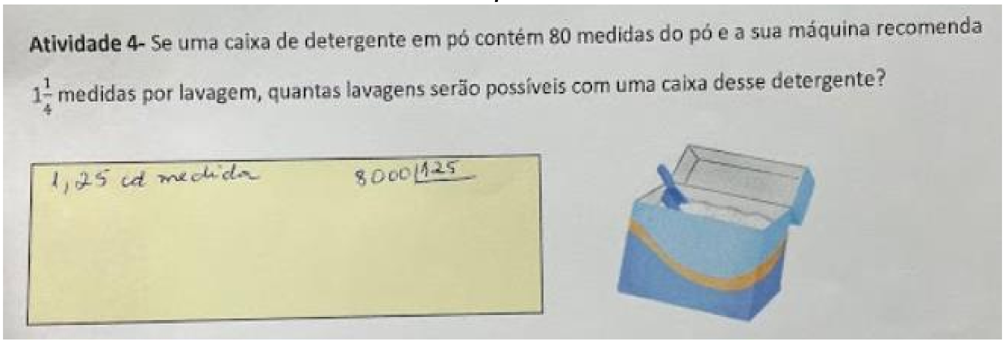
> Protocolo de áudio e vídeo 20: Discussão sobre esquemas de cálculo em RP
> PC: *Transformei a fração em número decimal, e ficou 8000 dividido por 125. Posso transformar em número decimal para fazer a conta, mas eu não sei...*
> Pesquisadora: *Ok, pode ser resolvido desse modo.*
> PB: *Sabe o que acontece para mim? Quando entra esse ¼ da medida, eu começo a tentar buscar alguma coisa visual...*
> PC: *Eu não consegui formar algo visual para resolver o problema...*

É possível perceber que as participantes tentavam transitar pelas diferentes representações dos números racionais, mas ainda encontravam dificuldade. PB, por exemplo, deixou a atividade em branco.

PC iniciou tentando utilizar a representação decimal e representou seus cálculos por meio de uma divisão para identificar o valor unitário. A professora procurou identificar quantas medidas de sabão para uma lavagem cabiam na caixa, raciocínio correto. No entanto, ela não resolveu a operação, possivelmente por não conseguir visualizar o valor da resposta inserido no contexto do problema, como vemos na Figura 6.

Figura 6

Protocolo de PC para a atividade 4


Atividade 4- Se uma caixa de detergente em pó contém 80 medidas do pó e a sua máquina recomenda $1\frac{1}{4}$ medidas por lavagem, quantas lavagens serão possíveis com uma caixa desse detergente?

1,25 cd medida   8000|125

Fonte: Dados da pesquisa

Essa estratégia também foi utilizada por PA (8000 : 125). A professora obteve o resultado de 64 lavagens, utilizando-se do significado de medida. Observamos que PA foi a única docente que chegou à conclusão correta na primeira tentativa (antes de estudarmos a estratégia proposta por Lamon, 2006). Podemos ver, no protocolo apresentado por PA, tal solução no lado esquerdo do papel (Figura 5).

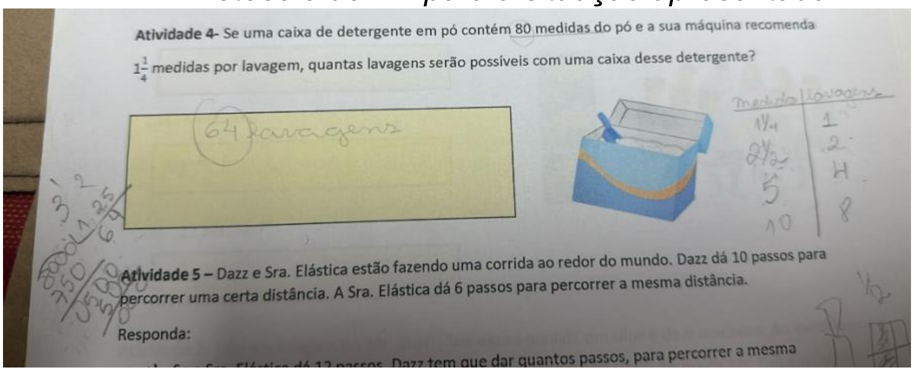
Ela afirmou:

> Protocolo de áudio e vídeo 21: Discussão sobre esquemas de cálculo em RP
> PA: *Eu estava em dúvida se o resultado seria razoável e correto, por isso preenchi fora do campo de resolução. Como eu não queria errar, mantive a folha da atividade comigo e* [...], *depois de descobrir o cálculo pela tabelinha, eu escrevi outra forma de resolução aqui* [apontando para o lado direito do protocolo].

A imagem do que descrevemos aqui é apresentada na Figura 7.

Figura 7

Protocolo de PA para a situação apresentada


Atividade 4- Se uma caixa de detergente em pó contém 80 medidas do pó e a sua máquina recomenda $1\frac{1}{4}$ medidas por lavagem, quantas lavagens serão possíveis com uma caixa desse detergente?

64 lavagens

medida	lavagens
1¼	1
2½	2
5	4
10	8

Atividade 5 – Dazz e Sra. Elástica estão fazendo uma corrida ao redor do mundo. Dazz dá 10 passos para percorrer uma certa distância. A Sra. Elástica dá 6 passos para percorrer a mesma distância.

Responda:

Fonte: Dados da pesquisa

Ainda trabalhando nessa atividade, a pesquisadora conversou com PD, que estava *on-line* no aplicativo (*Teams*), para verificar se conseguia resolver o problema do sabão.

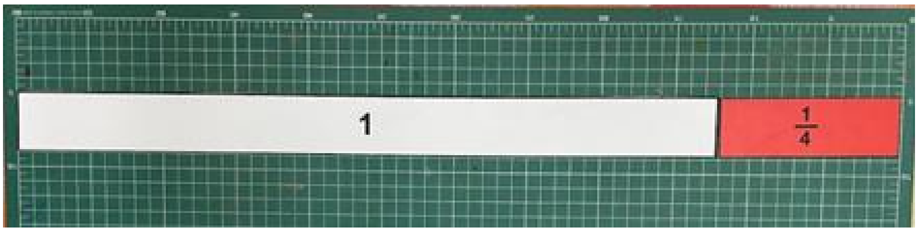
Protocolo de áudio e vídeo 22: Discussão sobre esquemas de cálculo em RP
PD: *São 20 lavagens?*
Pesquisadora: *O número de 20 lavagens, você pensou como?*
PD: *Eu pensei na quantidade de 80, aí eu dividi pelo denominador da fração, e multipliquei pelo numerador.*
Pesquisadora: *Ah..., sim, você fez aritmeticamente, entendi...*
PD: *Meu raciocínio, eu acho, que dá 20 lavagens...*
Pesquisadora: *Na verdade, o que você tem é que, para uma lavagem, eu preciso de 1 medida e* $\frac{1}{4}$*. Então, para duas lavagens, eu vou utilizar quanto?*
PD: *Espere...*
Pesquisadora: *Tente usar a tabelinha, 1 lavagem, 2 lavagens, tenta dobrar...*
PD: *São 2 e meio?*
Pesquisadora: *Isso mesmo; então, tenta descobrir agora a quantidade de sabão para 4 lavagens.*
PD: *São 5 medidas, né? Ah... Então não são 20 lavagens, vai dar mais... Ah... Vou fazer o cálculo.*
Dá 64 lavagens? É isso?
Pesquisadora: *Isso!*
PD: *Olha, eu estou muito feliz por ter conseguido.*

No diálogo entre a pesquisadora e PD, observamos inicialmente uma abordagem aritmética por parte de PD, que se apoia na divisão tradicional entre numerador e denominador da fração para tentar resolver o problema. No entanto, essa estratégia, embora correta em termos numéricos, não a levou diretamente à resposta correta de 64 lavagens. A troca entre a pesquisadora e PD evidencia a importância de outras abordagens pedagógicas, como o uso de tabelas de proporcionalidade, que ajudam a visualizar a resolução de problemas, conforme sugerido por Lamon (2006). Ao incentivar PD a “dobrar” as medidas e usar a tabela, a pesquisadora facilitou a construção de um RP mais estruturado, permitindo que PD chegasse à resposta correta.

Esse processo também reflete o desenvolvimento do Conhecimento Especializado do Conteúdo de PD, uma vez que ela, com o auxílio da tabela, conseguiu visualizar e aplicar o conceito de multiplicação proporcional de forma mais clara. De acordo com Ball, Thames e Phelps (2008), o SCK envolve o domínio de métodos e estratégias matemáticas que vão além da simples aplicação de fórmulas, sendo essenciais para o ensino eficaz da Matemática. O fato de PD demonstrar satisfação com sua própria evolução (“*Olha, eu estou muito feliz por ter conseguido*”) é indicativo de que a experiência colaborativa e o uso de representações visuais foram fundamentais para promover uma compreensão mais profunda do problema.

PG não desenvolveu o problema de imediato e partiu para a discussão junto com a colega PF. Ao observar que algumas participantes estavam com dificuldades de visualizar a representação fracionária, a pesquisadora apresentou um material que permitiu a visualização concreta do número $1\frac{1}{4}$. A Figura 8 ilustra a imagem do material utilizado.

Figura 8
Material de apoio: Frações

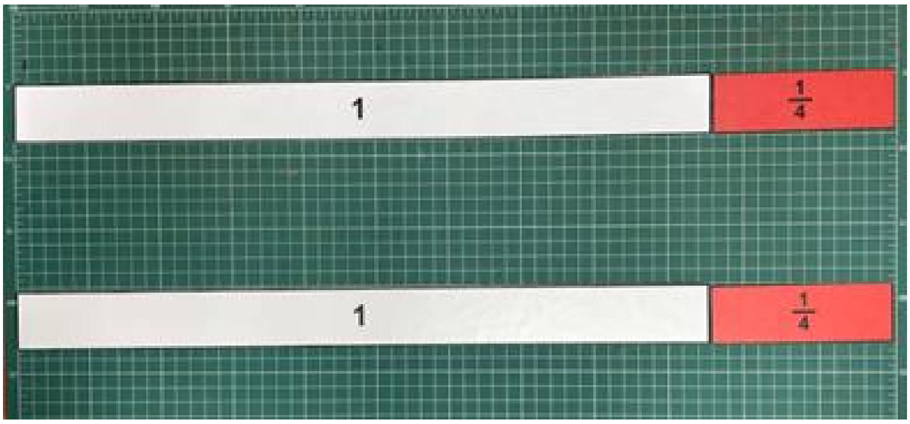


Fonte: Dados da pesquisa

Pesquisadora: *Aqui está a representação do valor* $1\frac{1}{4}$

Continuando a análise da manipulação de materiais por PF e PG, notamos que, ao ver o suporte de imagem, PG conseguiu pensar proporcionalmente, analisando as barras, e declarou que visualizou a quantidade de sabão de uma lavagem. Então, continuamos a conversa com a pergunta feita pela pesquisadora: "*Para duas lavagens, qual a quantidade necessária de sabão?*". Nesse momento, a participante passou a manusear o material, montando uma representação para a quantidade de sabão de duas lavagens (Figura 9):

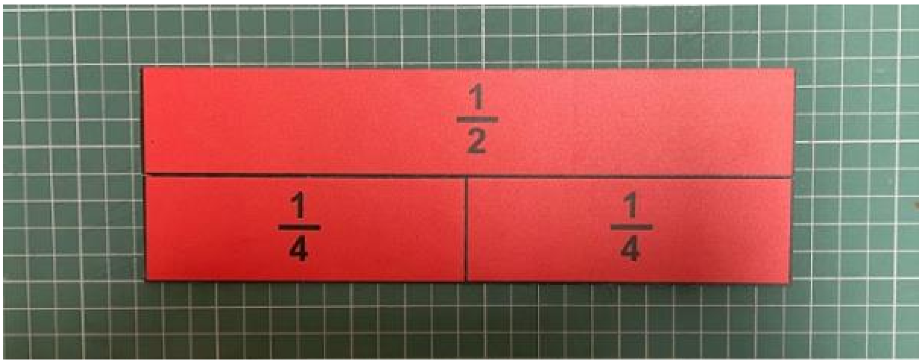
Figura 9
Material de apoio: Frações



Fonte: Dados da Pesquisa

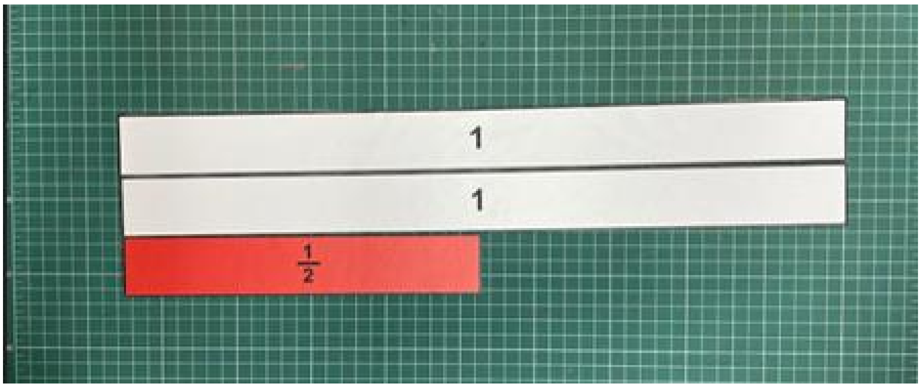
Pesquisadora: *Quanto vale a soma* $1\frac{1}{4} + 1\frac{1}{4}$ *? Observem as trocas das peças e façam as movimentações necessárias.*

Figura 10
Material de apoio: Frações: primeira movimentação feita por PG



Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 11 – *Material de apoio – Frações: representação do resultado da soma, organizado por PG*



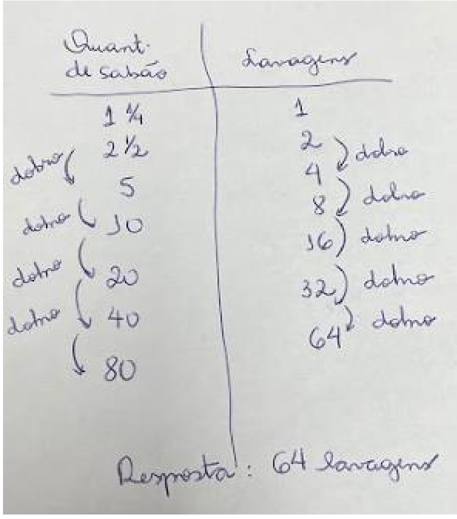
Fonte: Dados da pesquisa

Analisando o ocorrido, observamos que a utilização de materiais manipuláveis foi essencial para ajudar PF e PG a visualizarem e compreenderem o conceito de frações impróprias, como 1 1/4, em um contexto proporcional. Ao manipular as barras representando as frações, PG conseguiu "ver" a quantidade de sabão necessária para uma lavagem e, em seguida, para duas lavagens, desenvolvendo um raciocínio proporcional mais claro. Esse uso de recursos concretos, conforme sugerido por Lamon (2006), facilita a transição do pensamento abstrato para o concreto, permitindo que as participantes compreendam frações de forma prática. A manipulação física dos materiais revelou-se uma estratégia eficaz para promover o entendimento do conceito proporcional entre as professoras, melhorando sua capacidade de raciocinar sobre frações.

Após a observação da movimentação do material concreto, PG percebeu um modo de resolver o problema. Passou a completar a tabela em um bloquinho pessoal que encaminhava para a resposta e a concluiu corretamente (Figura 12).

Figura 12

Resolução desenvolvida por PG



Fonte: Dados da pesquisa

O fato que chamou a atenção foi que, sem a representação das frações por meio do material, PF, PG e PB, que estavam juntas, não visualizavam um modo de resolução. PG declarou: "*Quando eu vi a representação concreta, eu soube como resolver o problema e fui até o final*". PF disse:

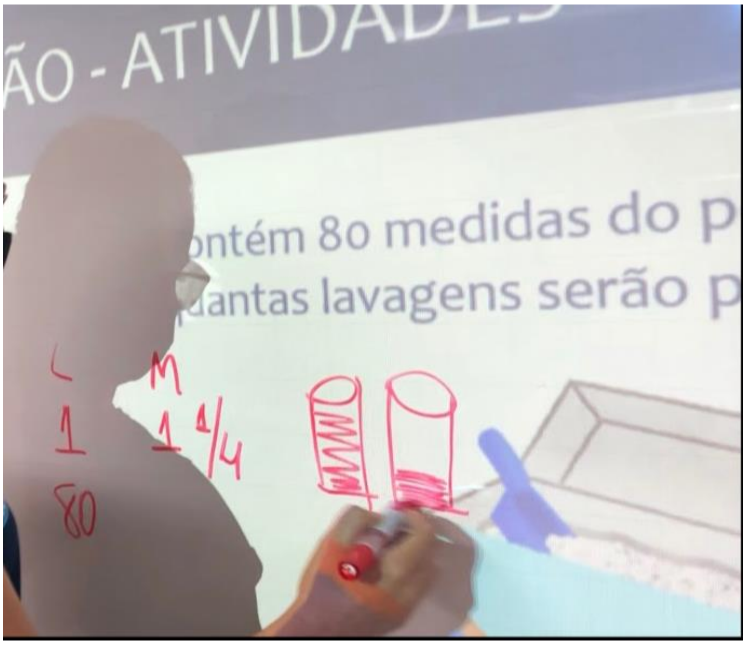
> Protocolo de áudio e vídeo 23: Discussão sobre esquemas de cálculo em RP
> PF: *Eu fiquei perdida, não conseguia visualizar que tinha que dobrar a fração* $\mathbf{1\frac{1}{4}}$, *e que o dobro disso seria* $\mathbf{2\frac{1}{2}}$, *mas, depois de enxergar o 5 como dobro de* $\mathbf{2\frac{1}{2}}$, *eu consegui continuar, fui sempre dobrando até chegar na quantidade de lavagens com 80 medidas de sabão. A tabela foi uma ótima ideia, mas eu não tinha destreza em trabalhar com números fracionários.*
> PB, ao ouvir essa discussão, também questionou: *Por que precisa dobrar? Eu ainda não consigo visualizar...*
> E PF respondeu:
>
> Protocolo de áudio e vídeo 24: Discussão sobre esquemas de cálculo em RP
> PF: *O valor de* $\mathbf{1\frac{1}{4}}$ *serve para uma lavagem. Para duas lavagens, preciso do dobro da quantidade, são* $\mathbf{2\frac{1}{2}}$, *e assim por diante. O material concreto salvou, porque me ajudou a ver que cabiam duas fichas de* $\mathbf{\frac{1}{4}}$ *, isso fez com que eu percebesse que, se eu dobrasse* $\mathbf{\frac{1}{4}}$, *daria* $\mathbf{\frac{1}{2}}$ *daí eu pensei 2 e meio mais 2 e meio dá 5, mas, para eu conseguir visualizar isso, eu também precisei do material concreto.* PB respondeu: *Ah..., aí vai dobrando até chegar em 80.*
> A participante foi convidada para ir para a lousa e registrar a resolução dessa atividade. Ela montou o problema com os dados do enunciado.
>
> Protocolo de áudio e vídeo 25: Discussão sobre esquemas de cálculo em RP
> PB: *Eu lembro da regrinha de 3 da escola, mas não é isso, né?*
> Pesquisadora: *Por que você acha que é regra de 3?*
> PB: *Visualmente me lembra a regra de 3, encontre o valor de x.*

Pesquisadora: *Será que colocando um x aí daria certo?*
PB: *Não daria...*
Pesquisadora: *Por que não? Quando esse esquema dá certo?*
PB: *Eu não sei quando dá certo ou não...*
Pesquisadora: *Então vamos tentar encontrar um meio de resolver isso com as crianças dos anos iniciais, sem usar o "x".*
PB: *Com as crianças, teríamos que desenhar as frações para termos uma representação visual para eles...*
Pesquisadora: *Faça um desenho então...*

Observemos os protocolos de PB na lousa (Figura 13):

Figura 13

Resolução do problema 4 desenvolvida por PB



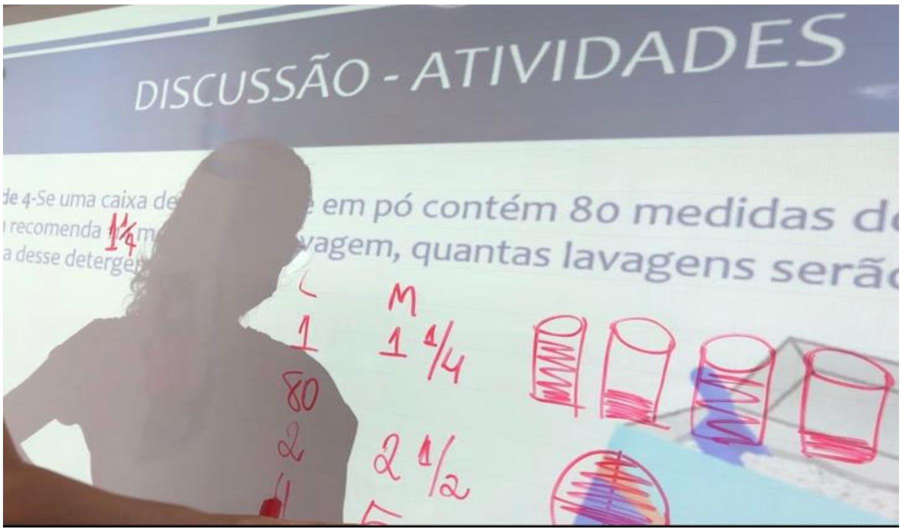
Fonte: Dados da pesquisa

Protocolo de áudio e vídeo 26: Discussão sobre esquemas de cálculo em RP
PB: *Eu imagino o medidor...: 1 cheio e mais* $\frac{1}{4}$*...*
Pesquisadora: *Para duas lavagens, você precisaria de quanto? Desenhe novamente...*
PB: *Eu tenho* $\frac{2}{8}$*?*
Pesquisadora: *Olhe o seu desenho... e junte as quantidades... Quanto dá* $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}$ *?*
PB: $\frac{2}{8}$?
Pesquisadora: *Faça outro desenho onde você possa marcar o* $\frac{1}{4}$ *duas vezes juntas*.
PB: *Ah... Com os meus alunos, a gente faz assim: quero tirar* $\frac{1}{4}$ *de 80 balas.*
Pesquisadora: *Mas e o valor de* $\frac{1}{4}$ *em si? Como você ensina?*
PB: *Assim, por esse desenho.*
Pesquisadora: *Isso mesmo, então pense que esse desenho representa o medidor de pó. Será então um inteiro mais essa quantidade de pó para uma lavagem... Então, para duas lavagens, vai dar que número?*

Vejamos mais um protocolo de PB na lousa (Figura 14):

Figura 14

Continuação da resolução do problema 4 por PB



Fonte: Dados da pesquisa

Protocolo de áudio e vídeo 27: Discussão sobre esquemas de cálculo em RP
PB: *Vai dar* $\mathbf{2\frac{1}{2}}$ *...*
Pesquisadora: *E seu dobrar esse valor para 4 lavagens?*
PB: *Como é difícil dobrar isso, gente...*
PG: *Faça o desenho...*
PB: *Ah..., aí deu 5 medidas de pó. Ah..., aí eu vou aumentando até chegar no 80? Aí eu poderia multiplicar?*
PA: *Sim, isso mesmo, pode multiplicar, o que você fizer de um lado, faça a mesma coisa do outro*
PB: *Por exemplo, se 4 lavagens dão 5 medidas de pó, se eu pegar 76, que é o restante que falta, e fazer vezes 5 ou não?*
Pesquisadora: *Não, você precisa trabalhar sempre na mesma proporção, não é a diferença aditiva.*
PB: *Olhando para esses números, eu tenho 8 para chegar no 80, posso acrescentar um 0?*
Pesquisadora: *O que seria esse 0 acrescentado?*
PB: *Eu pensei na multiplicação...*
Pesquisadora: *Sim, é multiplicação... Então continue.*
PB: *Não teria um caminho mais fácil?*
Pesquisadora: *Pensar no dobro é um caminho fácil...*
PB: *Ah... Então são 8 para 10, 16 para 20, 32 para 40 e 64 para 80... Ah..., então são 64 lavagens...*
Todas as professoras: *Certo!*
PB: *Mas sobre a multiplicação? Eu não poderia usar para ir mais rápido?*
Pesquisadora: *Sim, poderia ter feito de 10 medidas direto para 80 medidas, por exemplo, quando chegou na relação 8 lavagens para 10 medidas, poderia ter multiplicado por 8 dos 2 lados.*
PB: *Ah... Olha, que fantástico isso!*
[Todas as professoras concordaram]

Ao final desse episódio, PB mostrou compreender que, para além da quarta proporcional, é possível utilizar meios aritméticos para trabalhar com as ideias de proporcionalidade e desenvolver o RP.

Nesse momento, nem todas as participantes ainda haviam compreendido a questão. Elas passaram a trocar ideias e explicaram suas resoluções umas para as outras por meio de desenhos de frações. O elemento-chave do problema foi transpor a quantidade de sabão de uma lavagem, que era um número misto, para uma quantidade que fosse visualizada e pensada mentalmente.

Esse fato revela que o conhecimento explicitado no âmbito das frações impróprias ficou dependente do suporte de imagem para ser compreendido. Este transitou pelas diferentes representações do número racional $\mathbf{1\frac{1}{4}}$ ou 1,25. Para algumas das participantes, isso estava claro; para outras, nem tanto. Utilizar a representação decimal foi um mecanismo de solução imediato para certas professoras, outras não haviam cogitado essa possibilidade e não havia mecanismo de resolução previamente concebido. A solução por meio de frações foi utilizada, apesar das dificuldades para prosseguir com o manuseio do número misto.

Nesse encontro, ocorreram muitas discussões para compreender os conceitos que envolveram a resolução do problema 4. As participantes sinalizaram não entender como realizar cálculos no âmbito dos Números Racionais. Foi possível identificar que o conhecimento explicitado não foi suficiente para encaminhar para uma solução. Da mesma forma, Siebert (2015)[1], em seu estudo, observa que algumas participantes desta pesquisa apresentaram dificuldades em compreender a representação gráfica do problema e a relação com o valor representado por número misto e número decimal. Houve dúvida sobre a conexão entre essas representações e a operação com o valor fracionário. Intencionando o pleno entendimento das participantes, utilizamos um bom tempo da sessão discutindo, manipulando materiais e desenhando as frações para alcançar a compreensão de todas as participantes do grupo.

Após as necessárias reflexões sobre a representação fracionária, propusemos a resolução por meio de RP, utilizando a tabelinha proposta por Lamon (2006). Ela foi bem aceita pelas participantes, que logo passaram a compartilhar a ideia com outras que ainda necessitavam de suporte para chegar ao processo de raciocínio estruturado e ao resultado, envolvendo as frações nessa ferramenta de resolução. Durante a realização da atividade,

[1] No decorrer de um processo formativo, Siebert (2015, p. 135) constata que "a representação e compreensão deste tipo de fração, fração imprópria, foi um dos conteúdos específicos que as professoras demonstraram maior dificuldade e as estratégias utilizadas por elas na resolução nos chamou a atenção."

foi detectada a insegurança de três professoras (PB, PD e PF) em operar com as duas grandezas ao mesmo tempo. Notamos uma tendência ao encaminhamento para o raciocínio aditivo, mesmo após a estruturação do raciocínio multiplicativo para a expansão dos valores.

Outrossim, verificamos, nesse encontro, uma ausência da utilização intuitiva do referencial de dobro e metade da parte de alguns participantes. Houve até um questionamento do porquê dobrar, o que revela uma limitação no Conhecimento Especializado do Conteúdo (SCK). Esse é um fato que desvela a importância deste referencial, pesquisado e discutido por Spinillo (1992)[2], a qual apresenta inúmeras razões para que esse conceito seja desenvolvido, pois é um dos primeiros alicerces do raciocínio aritmético para os significados da multiplicação, comparações e do RP. Analisar esse resultado, sob o ponto de vista de Ball, Thames e Phelps (2008), mostra-nos que a ausência de domínio desse conceito específico (RP envolvendo quantidades representadas por frações impróprias) implicaria igual ausência de conhecimentos para seu ensino.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo proposto visa a explorar e compreender os conhecimentos dos professores de Matemática dos anos iniciais para ressignificar suas práticas pedagógicas e estimular o desenvolvimento do raciocínio proporcional entre seus alunos. Para atingir esse objetivo, foram examinadas situações de aprendizagem e atividades que promovessem esse tipo de pensamento, estimulando reflexões sobre o ensino do raciocínio proporcional no contexto escolar.

Ao longo da pesquisa, fica evidente a importância de uma abordagem pedagógica que não apenas destaque os conceitos matemáticos, mas também leve em consideração o contexto prático e o desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Os resultados indicam que as professoras enfrentaram desafios, ao lidar com situações que envolvem o raciocínio proporcional, especialmente quando se trata de frações impróprias e operações com números racionais.

[2] "A importância do referencial de 'metade' em julgamentos sobre proporções: algumas evidências. Dois aspectos precisam ser considerados quanto ao uso deste referencial por parte de crianças. Um é que as crianças podem usar os limites entre 'mais que metade', 'menos que metade' e 'igual a metade' ao comparar dimensões complementares nas relações de primeira ordem. O outro é que as crianças tratam 'metade' inicialmente em termos de relações parte-parte antes de fazê-lo em termos de relações parte-todo. Existe na literatura evidências que apoiam esses dois aspectos" (Spinillo, 1992, p. 309).

A análise dos dados revela que as participantes demonstraram diferentes estratégias e níveis de compreensão, ao resolver problemas de proporcionalidade. Enquanto algumas conseguiram aplicar conceitos matemáticos na resolução de problemas, outras enfrentaram dificuldades em utilizar ideias ligadas à Matemática em situações práticas.

Além disso, destaca-se a necessidade de recursos visuais e materiais concretos para apoiar o desenvolvimento do raciocínio proporcional, especialmente quando se trata de frações impróprias. A utilização de representações gráficas e tabelas mostrou-se eficaz na promoção da compreensão dos conceitos e na resolução de problemas complexos.

REFERÊNCIAS

Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. C. (2008) Content Knowledge for Teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, *59*(5), 389-407.

Ministério da Educação. (1997) *Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Fundamental*. Brasília, DF: SEF/MEC.

Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: MEC. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/

Garcia Silva, A da F., Campos, T. M. M., & Pietropaolo, R. C. (2011). O desafio do conhecimento profissional docente: análise da formação continuada de um grupo de professores das séries iniciais da educação básica tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações. UNIÓN: *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *28*, 21-40. http://funes.uniandes.edu.co/15772

Lamon, S. J. (2006). *Teaching Fractions and Ratios for Understanding – Essential Content Knowledge and Instructional Strategies for Teachers* (2. ed.) Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Lesh, R., Post, T., Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In M. Behr & J. Hielbert (Eds.). Number concepts and operations for the middle grades (pp. 93-118). Lawrence Erlbaum.

Martins, H.C. Ressignificação de conhecimentos profissionais de um grupo de professoras que ensinam Matemática sobre o Raciocínio Proporcional. 2022.197 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Anhanguera, São Paulo, 2022. https://repositorio.pgsscogna.com.br//handle/123456789/48614

Siebert, V. T. (2015). *Estudo e ensino de frações: aprendizagens e dificuldades docentes no processo de formação continuada* (Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Mato Grosso). https://ri.ufmt.br/handle/1/131

Spinillo, A. G. (1992). A importância do referencial de “metade” e o desenvolvimento do conceito de proporção. *Psic.: Teor. e Pesq*., *8*(3), 305-317. https://periodicos.unb.br/index.php/revistaptp/article/view/17142

Spinillo, A. G. (2002). O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, *15*(3), 475-487. https://www.scielo.br/j/prc/a/KGMzvtbb3QrXgwgjhZ8HXFy/?format=pdf&lang=pt

NOTAS DA OBRA

TÍTULO DA OBRA
Conhecimento do Raciocínio Proporcional e seu ensino: um estudo sobre o uso de tabelas e materiais manipuláveis

Angelica da Fontoura Garcia Silva
Doutora em Educação Matemática pela PUC SP
Unopar, Pós-graduação de Metodologias Para O Ensino De Linguagens E Suas Tecnologias, Londrina, Brasil
angelicafontoura@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-2435-9240

Helena Do Carmo Borba Martins
Mestre em Educação Matemática pela Unian-SP
Colégio Adventista da Liberdade, São Paulo, Brasil
helenacbm.martins@gmail.com
https://orcid.org/0000-0001-9894-3020

Ruy Cesar Pietropaolo
Doutor em Educação Matemática da PUC SP
UnianSP, Educação Matemática, São Paulo, Brasil
rpietropaolo@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-1353-2191

Endereço de correspondência do principal autor
Rua Antonio Celeguim, número180 , 07850-060, Franco da Rocha, SP, Brasil.

AGRADECIMENTOS
Inserir os agradecimentos a pessoas que contribuíram com a realização do manuscrito.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: A.F. Garcia Silva, H.C.B.Martins. Pietropaolo, R.C.
Coleta de dados: A.F. Garcia Silva, H.C.B.Martins
Análise de dados: A.F. Garcia Silva, H.C.B.Martins.
Discussão dos resultados: A.F. Garcia Silva, H.C.B.Martins. Pietropaolo, R.C.
Revisão e aprovação: A.F. Garcia Silva

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

AGRADECIMENTO
O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação
de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Foi obtido o consentimento escrito dos participantes

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Esta pesquisa foi autorizada pela comissão de ética do sistema CEP/Conep, sob o número Caee 43483721.1.0000.5493 e parecer 4.657.800

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 13-05-2024 – Aprovado em: 14-10-2024