

REPRESENTAÇÕES ESTÁTICAS E DINÂMICAS PARA ACESSO A UM OBJETO MATEMÁTICO TRIDIMENSIONAL

Static And Dynamic Representations In Accessing A Three- Dimensional Mathematical Object

Núbia Lúcia Cardoso Guimarães

Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre – RS, Brasil
nubia.guimaraes@canoas.ifrs.edu.br

<https://orcid.org/0000-0002-1071-4862> 

Márcia Rodrigues Notare

Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre – RS, Brasil
marcia.notare@ufrgs.br

<https://orcid.org/0000-0002-2897-8348> 

A lista completa com informações dos autores está no final do artigo 

RESUMO

Esse artigo é um recorte de uma pesquisa de doutorado, abordando o acesso a objetos matemáticos tridimensionais que, por serem abstratos, necessitam de representações para tal. Tendo como objetivo conhecer as potencialidades e limitações das possíveis representações, foram realizadas as análises teórica e da aplicação de uma situação de ensino e aprendizagem. Na análise teórica, propomos um quadro para a classificação das diferentes representações bi e tridimensionais, estáticas e dinâmicas, e uma avaliação a priori das características de cada representação. Na aplicação da situação de ensino e aprendizagem, observamos o que cada representação revela ou esconde acerca das propriedades das superfícies quádricas. A estratégia utilizada para análise consistiu no cruzamento dos dados oriundos da análise teórica e das condutas cognitivas de três participantes. As representações dinâmicas apresentam-se com uma gama bem maior de possibilidades para a produção de conhecimento matemático do que as representações estáticas. No entanto, os resultados dessa investigação sugerem que as representações de um objeto matemático tridimensional podem ser utilizadas de forma complementar e a partir de uma análise das suas características, considerando os conceitos abordados, as atividades propostas e os conhecimentos do aluno.

Palavras-chave: Objeto Matemático Tridimensional; Representações Estáticas E Dinâmicas; Superfícies Quádricas

ABSTRACT

This article is an excerpt from doctoral research, addressing access to three-dimensional mathematical objects which, as they are abstract, require representations to do so. Aiming to understand the potentialities and limitations of possible representations, a theoretical analysis and application of a teaching and learning situation were carried out. In the theoretical analysis, we propose a framework for the classification of different two- and three-dimensional representations, static and dynamic, and a priori assessment of the characteristics of each representation. When applying the teaching and learning situation, we observe what each representation reveals or hides about the properties of quadric surfaces. The strategy used for analysis consisted of crossing data from theoretical analysis and the cognitive behaviors of three participants. Dynamic representations present a much greater range of possibilities for producing mathematical knowledge than static representations. However, the results of this investigation suggest that the representations of a three-dimensional mathematical object can be used in a complementary way and based on an analysis of its characteristics, considering the concepts covered, the proposed activities and the student's prior knowledge.

Keywords: Three-Dimensional Mathematical Object; Static and Dynamic Representation; Quadric Surfaces

1 INTRODUÇÃO

Uma planta pode ser vista a olho nu e tocada, um vírus pode ser observado usando um microscópio, ou ainda, alguns corpos celestes podem ser visualizados com um telescópio. Esses entes podem ser representados por maquetes, desenhos, fotos, descrições etc., sem ser confundidos com suas representações. Ao contrário, um objeto matemático é imaterial, por exemplo, um número pode ser usado para contar objetos reais, mas ele mesmo é um objeto abstrato, uma construção do cognitivo humano.

Para o conhecimento desses objetos que não pertencem ao mundo físico, é necessário ir além das investigações empíricas, tendo noções que só são atingidas por abstração. O fato de os objetos matemáticos não serem diretamente acessíveis à percepção conduz à necessidade do uso de representações, que consistem na única forma de acesso para comunicar ou operar sobre eles. Por exemplo, o parabolóide elíptico é um objeto matemático abstrato que, não podendo ser visto a olho nu ou através de instrumentos, só é possível ser evocado (no sentido de tornar presente) por meio de uma representação.

O processo de ensino e aprendizagem de matemática é permeado por essas representações, de forma que a evolução dos conhecimentos matemáticos conduziu ao desenvolvimento e à diversidade de registros de representação (Duval, 2003, p. 21). No estudo das superfícies quádricas, por exemplo, são utilizadas representações figurais, gráficas, simbólicas e em língua natural. As representações figurais distinguem-se das gráficas pela ausência do sistema de coordenadas cartesianas no primeiro caso, ou presença no segundo.

As representações simbólicas consistem nas equações dessas superfícies e, as suas denominações, são as representações em língua natural. Esse artigo é um recorte da pesquisa de doutorado, em que são utilizadas apenas as representações figurais e em língua natural das superfícies quádricas. Num estudo sobre as formas de acesso a objetos matemáticos, Parzys (1988) discute a perda de informação ocasionada pela passagem do objeto matemático tridimensional, para a maquete e desta para o desenho.

Além dessas representações estáticas de um objeto matemático tridimensional, com o avanço tecnológico surgiram as representações dinâmicas, que podem ser obtidas por meio de softwares matemáticos. A interiorização dessas representações constitui a representação mental do objeto matemático pelo sujeito, que consiste no conjunto de imagens e conceituações que o indivíduo pode ter sobre um objeto (Duval, 2012b, p. 269).

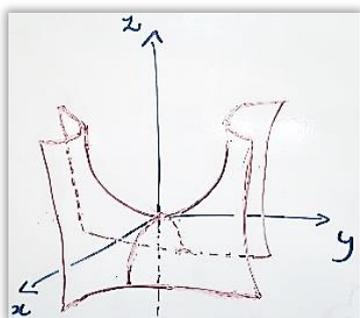
O objetivo deste estudo é de compreender as contribuições das diferentes representações na apreensão figural das quádricas, que contribui para a apreensão conceitual desses objetos matemáticos. Para isso, buscamos identificar as possíveis representações figurais dessas superfícies, analisando suas potencialidades e limitações. Neste contexto, o presente estudo descreve uma análise teórica e a aplicação de uma situação de ensino e aprendizagem, do qual participaram dois graduandos e um mestrando na área de ciências exatas.

A análise teórica permitiu a constituição de um quadro que classifica as possíveis representações figurais de um objeto matemático tridimensional, assim como uma análise mais geral das suas características. Na aplicação, a análise ficou voltada para as representações figurais das quádricas, mas os resultados podem contribuir também para o processo de ensino e aprendizagem de outros objetos matemáticos tridimensionais.

2 REPRESENTAÇÕES DE OBJETOS MATEMÁTICOS TRIDIMENSIONAIS

Um objeto matemático não possui existência física, sendo necessária a utilização de representações para o seu acesso e manuseio. E, essas representações têm influência sobre a sua apreensão conceitual, pois delas depende a representação mental construída pelo sujeito. Uma das formas de representar um objeto matemático tridimensional é por meio do desenho, que pode ser com lápis e papel, em quadro negro ou branco com giz ou caneta ou mesmo impresso em papel. Por consistir numa forma bidimensional e estática de representar um objeto matemático, a denominamos representação 2D-estática.

A Figura 1a apresenta uma das representações 2D-estáticas, esta consiste na imagem de um parabolóide hiperbólico desenhada em quadro branco.



(a) 2D-estática



(b) 3D-estática

Figura 1: Representações estáticas de um objeto matemático tridimensional.

Fonte: Elaborado pelo autor

A maquete ou mais recentemente o modelo obtido por impressão 3D são formas também estáticas, mas tridimensionais de representar um objeto matemático, motivo pelo qual as classificamos como representações 3D-estáticas (Figura 1b). A impressão 3D de baixo custo está em evolução e com grandes contribuições para a ciência, educação e sustentabilidade (Fonda, 2013; Hedler, 2020). Essa acessibilidade permitiu a utilização dos modelos impressos em 3D das quádricas nessa investigação (Figura 1b).

Os arquivos do tipo *stl* utilizados para a impressão 3D desses modelos foram obtidos por meio do GeoGebra, a partir das equações parametrizadas dessas superfícies (Quadro 1).

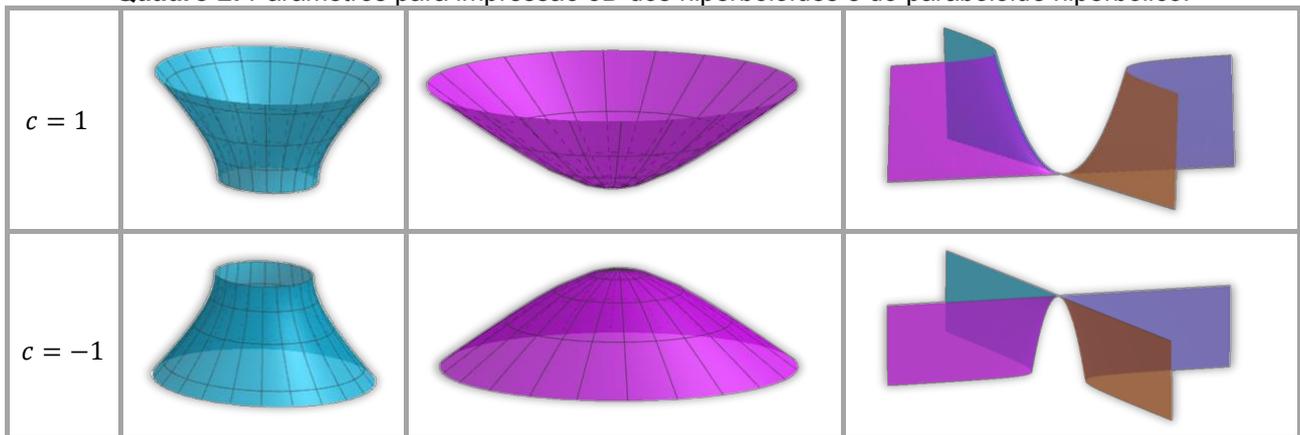
Quadro 1: Equações parametrizadas das superfícies quádricas.

QUÁDRICA	EQUAÇÃO PARAMETRIZADA
Elipsoide	$d = Superfície(a \operatorname{sen}(u) \cos(v), b \operatorname{sen}(u) \operatorname{sen}(v), c \cos(u), u, 0, \pi, v, 0, 2\pi)$
Hiperboloide de uma folha	$d = Superfície(a \cosh(u) \cos(v), b \cosh(u) \operatorname{sen}(v), c \operatorname{senh}(u), u, 0, \pi, v, 0, 2\pi)$
Hiperboloide de duas folhas	$d = Superfície(a \operatorname{senh}(u) \cos(v), b \operatorname{senh}(u) \operatorname{sen}(v), c \cosh(u), u, 0, \pi, v, 0, 2\pi)$
Paraboloide elíptico	$d = Superfície\left(a u \cos(v), b u \operatorname{sen}(v), \left(\frac{u^2}{c}\right), u, 0, 5, v, 0, 2\pi\right)$
Paraboloide hiperbólico	$d = Superfície\left(u + v, \left(\frac{b}{a}\right) v, \left(\frac{u^2}{a^2 c}\right) + \left(\frac{2 u v}{a^2 c}\right), u, 0, 100, v, 0, 100\right)$ $e = Superfície\left(u + v, -\left(\frac{b}{a}\right) v, \left(\frac{u^2}{a^2 c}\right) + \left(\frac{2 u v}{a^2 c}\right), u, 0, 100, v, 0, 100\right)$ $f = Superfície\left(-u - v, \left(\frac{b}{a}\right) v, \left(\frac{u^2}{a^2 c}\right) + \left(\frac{2 u v}{a^2 c}\right), u, 0, 100, v, 0, 100\right)$ $g = Superfície\left(-u - v, -\left(\frac{b}{a}\right) v, \left(\frac{u^2}{a^2 c}\right) + \left(\frac{2 u v}{a^2 c}\right), u, 0, 100, v, 0, 100\right)$

Fonte: Elaborado pelo autor

O elipsoide e o paraboloide elíptico foram impressos de uma só vez, ao contrário dos hiperboloides e do paraboloide hiperbólico. Na impressão das partes superior e inferior dos hiperboloides, utilizamos um valor para o parâmetro *c* maior e menor que zero, respectivamente. Para a parametrização do paraboloide hiperbólico foram utilizadas quatro equações *d*, *e*, *f* e *g* que geram, respectivamente, as partes lilás, laranja, verde e rosa dessa quádrica (Quadro 2).

Quadro 2: Parâmetros para impressão 3D dos hiperboloides e do paraboloides hiperbólico.

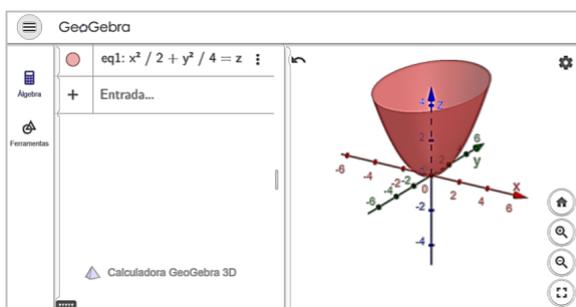


Fonte: Elaborado pelo autor

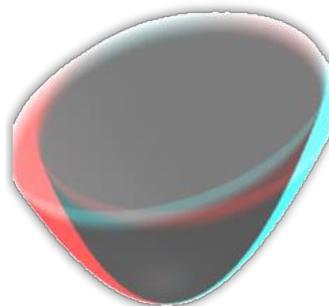
O valor do parâmetro c definiu novamente as partes superior ou inferior do paraboloides hiperbólico. Para redimensionar as figuras foi utilizado o software Tinkercad e, para impressão em 3D, o software FlashPrint da própria impressora Flashforge Finder. Para redimensionar esses objetos tridimensionais foi utilizado o software Tinkercad e, para impressão em 3D, o software FlashPrint da própria impressora Flashforge Finder.

Além das representações 3D-estáticas, com o avanço tecnológico surgiram as representações dinâmicas. Conforme observado por Moreno-Armella et al. (2008): “A natureza dos símbolos matemáticos tem evoluído nos últimos anos de um caráter estático, inerte, para objetos dinâmicos ou diagramas que são construtíveis, manipuláveis e interativos.” (apud Basso & Notare, 2015, p. 2). Nesse estudo, as representações dinâmicas foram obtidas por meio do ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra, software gratuito que pode ser hospedado em computador ou dispositivo móvel, ou acessado diretamente no navegador.

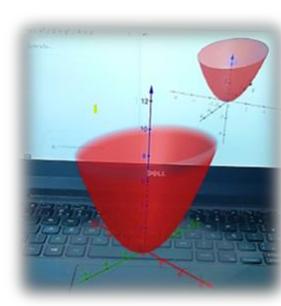
O GeoGebra apresenta as representações simbólica e gráfica de um objeto matemático através das janelas de álgebra e de visualização, respectivamente (Figura 2a).



(a) 2D-dinâmica



(b) 3D-dinâmica



(c) 3D-dinâmica

Figura 2: Representações dinâmicas de um objeto matemático tridimensional.

Fonte: Elaborado pelo autor

Como essas representações que vemos na tela do computador ou dispositivo móvel consistem em projeções de um objeto matemático que é tridimensional, classificamos como 2D-dinâmicas. Existem ainda outras duas possibilidades de acessar um objeto matemático tridimensional, que são as representações por anáglifo ou por realidade aumentada (Pereira et al., 2017; Ribeiro et al., 2020; Schaun, 2019). Os gráficos obtidos por anáglifo produzem um efeito de profundidade quando observados com o uso de óculos com filtro verde e vermelho (Figura 2b).

O anáglifo é constituído por duas imagens diferentes, uma para cada olho, que sobrepostas com uma pequena distância entre as duas produzem um efeito de profundidade. A imagem que deve ser vista por um dos olhos é impressa em vermelho e a outra em verde de forma que, observando através de um filtro especial (óculos 3D), vemos uma imagem estereoscópica integrada. As duas imagens são fundidas pelo córtex visual do cérebro humano dando a percepção de uma imagem tridimensional.

Os óculos 3D podem ser facilmente construídos e existem softwares que permitem produzir essas imagens por anáglifo. As representações das quádricas por anáglifo foram obtidas pelo GeoGebra, usando a funcionalidade 'Projeção para óculos 3D'. As representações por anáglifo das quádricas são apresentadas numa tela plana, mas por apresentarem uma ideia de profundidade, classificamos como 3D-dinâmicas. Por fim, também classificamos como 3D-dinâmicas as representações obtidas por meio de realidade aumentada.

Esse termo surgiu em 1990, quando o professor Thomas Caudell, em colaboração com a empresa Boeing, desenvolvia o projeto de um mostrador digital para aviões que mesclava gráficos virtuais em uma realidade física. A realidade aumentada é a tecnologia em que conteúdos reais e virtuais interagem em tempo real, acrescentando elementos à realidade, ao invés de substituí-la (Azuma et al., 2001; Kirner et al, 2011). O ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra para dispositivos móveis oferece essa funcionalidade (Figura 2c).

3 METODOLOGIA

Esse estudo é um recorte de um projeto de pesquisa maior, submetido ao CEP - Comitê de Ética na Pesquisa da Plataforma Brasil, com parecer consubstanciado da aprovação e TCLE - Termo de Consentimento Livre e Esclarecido aceito e assinado pelos

participantes. Os participantes da pesquisa foram um licenciando em matemática (P1), um graduando em engenharia (P2) e um mestrando em matemática (P3). Os encontros ocorreram de forma individual, via *Google Meet*, ficando gravados para coleta de dados.

Esse estudo teve por objetivo analisar as limitações e potencialidades das possíveis formas de acesso a um objeto matemático tridimensional, propondo um quadro para a apresentação e classificação dessas representações. Algumas características das representações (bi e tridimensionais, estáticas e dinâmicas) são mais gerais, sendo válidas para qualquer objeto matemático ou atividade. No entanto, algumas potencialidades e limitações dessas representações podem se tornar visíveis durante a realização de uma tarefa, podendo variar de acordo com os conceitos abordados.

Por essa causa, esse estudo consiste de duas etapas: uma análise teórica e uma aplicação de uma situação de ensino e aprendizagem. Os dados coletados para viabilizar a análise são oriundos da estratégia de investigação de campo que combina o uso da: (1) análise teórica; (2) observação das condutas cognitivas; e (3) questionário e entrevista. A análise teórica apresenta as características previamente conhecidas dessas representações com a proposta de um quadro para classificação.

Os dados obtidos da análise das condutas cognitivas observadas por meio das atitudes comportamentais e produções escritas dos participantes, foram coletadas por meio das observações *in loco* e gravações dos encontros, das entrevistas e dos questionários. A situação de ensino e aprendizagem, aplicada pela própria pesquisadora, constou de uma atividade que consistiu na exploração e correlação entre as representações figurais e em língua natural das superfícies quádricas, por meio da identificação das seções planas que as constituem.

Os participantes foram convidados a identificar o elipsoide, o hiperboloide de uma folha, o hiperboloide de duas folhas, o paraboloides elíptico e o paraboloides hiperbólico, por meio de diferentes recursos, justificando as suas respostas em termos das seções planas. Os recursos foram oferecidos na seguinte ordem: 1) representação figural 2D-estática; 2) representação figural 3D-estática; 3) representação figural 2D-dinâmica; 4) representação figural 3D-dinâmica (análogo); 5) representação figural 3D-dinâmica (RA).

Depois, os participantes realizaram a mesma tarefa, mas com a possibilidade de inserir um plano na janela de álgebra do GeoGebra, para interceptar a superfície e revelar a seção plana. A Figura 3 apresenta as representações 2D-estáticas utilizadas nessa investigação, que consistem em imagens como as impressas em papel, oferecidas em arquivo do Google Docs.

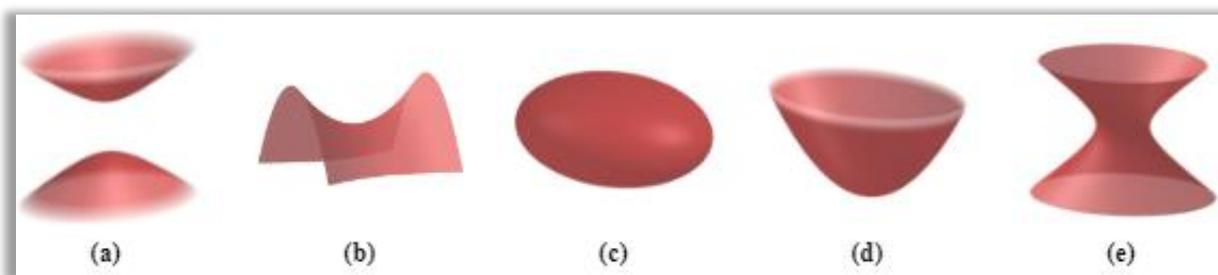


Figura 3: Representações 2D-estáticas das superfícies quádricas.

Fonte: Elaborado pelo autor

Envolvendo a passagem de uma dimensão a outra, essa proposta qualifica a apreensão figural de um objeto matemático tridimensional, uma vez que “Ver ‘geometricamente’ uma figura é operar uma desconstrução dimensional das formas que reconhecemos imediatamente em outras formas que não enxergamos à primeira vista, e isso sem que nada mude na figura afixada no monitor ou construída no papel.” (Duval; Moretti, 2011, p. 87).

De acordo com os autores, “A desconstrução dimensional se faz contra a percepção, isto é, contra o reconhecimento imediato de unidades figurais 2D ou 3D que se impõem à primeira vista e que bloqueiam o reconhecimento de outras unidades figurais.” (Duval, 2011, p. 93). As diferentes representações figurais apresentam limitações e potencialidades distintas, que podem se tornar visíveis durante a tarefa de identificar as seções planas das superfícies quádricas.

Essa atividade permite observar e descrever as apreensões figurais proporcionadas pelas diferentes representações e suas contribuições para a correlação com as representações em língua natural dessas superfícies. As seções planas das quádricas, resultantes das intersecções dessas superfícies com planos coordenados ou paralelos a esses, podem ser cônicas não degeneradas (parábola, elipse ou hipérbole) ou cônicas degeneradas (o conjunto vazio, um ponto, uma reta ou duas retas concorrentes).

E as representações em língua natural das superfícies quádricas - elipsoides, hiperboloides de uma e duas folhas, paraboloides elíptico e hiperbólico - têm relação com o(s) tipo(s) de cônica(s) não degenerada(s) resultantes dessa intersecção. Assim, a partir do reconhecimento das suas seções planas, é possível identificar a representação em língua natural da quádrica. Inicialmente, o reconhecimento das seções planas foi realizado apenas por meio da observação e manipulação das diferentes representações figurais das superfícies quádricas.

Ao final, foi possível inserir um plano coordenado ou paralelo a este para observar as seções planas das quádricas. A correlação entre as representações figurais e em língua natural pode ser obtida a partir da comparação entre suas representações por meio da análise das suas seções planas. Considerando as quádricas na ordem em que se apresentam na Figura 3, a superfície com representação gráfica da letra (c) tem apenas seções planas elípticas, fato que permite relacioná-la com a denominação 'elipsoide'. Já as quádricas representadas pelas figuras das letras (a) e (e) não têm parábolas como seções planas, o que sugere que se tratam de hiperboloides.

A diferenciação relativa à quantidade de folhas também pode ser obtida da análise da figura, uma vez que o hiperboloide de uma folha (e) é uma superfície inteira, enquanto o hiperboloide de duas folhas (a), é composto de duas partes. Assim, as quádricas representadas pelas figuras das letras (b) e (d) são os paraboloides. Como o paraboloides da letra (d) não possui hipérbole como seção plana, trata-se do paraboloides elíptico, restando a denominação paraboloides hiperbólico para a quádrica da letra (b).

3 CARACTERÍSTICAS DAS REPRESENTAÇÕES DE OBJETOS MATEMÁTICOS TRIDIMENSIONAIS

As representações de um objeto matemático tridimensional têm influência sobre a sua apreensão conceitual, pois delas depende a representação mental construída pelo sujeito. E, segundo Parzysz (1988), numa representação há propriedades que nem sempre são percebidas ou compreendidas pelos alunos. Com o exemplo de um cubo, o autor distingue três níveis de representação quanto às informações que carregam sobre o objeto matemático (Quadro 3).

Quadro 3: Níveis de representação de Parzysz

		Cubo	
Objeto real	Nível 0	OBJETO REAL perda de informação ▼
Representação próxima	Nível 1	MAQUETE	
Representação distante	Nível 2	DESENHO	

Fonte: Adaptado de Parzysz (1988, p. 80)

O nível 0 refere-se ao objeto matemático propriamente dito; o nível 1, a uma representação tridimensional (maquete); e o nível 2, a uma representação bidimensional (desenho). Parzysz (1988) considera que há uma perda de informação quando o acesso ao objeto matemático (nível 0) se dá por meio de uma maquete (nível 1). E essa perda, segundo o autor, é ainda mais significativa quando esse acesso se dá através do desenho (nível 2).

Parzysz (1988, 1991) constatou que os problemas de compreensão podem ocorrer tanto na codificação (produção) quanto na decodificação (leitura/interpretação) de representações planas de objetos tridimensionais. O autor destaca que os estudantes tendem a considerar as propriedades da representação como as do próprio objeto matemático. Por exemplo, as propriedades do objeto matemático 'cubo' diferem da sua representação por meio de desenho, uma vez que este último só pode ser obtido em perspectiva.

Nesse caso, algumas propriedades da representação, como os ângulos entre as arestas do cubo, as medidas dessas arestas, a forma quadrada das suas faces, são distintas das do objeto matemático. No estudo das superfícies quádricas, além da dificuldade na produção de, por exemplo, um parabolóide hiperbólico, uma representação 2D-estática apresenta em perspectiva apenas uma das faces dessa superfície. Por exemplo, a representação 2D-estática de um parabolóide hiperbólico da Figura 3b pode apresentar limitações na revelação de suas seções planas, em especial, as retas concorrentes resultantes da intersecção com o plano xoy .

As representações 3D-estáticas superam os obstáculos que destacamos no caso das obtidas por meio de desenho, o que coaduna com as constatações de Parzysz (1988) em relação à perda de informação ser menor nas representações 3D-estáticas do que nas 2D-estáticas. O fato de o objeto matemático não precisar ser representado em perspectiva e a possibilidade de observar suas diversas faces pode permitir que a representação 3D-estática revele mais de suas propriedades.

Estudos têm apontado que a modelagem com software 3D, para projetar e imprimir objetos matemáticos tridimensionais, melhora a visualização de estruturas mais complexas (Fonda, 2013 apud Hedler, 2020) e as habilidades de visualização espacial, criatividade e resolução de problemas dos alunos (Bicer et al., 2017 apud Hedler, 2020). No entanto, assim como o desenho, esses protótipos obtidos por impressão 3D ainda são representações estáticas, apresentando limitações como as restrições em relação à

mudança das características do objeto representado e a impossibilidade de integrar novos elementos.

No primeiro caso, podemos citar a limitação para correlacionar gráficos e equações de uma quádriga, por exemplo, por meio da análise das diferenças visuais provocadas por alterações dos coeficientes na equação dessa superfície. No outro caso, a possibilidade de inserir um plano para obter a intersecção com o parabolóide hiperbólico permitiria ao sujeito visualizar as duas retas concorrentes como seção plana. Esses limites apresentados pelas representações estáticas são superados pelas representações dinâmicas, consideradas uma das principais contribuições das tecnologias digitais para a educação matemática.

Isso porque essas representações tornam possível “[...] a “concretização” dos objetos matemáticos na tela do computador, dando a sensação de realismo e de existência material pela possibilidade de manipulação e alteração de suas propriedades.” (Notare; Basso, 2016, p. 2). Por exemplo, o ambiente de matemática dinâmica do GeoGebra, através de suas janelas de álgebra e de visualização, permite a visualização e a manipulação da representação gráfica do objeto matemático tridimensional a partir da sua representação simbólica (Figura 2a).

Isso possibilita explorar a relação entre as representações simbólicas e gráficas de um objeto matemático, condição necessária para a correspondência entre esses registros de representação e consequente apreensão conceitual de um objeto matemático (Duval, 2003; Duval, 2012). Por outro lado, essas representações 2D-dinâmicas também são projeções de um objeto matemático, podendo apresentar limitações em revelar as propriedades do objeto matemático, devido a sua apresentação em perspectiva.

A projeção pode trazer prejuízos a uma apreensão figural do objeto matemático, escondendo propriedades importantes ou mesmo dando ideias falsas sobre as suas características. Sabemos que a possibilidade de mover a representação 2D-dinâmica de um cubo, por exemplo, permite ver que todos os seus ângulos são retos. No entanto, não é possível generalizar, considerando que os recursos oferecidos pelo ambiente de matemática dinâmica superam todos os obstáculos relativos à representação em perspectiva para todos os objetos matemáticos.

Entendemos que é preciso analisar caso a caso, considerando que as apreensões figurais permitidas pelas representações podem variar de acordo com os objetos matemáticos e com os conhecimentos prévios possuídos pelo sujeito. Por outro lado, essas limitações oriundas da projeção deixam de existir no caso das representações 3D-

dinâmicas obtidas por anáglifo ou por meio de realidade aumentada, especialmente no último caso.

As representações 3D-dinâmicas obtidas por anáglifo trazem uma ideia de profundidade, mas ainda são representadas na tela do computador. Em contrapartida, as obtidas por realidade aumentada representam em 3D um objeto matemático tridimensional como os modelos impressos em 3D, mas com a vantagem do dinamismo. Com as formas dinâmicas de acesso ao objeto matemático tridimensional, o sujeito pode ampliar, reduzir e arrastar a representação, alterar características como medidas de lados ou coeficientes de equações.

No caso da realidade aumentada, ainda é possível mover a câmera para olhar a representação de diversos ângulos, como também movimentar-se, andando em torno dela. O Quadro 4 apresenta uma proposta de atualização do quadro de Parzysz (1988), no que se refere às possibilidades de acesso a um objeto matemático tridimensional, reunindo as representações 2D-estáticas, 3D-estáticas, 2D-dinâmicas e 3D-dinâmicas. A apresentação linear das possibilidades de representação de um objeto matemático tridimensional do quadro de Parzysz (1988) toma a forma matricial, para acomodar na segunda linha as representações dinâmicas.

Quadro 4: Representações de um objeto matemático tridimensional

	2D	3D
ESTÁTICA	DESENHO	IMPRESSÃO 3D
DINÂMICA	JANELA DE VISUALIZAÇÃO	ANÁGLIFO REALIDADE AUMENTADA

Fonte: Elaborado pelo autor

Com isso, além de propor um quadro que reúne as formas de representar um objeto matemático tridimensional, apresentamos uma análise das características previamente conhecidas de cada uma dessas representações. Entendendo que algumas características dessas representações podem variar em acordo com o conceito abordado, a seguir apresentamos os resultados da aplicação de uma atividade que visou analisar as contribuições de cada uma dessas representações num estudo sobre as superfícies quádras.

4 POTENCIALIDADES E LIMITAÇÕES DAS REPRESENTAÇÕES NO ESTUDO DAS SUPERFÍCIES QUÁDRICAS

As representações 2D-estáticas permitiram aos participantes realizarem conjecturas a respeito do reconhecimento das quádricas que, em alguns casos, não foram suficientes para produzir argumentações relacionadas à identificação das suas seções planas. Podemos observar que essas representações foram suficientes no reconhecimento do parabolóide elíptico por P1: *“Quando eu corto por um plano vertical também, eu tenho uma parábola. E aqui talvez seja um parabolóide elíptico, porque se eu cortar por um plano horizontal, eu fico com a imagem de uma elipse”*.

No entanto, o mesmo não ocorre na identificação das seções planas hiperbólicas do parabolóide hiperbólico, que fica resolvida apenas com a utilização das representações dinâmicas pelo participante P1. Além dessa limitação, observamos que ao manusearem essas representações 2D-estáticas, os participantes utilizaram recursos para representar um plano que intercepta as superfícies. Por exemplo, para justificar a identificação do elipsoide, P2 utiliza a mão para representar um plano argumentando: *“... se eu passar um plano assim é uma elipse e se passar um plano assim segue sendo uma elipse”* (Figura 4a).

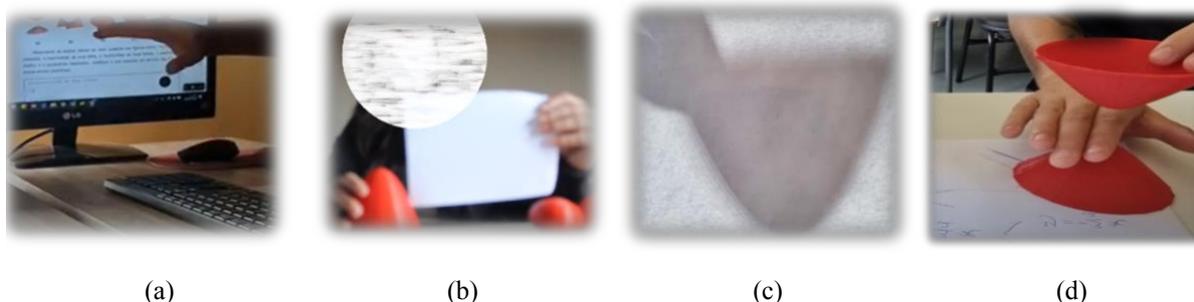


Figura 4: Utilização das representações figurais estáticas
Fonte: Elaborado pelo autor

A necessidade da inserção de elementos continua sendo uma das limitações observadas também nas representações 3D-estáticas, ocorrendo em várias oportunidades. O participante P1 utilizou uma folha (Figura 4b) para ajudar na visualização e argumentação acerca da seção plana parabólica do modelo 3D de um parabolóide elíptico. P2 também usou uma folha, mas para mostrar as seções planas por meio da sombra produzida pelo protótipo dessa quádrica (Figura 4c).

Assim também ocorre com P3, que simula com a mão um plano que passa entre os vértices do hiperboloide de duas folhas, argumentando que não existe lugar geométrico (Figura 4d). As representações 2D-dinâmicas, que apresentam imagens bidimensionais das superfícies, parecem não acrescentar elementos novos na identificação das seções planas pelos participantes P2 e P3. No entanto, essas representações contribuíram para a confirmação das conjecturas a respeito de algumas quádricas por P1, que diz: “*Olhando para o computador eu consigo enxergar o que eu estava imaginando*”.

Da mesma forma que as representações 2D-dinâmicas, para P2 e P3 as representações figurais 3D-dinâmicas obtidas por anáglifo também não apresentam novidades. Porém, o mesmo não ocorre com P1 que, colocando a representação do parabolóide hiperbólico por anáglifo em determinada posição, visualiza uma curva voltada para cima e outra para baixo. P1 conjectura que essas curvas se tratavam de seções planas hiperbólicas, mas não demonstra certeza disso ainda (Figura 5a).

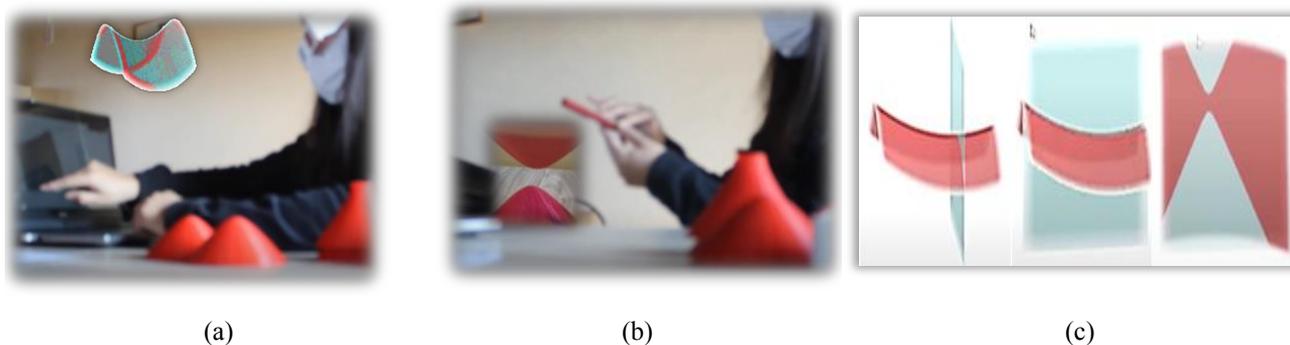


Figura 5: Utilização das representações figurais dinâmicas

Fonte: Elaborado pelo autor

A experiência dos participantes P2 e P3 com as representações 3D-dinâmicas obtidas por realidade aumentada seguem tendo os mesmos resultados que com as outras representações dinâmicas, não acrescentando informações novas. Com o participante P1, observamos que o manuseio da superfície no aplicativo do celular apresentou-se como um obstáculo, pelo fato de precisar ser realizado com os dedos. Isso pode ser observado na sua fala quando, referindo-se às representações na janela de visualização 3D, P1 diz: “*Ainda prefiro daquela maneira, eu acho que só pelo fato de estar mexendo com os dedos*”.

No entanto, P1 considera que a vantagem dessa representação é que: “*É como se eu tivesse com a imagem na mão, dá mais clareza*” (Figura 5b). Apesar disso, P1 ainda não demonstra convicção a respeito das seções planas hiperbólicas, o que só ocorre quando consegue visualizar inserindo um plano para obter a intersecção com o parabolóide

hiperbólico. Nessa oportunidade, os participantes puderam obter as parábolas e hipérbolas como cortes do parabolóide hiperbólico por planos coordenados e paralelos a estes, como mostram a primeira e segunda imagens da Figura 5c.

Com isso, podemos observar que a possibilidade de inserção do plano fez toda a diferença na identificação do parabolóide hiperbólico pelo participante P1, o que já não ocorreu com P2 e P3. A terceira imagem dessa figura apresenta uma limitação do GeoGebra, encontrada pelo participante P1 quando buscava visualizar as seções planas hiperbólicas. Esse corte do parabolóide elíptico por um plano deveria ter como resultado duas retas concorrentes em lugar da aparente hipérbole, mas esse obstáculo foi contornado e a atividade proposta atingiu sua finalidade.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com esse estudo foi possível perceber que as diversas maneiras de acesso aos objetos matemáticos tridimensionais carregam potencialidades e limitações distintas, que podem revelar ou esconder propriedades do objeto matemático. Além disso, as propriedades que podem ser conhecidas variam de acordo com os conceitos abordados, com a atividade proposta ou, também, com os conhecimentos prévios possuídos pelo sujeito.

Em relação aos conceitos, usando os exemplos abordados nesse estudo, a exploração da representação 3D-estática de um cubo pode ser suficiente para revelar as propriedades desse objeto matemático, diferente do caso de um parabolóide hiperbólico, por exemplo. No entanto, mesmo no caso do cubo, uma representação dinâmica pode evitar que a visualização do objeto matemático tridimensional se restrinja a casos particulares. Além disso, a dinamicidade desse tipo de representação possibilita a visualização, a exploração das características do objeto matemático e a generalização.

No tocante às atividades, para a classificação das superfícies quádricas foi necessária apenas a identificação das suas seções planas, o que foi realizado sem a necessidade de muitos recursos da matemática dinâmica. Ainda assim, observamos em algumas oportunidades, a relevância da possibilidade de inserção do plano para a visualização das seções planas. No entanto, o mesmo não ocorreria numa atividade em que se desejasse correlacionar representações gráficas e simbólicas de uma superfície quádrica, por exemplo.

Nesse caso, as representações dinâmicas possibilitam a alteração do valor dos coeficientes na expressão algébrica da equação da quádriga, observando as simultâneas alterações gráficas provocadas. Os tratamentos que os ambientes de matemática dinâmica possibilitam realizar sobre as representações dinâmicas enriquecem as apreensões figurais, contribuindo para a apreensão conceitual dos conceitos envolvidos. E, em relação aos conhecimentos prévios possuídos pelo sujeito, consideramos que essa experiência poderia ter resultados bem diferentes com sujeitos que ainda não tivessem alguma noção sobre superfícies.

O que não foi o caso dos participantes dessa pesquisa que, com formação na área de ciências exatas finalizada ou finalizando, já possuíam alguns conhecimentos prévios que favoreceram a visualização das seções planas para classificação das quádrigas. Consideramos que as diferentes formas de representação de um objeto matemático tridimensional, bi ou tridimensionais, estáticas ou dinâmicas, podem ser utilizadas de forma complementar e a partir de uma análise das suas características, dos conceitos abordados, das atividades propostas e do perfil do aluno.

E concordamos com Borba et al. (2014), quando consideram que a matemática baseada no uso de lápis e papel diferencia-se da que se utiliza de softwares, uma vez que há uma moldagem recíproca entre pensamento e tecnologia. Dessa forma, a produção de conhecimento matemático é condicionada pelas tecnologias utilizadas que, conforme Notare e Basso (2016), transformam as formas de pensar e fazer matemática.

REFERÊNCIAS

- Azuma, R., Baillot, Y., Behringer, R., Feiner, S., Julier, S., & MacIntyre, B. (2001). Recent advances in Augmented Reality. *IEEE Computer Graphics and Applications*, 21(6), 34–47. Recuperado de <https://ieeexplore.ieee.org/document/963459>
- Bicer, A., Nite, S. B., Capraro, R. M., Barroso, L. R., Capraro, M. M., & Lee, Y. (2017). Moving from STEM to STEAM: The effects of informal STEM learning on students' creativity and problem solving skills with 3D printing | Semantic Scholar. *IEEE Frontiers in Education Conference (FIE)*, 1, 1–6. Recuperado de <https://doi.ieeecomputersociety.org/10.1109/FIE.2017.8190545>
- Borba, M. C., Scucuglia, R., & Gadanidis, G. (2014). *Fases das Tecnologias Digitais em Educação Matemática: Sala de aula e internet em movimento*. Belo Horizonte: Autêntica.
- Duval, R. (2003). Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática. In S. D. A. MACHADO (Ed.), *Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica* (pp. 11–33). Campinas - SP: Papyrus.

- Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Mércles Thadeu Moretti (M. T. MORETTI, Trans.). *Revista Eletrônica de Educação Matemática - REVEMAT*, 7(2), 266–297. Recuperado de DOI: 10.5007/1981-1322.2012v7n2p266
- Fonda, C. (2013). A practical Guide to Your First 3D Print. In E. CANESSA, C. FONDA, & M. ZENNARO (Eds.), *Low-Cost 3D Printing for Science, Education and Sustainable Development* (pp. 25–60). ICTP: ICTP—The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics. Recuperado de <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=bd3869ba16fd0690d1348e25e67db9ac7c18dbe8#page=13>
- Hedler, L. W. M. (2020). *Desenvolvimento do pensamento geométrico espacial GeoGebra, Impressora 3D e Abstração Reflexionante processo de abstração reflexionante*. (Tese de Doutorado em Informática na Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Kirner, C., & Kirner, T. G. (2011). Evolução e Tendências da Realidade Virtual e da Realidade Aumentada. In M. W. S. Ribeiro & E. R. Zorzal (Eds.), *Realidade Virtual e Aumentada: Aplicações e Tendências* (pp. 10–25). Uberlândia - MG: SBC. Recuperado de <https://x.gd/1GxEf>
- Notare, M. R., & Basso, M. V. de A. (2016). Geometria Dinâmica 3D – novas perspectivas para o pensamento espacial. *RENOTE - Revista Novas Tecnologias na Educação*, 14(2). Recuperado de DOI: 10.22456/1679-1916.70683
- Parzysz, B. (1988). Knowing vs seeing. problems of the plane representation of space geometry figures. *Educational Studies in Mathematics*, 19, 79–92. Recuperado de <https://doi.org/10.1007/BF00428386>
- Parzysz, B. (1991). Representation of space and students' conceptions at high school level. *Educational Studies in Mathematics*, 22(6), 575–593. Recuperado de DOI: 10.1007/BF00312716
- Pereira, L., Oliveira, D., Couto, I., Oliveira, A., & Silva, R. L. de S. da. (2017). Uma Ferramenta de Apoio ao Ensino de Cálculo com Realidade Aumentada. In *Anais Do XXVIII Simpósio Brasileiro de Informática Na Educação (SBIE 2017)*, 1(1), 595. Recuperado de doi: 10.5753/cbie.sbie.2017.595
- Ribeiro, L. O. M., Guterres, L. X., & Silveira, D. N. (2020). O Uso Da Realidade Aumentada Com Dispositivos Móveis Na Educação Matemática Como Potência Na Geometria Espacial. *PLURAIS - Revista Multidisciplinar*, 5(2), 40–57. Recuperado de DOI: 10.29378/plurais.2447-9373.2020.v5.n2.8922
- Schaun, T. T. (2019). *As Representações Tridimensionais das Superfícies Quádricas na Disciplina de Cálculo com Realidade Aumentada* (Dissertação de Mestrado em Educação Matemática). Universidade Federal de Pelotas.

NOTAS DA OBRA

TÍTULO DA OBRA

Representações estáticas e dinâmicas no acesso a um objeto matemático tridimensional

Núbia Lúcia Cardoso Guimarães

Mestre em matemática aplicada

Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre – RS, Brasil

nubia.guimaraes@canoas.ifrs.edu.br

<https://orcid.org/0000-0002-1071-4862>

Márcia Rodrigues Notare

Doutora em informática na educação

Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre – RS, Brasil

marcia.notare@ufrgs.br

<https://orcid.org/0000-0002-2897-8348>

Endereço de correspondência do principal autor

Rua Itacolomi, 146, CEP 92.420-240, Canoas, RS, Brasil.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul - IFRS Campus Canoas e do Programa de Pós-Graduação em Informática na Educação (PPGIE) da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS).

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA

Concepção e elaboração do manuscrito: N. L. C. Guimarães

Coleta de dados: N. L. C. Guimarães

Análise de dados: N. L. C. Guimarães

Discussão dos resultados: N. L. C. Guimarães

Revisão e aprovação: M. R. Notare

FINANCIAMENTO

Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM

Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

Comitê de Ética na Pesquisa da Universidade Estadual do Oeste do Paraná com Parecer Número: 6.545.708.

CONFLITO DE INTERESSES

Nada consta.

LICENÇA DE USO – uso exclusivo da revista

Os autores cedem à **Revemat** os direitos exclusivos de primeira publicação, com o trabalho simultaneamente licenciado sob a [Licença Creative Commons Attribution \(CC BY\) 4.0 International](#). Esta licença permite que **terceiros** remixem, adaptem e criem a partir do trabalho publicado, atribuindo o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico. Os **autores** têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicada neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista

Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no [Portal de Periódicos UFSC](#). As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EQUIPE EDITORIAL – uso exclusivo da revista

Mérciles Thadeu Moretti

Rosilene Beatriz Machado

Débora Regina Wagner

Jéssica Ignácio

Eduardo Sabel

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista

Recebido em: 14-06-2024 – Aprovado em: 07-10-2024

