



REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

**MODE D'EMPLOI : DE « LE PLAISIR DE VOIR, DE COMPRENDRE, DE
DIRE ET D'INVENTER... EN MATHÉMATIQUES, BIEN SÛR ! »
À L'USAGE DES ÉLÈVES D'ABORD, DE LEURS ENSEIGNANTS ET DES
DIDACTICIENS¹**

**Instruções De Uso: De “O Prazer De Ver, Entender, Expressar E Inventar... Em
Matemática, É Claro!” Aos Alunos Em Primeiro Lugar, Seus Professores
e Educadores²**

Raymond DUVAL

Professeur émérite da Université du Littoral Côte d'Opale
(ULCO/Dunkerque)

Trad. Méricles T. Moretti

RESUMÉ

Ce texte est un développement de l'article de Raymond Duval « Le plaisir de voir, de comprendre, d'exprimer et d'inventer... en maths, bien sûr ! aux élèves d'abord, à leurs enseignants et aux éducateurs ». Dans cet écrit, nous présentons des instructions pédagogiques sur la façon d'utiliser les contributions de l'article à la recherche et à la pratique des enseignants dans la salle de classe. Nous espérons qu'il apportera de nouvelles réflexions sur les possibilités de l'approche sémiocognitive de Raymond Duval en matière d'apprentissage.

Palavras-chave: Apprentissage Mathématique, Registres De Représentation Sémiotique, Raymond Duval

RESUMO

O presente texto é um desdobramento do artigo "Prazer de ver, entender, expressar e inventar... em matemática, é claro!" aos alunos em primeiro lugar, seus professores e educadores", de Raymond Duval. Nesta escrita, apresentamos instruções didáticas de como utilizar os contributos do artigo para a pesquisa e a prática dos professores em sala de aula. Esperamos que ele traga novas reflexões sobre as possibilidades da abordagem semiocognitiva de aprendizagem de Raymond Duval.

Palavras-chave: Aprendizagem Matemática, Registros de Representação Semiótica, Raymond Duval

¹ Esta é uma tradução de um texto em português originalmente publicado em MORETTI, Méricles T.; SOUZA, Roberta N. S. (ORGS.). Mudança de dimensão: gesto intelectual essencial à aprendizagem da geometria segundo Raymond Duval. Florianópolis: GPEEM/PPGECT/UFSC, 2025. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982>

² Sob o título “O prazer de ver, entender, expressar e inventar... em matemática, é claro!” foi publicado no ebook: MORETTI, Méricles T.; SABEL, E. Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval - parte 2. Florianópolis: GPEEM/PPGECT/UFSC, 2023. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982>

1 INTRODUCTION

Pour prendre conscience de la manière **DE REGARDER** pour **VOIR** ce qu'il faut voir dans une **image**, un **dessin**, un **tableau**, une **figure géométrique euclidienne**, ou une photo, il faut **LES COMPARER** en se posant deux questions :

Q.1 Qu'est-ce qu'on **reconnaît** au premier coup d'œil ?

Q.2 Quelles sont **les oppositions** qui permettent d'y distinguer des formes ou des surfaces significativement différents ?

Durant l'été 2019, 600 parapluies multicolores ouverts et juxtaposés ont recouvert la place François Villon à Aix-en-Provence. Méricles Thadeu Moretti en a pris une photo. L'intérêt de cette photo est de permettre trois comparaisons deux à deux parmi toutes celles possibles entre les cinq types de **représentations bi-dimensionnelles** que nous venons d'énumérer :

Bi.1 Un tableau et une figure géométrique euclidienne plane

Bi.2 Les représentations visuelles planes et la représentation de la troisième dimension de l'espace perçu

Bi.3 Les représentations bi-dimensionnelles sémiotiques et les objets physiques représentés

Figure 1 (*Figure 1*)³ Photographie des parapluies à la Place François Villon en Aix-en-Provence.



³ En italique est un renvoi à la figure du texte Duval (2023).

En outre elle permet de comparer toutes ces représentations bi-dimensionnelles avec la les objets réels avec la profondeur de l'espace que l'on voit, ou que l'on a pu voir si on avait alors été sur place.

Sur la photo, on peut reconnaître plusieurs choses au premier coup d'œil. Elles se distinguent par leur forme, par les tracés qui les sépare de à quoi elles sont juxtaposées et par leur couleur :

C.1 Les parapluies ouverts.

C.2 Les ombres des parapluies sur le sol.

C.3 Les couleurs des parapluies.

C.4 Les baleines de chaque parapluie.

C.5 Les interstices de lumière entre les ombres sur la place

Pour répondre aux questions Q.1 et Q.2 que les comparaisons des représentations bi-dimensionnelles Bi.1, Bi2 et Bi3 soulèvent, il suffit de regarder **laquelle des quatre choses** C.1, C.2, C.3 et C. 4 qui constituent le contenu de la photo s'impose au premier coup d'œil.

1. BI.1 UN TABLEAU ET UNE FIGURE GÉOMÉTRIQUE EUCLIDIENNE PLANE

1.Q.1 Qu'est-ce qu'on reconnaît au premier coup d'œil ?

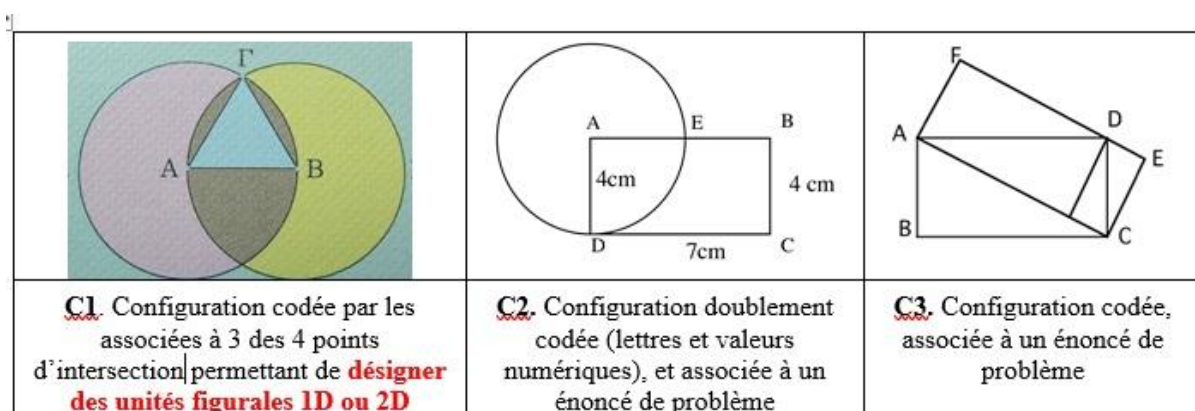
Au premier coup d'œil signifie « instantanément » en un temps plus bref que celui de dire « un », c'est dire en moins d'une seconde ! Cela exclut la possibilité de reconnaître deux ou choses en même temps. C'est le cas, par exemple, lorsque quelque chose vous saute yeux avant même que vous ne l'ayez regardé parce que votre attention est focalisée sur autre chose. **Cette reconnaissance latérale** dépend des expériences antérieures et surtout des **intérêts de chacun qui orientent sa curiosité** et ce qu'il fait spontanément de lui-même. Cette variable est idiosyncrasique. Elle **ne permet pas d'identifier les facteurs qui déclenchent une prise de conscience** des différentes manières de regarder une peinture une figure euclidienne plane qui a été instrumentalement construite.

1.Q.2 Quelles sont les oppositions qui permettent d'y distinguer des formes ou des surfaces significativement différents ?

Une **forme** est un contour fermé, **qui se détache d'un fond** qu'il ne faut évidemment pas confondre avec le support matériel de la représentation (une paroi, une feuille de papier ou un écran électronique). Or dans toutes les représentations bi-dimensionnelles qui sont tracées à main levée ou à l'aide d'un outil sur un matériel, **un basculement dans la distinction des formes** que l'on voit au premier coup d'œil est toujours possible. Par exemple, dans la comparaison de la Figure 2, les formes

que l'on reconnaît dans la configuration euclidienne quadricolore ne sont pas les mêmes selon que l'on voit :

Figure 2 (Figure 3) Comparaison de trois configurations visuelles 2D/2D.



- Le triangle vert dont l'un des côtés est le segment joignant les centres A et B des cercles violet et jaune, qui constituent le fond dont le triangle vert se détache
- Le rectangle vert et le trou triangulaire vert qui le laisse apparaître. Ils sont alors le fond dont se détachent une lunule violette et une lunule jaune se détachent. Et les extrémités de ces deux lunules délimitent deux segments circulaires tronqués par le trou triangulaire.

Autrement dit toutes les figures géométriques euclidiennes :

- Doivent se regarder **en fonction du rapport entre la figure et le fond** dont elle se détache, lequel n'est pas la feuille de papier ou l'écran
- Donnent lieu à **un basculement de reconnaissance des formes et des surfaces** que l'on distingue au premier coup d'œil.

1.Q.2.1 Spécificité des représentations bi-dimensionnellement intentionnellement tracées

Dans les deux cas, la propriété qui fait la puissance sémio-cognitive des représentations bi-dimensionnelles tracées, à main levée ou l'aide d'un outil vient des **formes peuvent être PARTIELLEMENT SUPERPOSÉES** et pas seulement juxtaposées.

On retrouve ces deux possibilités de basculement et la même possibilité de recouvrement partiel dans les configurations euclidiennes, bien qu'il n'y ait pas de couleurs pour distinguer les différentes formes mathématiquement pertinentes. Par exemple, pour et qui sont alors configuration superposant partiellement un cercle et un rectangle :

- Les deux côtés du rectangle AD et AE, désignés dans l'énoncé du problème, se détachent du fond constitué par le cercle et le rectangle

— Les deux rayons du cercle AD et AE se détachent du rectangle et du cercle, les deux étant tronqués par le secteur circulaire ADE, et qui sont alors le fond de la figure.

La seule différence entre la configuration euclidienne quadricolore et cette figure coordonnée à un énoncé de problème, vient de ce que **les basculements se font entre des contours de surface et des tracés linéaires de segments.**

Figure 3 (Figure 8) Décomposition morcelant et reconfiguration de deux unités figurales 2D

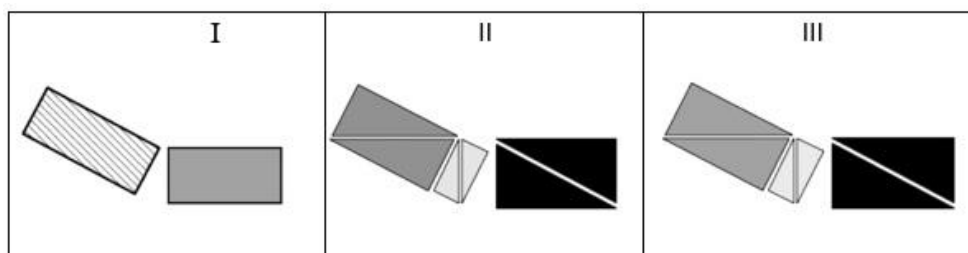
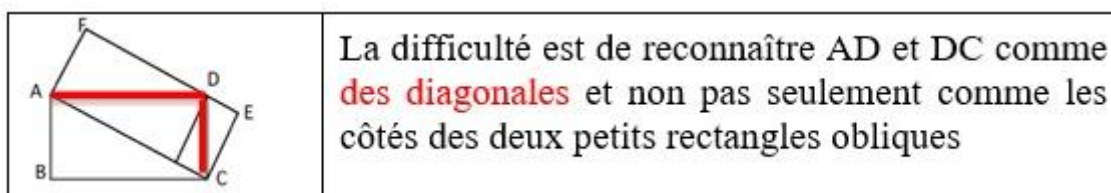


Figure 4 (Figure 7) La condition sémio-cognitive prérequis



La comparaison de ces configurations de la Figure 2 nous conduit donc à introduire la notion sémio-cognitive **D'UNITÉS FIGURALES 2D ET D'UNITÉS FIGURALES 1D** pour analyser toutes les représentations bi-dimensionnelles intentionnellement tracées ou peintes. L'utilisation heuristique de la troisième configuration de la Figure 2, qui ne comporte que des unités figurales 2D, se fait par des reconfigurations successives, qui pour être distinguées et donc vues, requiert l'utilisation de trois couleurs, Figure 3. La difficulté de son utilisation heuristique, Figure 4, vient de qu'il faut reconnaître le côté AB (**unité figurale 1D**) commun à deux rectangles (**unités figurales 2D**) et le côté DE (**unité figurale 1D**) commun à deux rectangles (**2D**) dont l'un est le même que celui du côté AB.

1. Q.2.2 En quoi les photos, qui sont des représentations bi-dimensionnelles, non-sémiotiques différent-elle des tableaux et des figures géométriques ?

Revenons maintenant à la photo des 600 parapluies multicolores ouverts. AUX différences des représentations bi-dimensionnelles précédentes, les photos **ne peuvent pas être analysées en fonction du rapport figure/fond**. Les unités figurales C.1, C.2, C.3, C. 4, et C.5 sont toutes juxtaposées et également données à voir d'emblée. Elles ne laissent pas apparaître des unités figurales totalement

différentes en fonction d'un basculement de notre regard. Cette différence radicale vient de ce qu'elles sont produites automatiquement et instantanément par un appareil, qui **en détermine le contenu** : Figure 5; Figure 6.

Figure 5 (Figure 2) Analyse des passages entre la photo et la réalité photographiée.

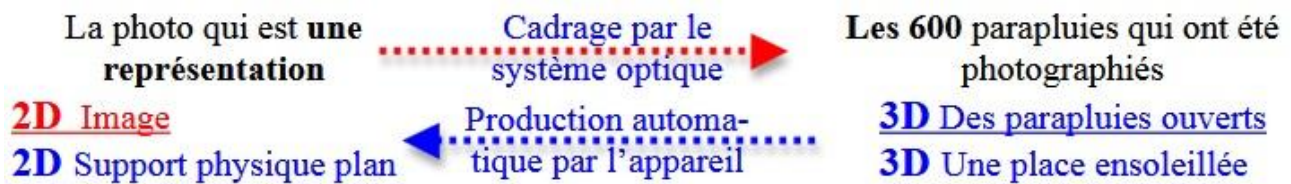
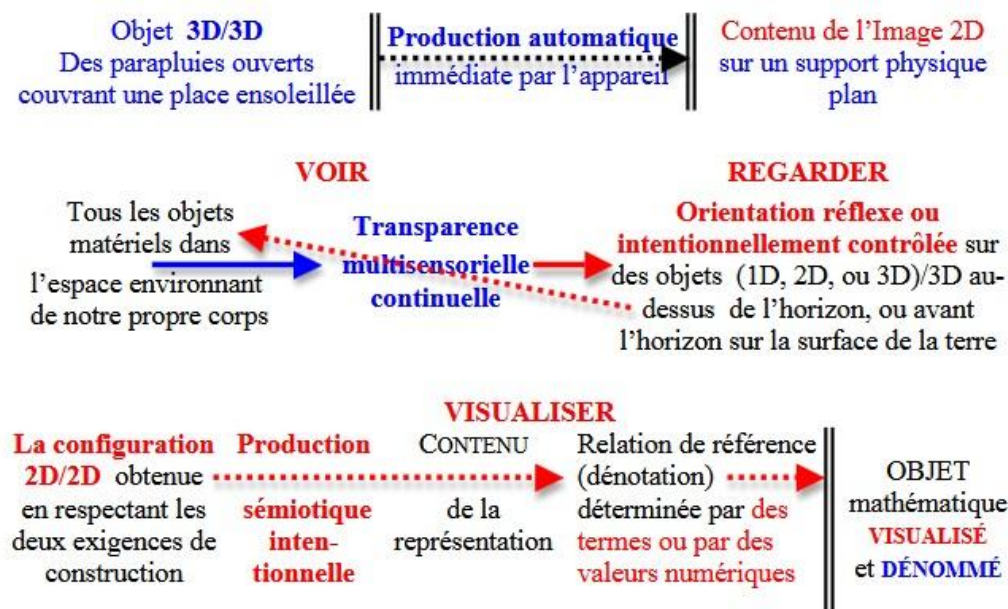


Figure 6 (Figure 12) Les trois processus cognitifs de reconnaissance de ce que l'on voit ou regarde

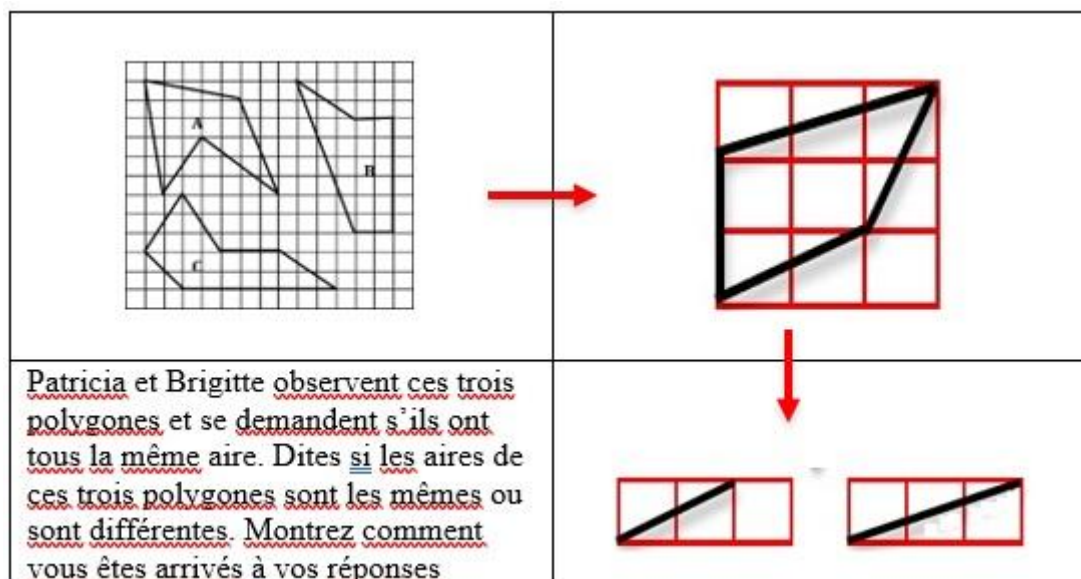


Les trois processus cognitifs de reconnaissance de ce que l'on voit ou regarde). Il y a seulement un glissement des unités figurales les plus proches à celles celle qui apparaissent de plus en plus éloignées, qui dépend du réglage de l'objectif de l'appareil. Et ce glissement vers le lointain va jusqu'à l'indistinction de toutes les unités figurales juxtaposées.

1. Q.2.3 Que se passe-t-il quand on introduit un fond extérieur à la figure ?

Le cas le plus simple est celui où l'on introduit un quadrillage pour faire calculer l'aire d'un polygone quelconque en comptant le nombres de cases du quadrillage, Figure 7.

Figure 7 (Figure 9) Ce qu'il faut rapidement reconnaître en quelques coups d'œil



Ainsi pour comparer les aires de polygones qui comprennent le même quadrilatère irrégulier, il faut décomposer ses côtés en trois diagonales (1D) de deux cases juxtaposées (2D), et une (1D) de trois cases juxtaposées (2D). Mais cette démarche apparemment simple se heurte à un obstacle visuel majeur. Le quadrillage impose la reconnaissance visuelle et le traitement de chacune des cases et de sa diagonale prises une à une, et il occulte totalement la reconnaissance visuelle de toutes les unités figurales 1D et 2D possibles.

Le cas plus complexe, mais aussi celui qui est devenu l'un des outils de visualisation mathématique, est de celui des représentations graphiques cartésiennes. Là, nous avons évidemment le support d'un quadrillage du plan, mais l'introduction de deux axes gradués orientés permet d'associer chaque point d'intersection à un couple de deux nombres. Or cela entraîne également une rupture cognitive entre une appréhension locale entièrement centrée sur ces couples et l'appréhension globale qualitative des droites, des courbes, et aussi de toutes les unités figurales 2D (cercle, ellipse, etc.) qu'elles permettent de construire à partir des équations. La plupart des élèves ne franchissent pas le seuil de cette rupture cognitive, et la puissance heuristique de visualisation des équations du premier et du second de degré leur échappe.

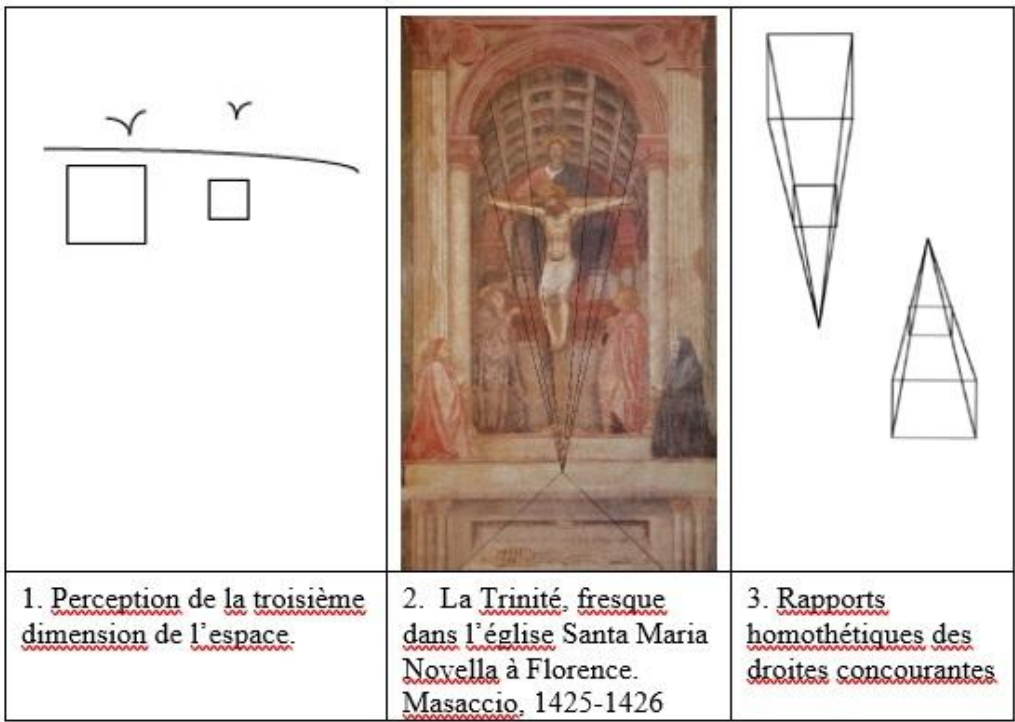
2. BI.2 COMMENT UNE REPRÉSENTATION BI-DIMENSIONNELLE PLANE PEUT-ELLE VISUALISER LA TROISIÈME DIMENSION DE L'ESPACE PERÇU ?

Sur la photo de la place François Villon, la troisième dimension se voit avec la diminution de la grandeur des parapluies, des ombres sur le sol et des interstices de lumière entre les ombres et des baleines des parapluies. Toutes ces unités figurales 2D et 1D diminuent rapidement jusqu'à devenir

indiscernables. On ne peut même pas compter les parapluies que l’on distingue. La profondeur de champ d’une photo dépend du réglage de l’objectif de l’appareil, qui est le point de visée de la place recouverte par les parapluies ouverts.

Sur les représentations bi-dimensionnelles euclidiennes ou sur les tableaux, la troisième dimension est introduite par la construction de la perspective à partir d’un point de fuite, et par l’organisation des unités figurationnelles à partir d’un point de visée qui est l’œil, Figure 8. Le tableau de Masaccio dans l’église Santa Maria Novella à Florence en a été la première réalisation. Sur ce tableau, le point de fuite est déterminé par les rapports homothétiques de droites concourantes. Et le point de visée, qui est déterminé en fonction de la hauteur des yeux de celui qui va regarder le tableau, se situe en dehors de toutes les unités figurationnelles 1D ou 2D qui composent le tableau.

Figure 8 (Figure 11) La troisième dimension : perception, représentation en perspective et homothétie de droites concourantes

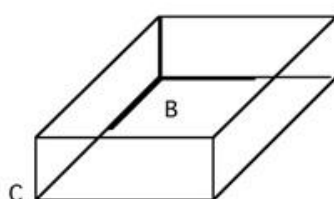
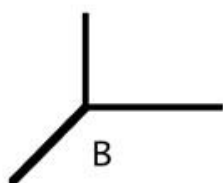


2. Bi.2. 1 Quel rapport entre la figure et le fond dans les représentations bi-dimensionnelles planes de la troisième dimension ?

Entre les représentations de la troisième dimension par la construction de la perspective et les photographies, il y a les dessins de l’espace perçu, Figure 8. La troisième dimension est introduite par une ligne d’horizon qui oppose les formes 2D très schématisées des objets dans le ciel à celles 2D également schématisées des objets qui sont sur la surface de la terre. Dans cette représentation la

proximité et l'éloignement des objets représentés se voit par la diminution de la grandeur des unités figurales 2D, **comme sur les photographies**. Avec cette introduction de la troisième dimension, le rapport entre la figure et le fond dont elle se détache, porte **sur les oppositions devant/derrière, proche/loin, en relief/en creux, saillant/reentrant**, et non plus entre des contours de surface 2D et des segments linéaires 1D. Parmi ces trois oppositions, celles qui permet les basculements de regard les plus surprenants est celle entre voir en creux et voir en relief ou saillant et reentrant. Car elle se fait **entre des unités figurales de même dimension**, quel que soit le nombre de dimensions :

Figure 9 (Figure 10) L'ambiguïté des dessins et le basculement du regard.



Figures transparentes : basculement du nombre de dimensions.

Est-ce la face supérieure de la boîte et le côté CB qui sont entièrement visibles ou la face intérieure et le côté CB ?

Figures en noir et blanc, ou en couleurs : pas de basculement du nombre de dimensions
(D'Amore 2015, p. 441)

Par exemple, la trifurcation 1D au point B se voit en relief ou en creux. On la retrouve en haut comme un sommet du parallélépipède 3D, la boîte sans couvercle qu'il schématise pouvant être vue en relief (la boîte est alors vue par en-dessous) ou en creux (la boîte est alors vue par-dessus). La troisième configuration bicolore juxtapose des cubes 3D, et comprend **10 trifurcations 1D** qui peuvent être vues soit en relief soit en creux. Si le point B, qui n'est pas marqué est vu en relief on compte 5 cubes visibles et superposés comme pour faire une pyramide. Et si le point B est vu en creux, on compte 6 cubes visibles comme pour reposer une pyramide sur sa pointe.

Faire basculer notre regard d'une manière voir à l'autre n'est pas évident. Il faut d'abord fixer la représentation plus ou moins longtemps. Et comme il y a une manière de voir que s'impose plus vite que l'autre, surtout pour la juxtaposition des cubes, cela exige des exercices en commençant par la figure du milieu pour s'entraîner.

2. Bi.2. 2 L'utilisation du support papier et les représentations bi-dimensionnelles géométriques

Les multiples unités figurales qui composent les configurations géométriques ne doivent pas être confondues avec le support papier sur lesquels elles sont tracées. Cependant, ce support matériel est utilisé de nombreuses activités de pliages qui se font en respectant implicitement de nombreuses activités ludiques de pliage.

Il y a aussi autre support matériel didactiquement plus intéressant, le papier calque **que l'on peut retourner ou plier**. Il est utilisé pour construire le point symétrique d'un autre par rapport à l'axe de symétrie axiale. Ce qui est essentiel d'un point de vue strictement cognitif est que **le geste de retournement du calque** (2D), qui se fait dans l'espace physique (3D) n'avait pas été remarqué par les élèves. Ils s'en tenaient au résultat constaté. Cette observation a permis de mettre en évidence une loi cognitive fondamentale pour comprendre, et donc apprendre en mathématiques. Ce que l'on constate visuellement sur une représentation bi-dimensionnelle géométrique **n'a de sens que si l'on prit conscience des gestes ou des opérations qui permettent de l'obtenir**. Ainsi l'utilisation d'un calque facilite le basculement du regard dans la troisième configuration de la Figura 9, pour effectuer le retournement de oppositions devant/derrière et en relief/ en creux des 24 unités figurales 2D qu'elle contient.

Pour éviter toute confusion dans l'utilisation de la notation 3D pour deux choses différentes, la troisième dimension dans les représentations bi-dimensionnelles planes est notée **2D/3D**, les gestes et les opérations dans l'espace physique sont notés **3D/3D**. En outre, on peut reconnaître la forme de tous les objets physiques 3D/3D, par exemple, les maquettes de cubes, de sphères, de pyramides **avec nos mains, sans les voir, rien qu'en touchant**.

3. BI.3 QUELS RAPPORTS ENTRE LES REPRÉSENTATIONS BI-DIMENSIONNELLES SÉMIOTIQUES ET LES OBJETS PHYSIQUES REPRÉSENTÉS ?

La puissance du registre d'organisation bi-dimensionnelle d'unités figurales 1D, 2D et 3D est de pouvoir créer, comme le registre des langues parlées, des représentations sémiotiques **indépendamment de la réalité, ou de tout vraisemblance**, Figure 10. Les objets physiquement impossibles tels le triangle de Penrose ou les escaliers d'Escher en sont les exemples les plus célèbres.

Figure 10 (Figure 14) Les quatre types de registres producteurs de représentation sémiotiques

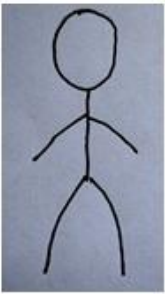
	Registres DISCURSIFS . Linéarité d'expressions qui sont des unités de sens	Registres NON-DISCURSIFS : Appréhension d'une organisation bi-dimensionnelle d'unités figurales 1D, 2D ou 3D
Registres multifonctionnels : les traitements sont NON - ALGORITHMISABLES	I. LES LANGUES PARLEES : trois opérations hiérarchiquement incluses (désignation d'objets, énonciation et raisonnement) Deux modalités de production : la parole et l'écriture	II. Configuration géométriques : trois opérations indépendantes (construction instrumentale, partage et reconfiguration méréologiques, déconstruction dimensionnelle) ICONIQUE : dessin, croquis
Registres monofonctionnels : <u>les</u> traitements sont ALGORITHMISABLES	III. LES ECRITURES SYMBOLIQUES (Systèmes de numération, Ecriture algébrique, Langues formelles) Opérations de substitution illimitée . Modalité de production : l'écriture	IV. GRAPHEs SCHEMAS : Jonctions entre des points, marquée par des flèches GRAPHIQUES CARTESIENS : Trois opérations (zoom, interpolation, et changement d'axes)

Les représentations d'objets physiquement impossibles sont également **indépendantes de toute considération de grandeur**, à la différence des illusions perceptives, telle celle de Müller –Lyer concernant la perception de la grandeur d'un segment, ou celle de Delboeuf concernant deux cercles concentriques. Loin d'être des contre-exemples ou des objections à la fiabilité des figures géométriques, la visualisation d'objets physiquement impossibles révèle l'apport heuristique d'exploration et de modélisation du registre d'organisation bi-dimensionnelle d'unités figurales. La question des rapports entre les représentations bi-dimensionnelles sémiotiques et les objets physiques représentés est celle de leur ressemblance ou de leur non-ressemblance.

3. Bi.3.1 Des degrés d'iconicité

Les représentations d'objets réels (**3D/3D**) changent du tout au tout selon le point où on se place pour les regarder et les peindre, les dessiner, ou les photographier : de face, de profil, de biais, par en-dessus, par en-dessous...

Figure 11 (Figure 21) Degrés d'iconicité dans la reconnaissance visuelle d'un visage.

		
A. Représentation figurative : Portrait de Ginevra de Béné (1474 ?)	B. Représentation schématique : Visage de profil et visage de face (1936 en noir, 1946 en couleur)	C. Représentation symbolique

Cela permet de définir un critère de ressemblance entre la figure (2D) et l'objet 3D/3D représenté en regardant séparément le contour fermé de la figure et les caractéristiques significatives à l'intérieur du contour fermé. On peut alors distinguer trois degrés de ressemblance ou d'iconicité, selon que le contour fermé ou ses caractéristiques internes conservent ou non cette ressemblance, Figure 11 : la représentation figurative, la représentation schématique, et la représentation symbolique, que l'on pourrait aussi appeler représentation figurative, représentation semi-figurative et représentation schématique.

3. Bi.3.2 Les trois processus du fonctionnement cognitif sous-jacent à toutes les représentations bi-dimensionnelles sémiotiques ou non-sémiotiques

Le rapport de causalité entre les objets physiques 3D/3D et leurs multiples représentations possibles 2D est le point crucial dans l'analyse de tout ce que l'on voit et reconnaît quasi-instantanément. Et là nous devons distinguer trois processus cognitifs, et non pas seulement deux, Figure 6. Il y a évidemment la différence radicale qui oppose les photo (Figure 5) et la puissance heuristique de création des représentations bi-dimensionnelle qui est indépendante de la réalité (Figure 6, le premier et le troisième processus). Et il y a d'abord la transparence multisensorielle de notre corps à tout ce qui lui est proche ou lointain, à travers laquelle on est constamment présent à ce qui est proche ou lointain (Figure 6 - le deuxième processus)

Le premier obstacle pour comprendre en géométrie vient de ce que ces trois processus du fonctionnement cognitif ne sont pas distingués dans l'enseignement de la géométrie aux élèves de 6

à 16 ans. Les curriculums sont organisés comme s'il suffisait de voir et de manipuler pour acquérir des connaissances et pour pouvoir ensuite reconnaître quand et comment les utiliser.

4. COMMENT SE FAIT LA MISE EN CORRESPONDANCE DES UNITÉS DISCURSIVES DE SENS D'UN ÉNONCÉ, ET DES UNITÉS FIGURALES D'UN ÉNONCÉ DÉSIGNÉS DANS UN ÉNONCÉ ?

L'enjeu didactique de cette question porte sur l'opposition cognitive fondamentale entre ce que les figures géométriques visualisent et le vocabulaire concernant les propriétés et les objets géométriques. Faut-il **DIRE POUR VOIR ce qu'il faut reconnaître ce qui est mathématiquement pertinent** dans une définition, un théorème ou un énoncé de problème ? Ou **PEUT-ON COMPRENDRE** une définition ou un énoncé de problème **SI ON NE VOIT PAS** ce qu'il désigne par des termes d'unités figurales 1D, 2D ou 3D ?

Trois comparaisons entre les représentations produites par les deux registres multifonctionnels et non-algorithmisables (Figure 10), apportent des éléments de réponse à ces deux questions.

4.1 Classification du vocabulaire en fonction du nombre de dimensions des unités figurales

Tous les termes du vocabulaire géométrique de base se caractérisent par le nombre de dimensions des unités figurales qu'il nomme, Figure 12.

Leur classification se fait en fonction des unités figurales 2D/2D, 1D/2D et 0D/2D, qui constituent la marge verticale du tableau. **Les propriétés, qui sont toujours des termes de relation entre deux unités figurales**, se distinguent en deux types :

- Celles qui caractérisent une unité figurale 2D, dans laquelle elles **s'opposent à d'autres propriétés du même type**,
- Celles qui **sont indépendantes de toute unités figurales 2D**, bien qu'elles puissent les caractériser.

Figure 12 (Figure 17) Classification du vocabulaire géométrique de base.

VISUALIZAÇÃO	OBJETOS FIGURAIS	PROPRIEDADES	
		relação entre DUAS unidades figurais 1D pertencentes a uma unidade figurar 2D	independente de pertencer a uma unidade 2D
Unidades figurais 2D instantaneamente reconhecíveis (figuras típicas) ↓	Quadrado, triângulo, paralelogramo, círculo, ângulo ↑	Regular, convexo, côncavo, n lados, isósceles, equilátero, retângulo, agudo, obtuso, reto	Simetria axial Simetria central
Unidades figurais 1D mescladas perceptualmente em unidades 2D ↓	Reta, segmento, lado, diagonal, raio, corda, curva, arco ↓		Secante, paralela, Perpendicular, tangente
Unidades figurais 0D identificável, ou somente codificável em uma unidade 1D	Pontos notáveis: interseção, vértice, centro. Pontos implícitos que não podem ser vistos		Simetria

Les flèches dans la marge verticale indiquent les unités figurales qui fusionnent visuellement dans une unité figurale d'un nombre plus grand de dimensions. Les flèches entre deux cases intérieures du tableau indiquent les phrases que l'on peut énoncer en prenant un terme dans chacune des deux cases et en les articulant par un verbe (« être », « appartenir »)

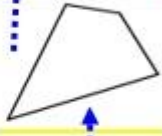
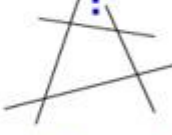
4.2 La déconstruction dimensionnelle des unités figurales reconnues

La déconstruction dimensionnelle des formes 2D/2D ou 3D/2D est processus cognitif sous-jacent à la perception visuelle qui est l'inverse de celui indiqué par les flèches descendantes dans la colonne droite de la Figure 13. Elle va donc contre la visualisation mathématique qui est indiquées par les flèches montantes dans la colonne gauche.

La déconstruction dimensionnelle connut dissocie les figures 3D/2D en trois faces visibles 2D/2D ? puis à dissocier les unités figurales 2D/2D en droites sous-jacentes à chacun des côtés du polygone, et les unités figurales 1D/2D en point d'intersection qui sont les sommets des polygones. Et cela conduit à classer les termes géométriques ainsi que leurs différents contextes de leur emploi possible (Figure 12) en fonction des deux mouvements inverses des flèches de la Figure 13.

La déconstruction dimensionnelle des formes 2D/2D ou 3D/2D ne doit pas être confondue avec la décomposition heuristique des formes 2D en d'autres formes 2D, pour les reconfigurer autrement (Figure 3).

Figure 13 (Figure 13) Déconstruction dimensionnelle des formes perçues.

NOMBRE DE DIMENSIONS	VISUALISATON	EMPLOI MATHÉMATIQUE DE LA LANGUE ET VOCABULAIRE GÉOMÉTRIQUE
3D		Un <u>polyèdre</u>
2D		Un <u>polygone</u> — soit une <u>face de polyèdre</u> — soit la figure obtenue <u>par un plan d'intersection</u> d'un autre polyèdre
1D		<u>Droites</u> étant entre elles — <u>perpendiculaires</u> , <u>parallèles</u> , ou <u>concourantes</u> ... — ou <u>soutiens</u> de <u>segments</u> .
0D		<u>Points d'intersection</u> qui sont — les <u>extrémités d'un segment</u> — le <u>milieu d'un segment</u> — les <u>sommets d'un polygone</u> .

La nécessité de la déconstruction dimensionnelle des formes 2D/2D ou 3D/2D s’est imposée pour mettre en correspondance les termes du vocabulaire géométrique des énoncés mathématiques et les unités figurationnelles des visualisations associées aux énoncés.

4.3 Le décalage dimensionnel dans la mise en correspondance des unités discursives de sens et des unités figurationnelles désignées

Comprendre comment on travaille et on pense en géométrie et l’aptitude à en faire soi-même un peu requièrent qu’une **synergie entre les deux registres multifonctionnels et non-algorithmisables** ait commencé à se développer, Figure 13. Sur la figure, cette synergie est indiquée par les flèches rouges obliques entre les flèches bleues montantes dans la colonne de gauche et celles descendantes dans la colonne de droite.

Les flèches bleues montantes traduisent le fait que pour « voir en géométrie », il faut passer dans une dimension supérieure. Ainsi on peut facilement monter de 01/2D à 1D/2D, mais non de 2D/2D à 3D/2D. Et monter de 2D/2D à 3D/2D n’implique que l’on voie tous les changements de plan

ou de faces pour les objets physiques 3D/3D. En revanche, manipuler des maquettes 3D/3D développait la manière de voir et d'utiliser les visualisations 3D/2D.

Les flèches bleues descendantes traduisent le fait que pour dire ce qui est mathématiquement pertinent dans une configuration $nD/2D$, il faut descendre d'au moins une dimension. Le vocabulaire des propriétés correspondant aux unités figurales 1D et 0D est celui qui est primordial dans tous les énoncés de définition et de théorèmes.

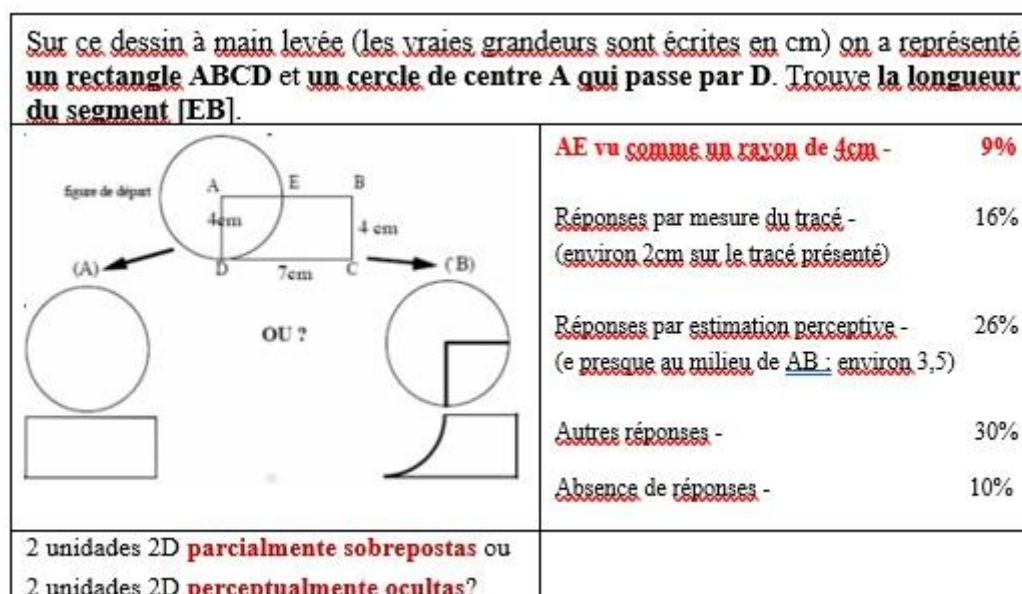
Il est extrêmement regrettable pour les élèves, pour les enseignants et pour les didacticiens, que les recherches, psychologiques et didactiques sur la perception de l'espace, et sur la compréhension des textes comme sur les différentes formes de raisonnement, n'aient pas pris en compte tous ces facteurs. Or leur prise en compte s'impose tant d'un point de mathématique que psychologique et épistémologique. Comment se fait alors l'enseignement de la géométrie dans les deux cycles du Primaire et du Collège ?

4.4 Le piège didactique de la désignation des points d'intersection par des lettres

Il y a plusieurs termes ou syntagmes nominaux possibles pour désigner les points (0D). **Le choix dépend de l'unité figurale 1D ou 2D à laquelle ils appartiennent** : sommet, centre, milieu, point de croisement... A l'inverse, il n'y a pas d'unité figurale précise pour **un point quelconque n'importe où**, dans le plan, sur une unité 1D ou 2D. On est obligé de prendre une lettre pour le nommer et le faire voir comme une unité figurale 2D, et donc pour pouvoir le désigner dans un énoncé ou une explication. J'ai moi-même triché un peu dans ce texte, comme tout le monde, en utilisant des lettres dans la comparaison de deux figures (Figure 2, C1 et Figure 7, mais non la Figure 3). Le piège commence à se refermer dès qu'on emploie des lettres avec mots, car très vite on n'utilise que les lettres pour écrire, les mots étant seulement rapidement dits oralement. Et pour ceux qui écoutent ou qui lisent, les occurrences des mots sont en vrac dans les manuels, dans les fiches de travail, et dans ce qui est institutionnalisé au terme des séquences didactiques.

Cette désignation « aveugle » pour reprendre la qualification des signes par Leibniz, a une raison plus profonde. Elle vient d'une subordination de la géométrie aux unités figurales **1D/3D**, **2D/3D** et **3D/3D**, c'est-à-dire à **la nécessité de fixer des points pour mesurer ou calculer** des distances ou des longueurs, des angles, des aires et des volumes. Les conséquences de cet enseignement sont spectaculaires et souvent irréversibles pour les apprentissages ultérieurs de mathématiques. On voit beaucoup d'élèves vouloir mesurer sur le papier des unités **1D/2D** pour calculer des périmètres, des aires, ou tout simplement renoncer (Fig. 14, Fig. 15 et Fig. 7). Quant aux évaluations nationales, que ce soit par pudeur ou par censure, n'en parlons pas !

Figure 14 (Figure 4) Questionnaires d'évaluation pour la Configuration C2



- Est-il besoin de répéter ici qu'il absolument nécessaire de commencer par séparer
- les activités centrées sur les manières de voir des figures géométriques
 - les activités de calculs et donc sur l'utilisation de formules,
 - et les tâches centrées la prise de conscience des opérations discursives requises pour formuler des énoncés ?

Figure 15 (Figure 6) Résultats pour le même problème posés à trois niveaux scolaires.

	6 ^{ème} 11-12 ans	5 ^{ème} 12-13 ans	4 ^{ème} 13-14 ans
Une diagonale divise un rectangle en deux triangles égaux	5%	0	6%
Mesure des côtés, puis blocage	10%	30%	45%
Invariance par compensations (Piaget)	10%	10%	2%
Calcul à partir des mesures des côtés sur le dessin (2,5) × (5cm) (2,3) × (5,5cm)	10%	14%	10%

5. Pour faire soi-même ces expériences, découvrir ce qu'on ne soupçonnait pas avant, et devenir intellectuellement autonome en mathématiques.

Il faut commencer par regarder attentivement la photo des 600 parapluies juxtaposés, en cherchant à répondre aux deux questions initiales Q.1 et Q.2 (Qu'est-ce qu'on reconnaît au premier coup d'œil ? Quelles sont les oppositions qui permettent d'y distinguer des formes ou des surfaces significativement différents ?) avant de continuer.

Ensuite, comme dans un véritable mode d'emploi ou de montage, il faut regarder attentivement **toutes les comparaisons de figures** qui sont successivement présentées, et chercher à voir et dire soi-même les différences que l'on découvre.

Il y a certaines sections ou sections du texte qui ne sont pas utilisées dans ce mode emploi. Elles concernent le registre des langues parlées des écritures symboliques (DUVAL, 2023 - Section II.1) et le registre des langues parlées (DUVAL, 2023, Section II.2).

Et pour finir revenons sur le titre « **Le plaisir de voir, de comprendre, de dire et d'inventer...** en mathématiques, bien sûr ! ». Tout ça en même temps ! pourrez-vous penser. Mais faire des aller et venues incessant entre ces quatre démarches sémio-cognitives est la manière de travailler en géométrie.

RÉFÉRENCE

DUVAL, R. Le plaisir de voir, de comprendre, de dire et d'inventer... en mathématiques, bien sûr ! Florianópolis: REVEMAT, 2023.
Disponible à l'adresse <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/view/3547>

APÊNDICE

INSTRUÇÕES DE USO:

de “O prazer de ver, entender, expressar e inventar... em matemática, é claro!” aos alunos em primeiro lugar, seus professores e educadores^I

Raymond Duval^I

Trad. Méricles T. Moretti^{II}

^I Professor emérito da Université du Littoral Côte d’Opale (ULCO/Dunkerque).

^{II} Professor titular aposentado em exercício voluntário no PPGECT/UFSC

INTRODUÇÃO

Para nos conscientizarmos de como **OLHAR** para **VER** o que é preciso ver em uma imagem, um desenho, uma pintura, **uma figura geométrica euclidiana** ou uma fotografia, precisamos **COMPARÁ-LAS** fazendo a nós mesmos duas perguntas:

Q.1 O que a gente reconhece à primeira vista?

Q.2 Quais contrastes permitem distinguir formas ou superfícies significativamente diferentes?

No verão de 2019, 600 guarda-chuvas multicoloridos, abertos e justapostos, cobriram a Place François Villon, em Aix-en-Provence, e foram fotografados por Méricles Thadeu Moretti (Figura 1(Figura 1))².

O interesse dessa foto é que ela permite três comparações duas a duas entre os cinco tipos de representações bidimensionais seguintes:

Bi.1 Um quadro e uma figura geométrica euclidiana plana;

Bi.2 Representações visuais planas e a representação da terceira dimensão do espaço percebido;

Bi.3 Representações bidimensionais semióticas e os objetos físicos representados.

¹ Sob o título “O prazer de ver, entender, expressar e inventar... em matemática, é claro!” foi publicado no ebook: MORETTI, Méricles T.; SABEL, E. Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval - parte 2. Florianópolis: GPEEM/PPGECT/UFSC, 2023. Disponível em: <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982>

² As indicações em itálico das figuras são referências às figuras ao texto de Duval (2023a, 2023b).

Além disso, ela nos permite comparar todas essas representações bidimensionais com os objetos reais com a profundidade do espaço que vemos, ou que poderíamos ter visto se estivéssemos lá no momento.

Na foto, a gente pode reconhecer várias coisas à primeira vista; podem ser distinguidas por sua forma, pelas linhas que as separam daquilo a que estão justapostos e por sua cor:

C.1 Os guarda-chuvas abertos;

C.2 As sombras dos guarda-chuvas no chão;

C.3 As cores dos guarda-chuvas;

C.4 As nervuras de cada guarda-chuva;

C.5 Os interstícios de luz entre as sombras na praça.

Figura 1 Foto dos guarda-chuvas na Place François Villon em Aix-en-Provence.



Fonte: *Figura 1* em Duval (2023a, 2023b).

Para responder às perguntas Q.1 e Q.2 levantadas pelas comparações das representações bidimensionais Bi.1, Bi2 e Bi3, precisamos apenas observar **qual dos quatro elementos** C.1, C.2, C.3 e C.4 que compõe o conteúdo da foto destaca-se à primeira vista.

1. Bi.1 Um quadro e uma figura geométrica euclidiana plana

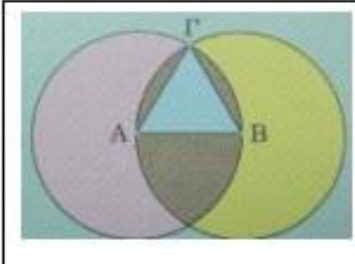
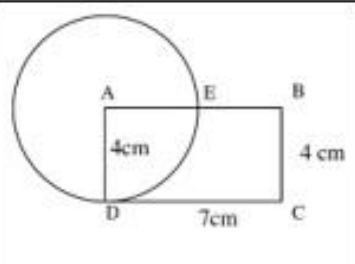
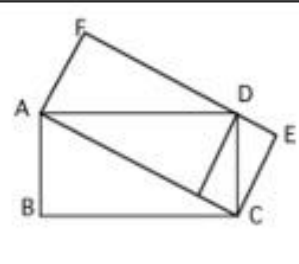
1.Q.1 O que a gente reconhece à primeira vista?

À primeira vista significa “instantaneamente”, em um tempo menor do que dizer “um”, ou seja, em menos de um segundo! Isso exclui a possibilidade de reconhecer duas ou mais coisas ao mesmo tempo; é o caso, por exemplo, quando algo salta aos olhos antes mesmo de você ter olhado para ele uma vez que a sua atenção está concentrada em outra coisa. **Esse reconhecimento lateral** depende da experiência anterior e, acima de tudo, dos **interesses de cada indivíduo**, que orientam sua curiosidade e o que ele faz espontaneamente por si mesmo. Essa variável é idiossincrática, **não nos permite identificar os fatores que desencadeiam a consciência** das diferentes formas de olhar para uma pintura, de uma figura plana euclidiana construída instrumentalmente.

1.Q.2 Quais são os contrastes que permitem distinguir formas ou superfícies significativamente diferentes?

Uma forma é um contorno fechado que se destaca de um fundo, que obviamente não deve ser confundido com o suporte material para a representação (uma parede, uma folha de papel ou uma tela eletrônica). Entretanto, em todas as representações bidimensionais desenhadas à mão livre ou usando uma ferramenta em um material, há sempre a possibilidade de **mudança na distinção das formas** que vemos à primeira vista. Por exemplo, na comparação da Figura 2 (*Figura 3 - seção 1.2* em Duval (2023a, 2023b)), as formas que reconhecemos na configuração euclidiana de quatro cores não são as mesmas, dependendo do que vemos:

Figura 2 Comparação de três configurações visuais 2D/2D.

		
C1. Configuração codificada pela associação de 3 dos 4 pontos de interseção para designar unidades figurais 1D ou 2D	C2. Configuração duplamente codificada (letras e valores numéricos), e associada a uma declaração de problema	C3. Configuração codificada associada a um enunciado do problema

Fonte: *Figura 3* em Duval (2023a, 2023b).

- o triângulo verde, em que um dos lados é o segmento que une os centros A e B dos círculos roxo e amarelo, que formam o fundo do qual o triângulo verde se destaca;

- o retângulo verde e o orifício triangular verde que o revela, eles formam o fundo contra o qual se destacam uma luneta violeta e uma amarela; e as extremidades dessas duas lúnulas delimitam dois segmentos circulares truncados pelo orifício triangular.

Em outras palavras, todas as figuras geométricas euclidianas:

- devem ser vistas em **termos da relação entre a figura e o fundo** do qual ela emerge, que não é a folha de papel ou tela;
- dão origem a **uma mudança no reconhecimento de formas e superfícies** que podem ser distinguidas à primeira vista.

1.Q.2.1 Especificidade de representações bidimensionais traçadas intencionalmente

Em ambos os casos, a propriedade que dá às representações bidimensionais seu poder semiocognitivo, seja desenhada à mão livre ou usando uma ferramenta, é que as **formas podem ser PARCIALMENTE SOBREPOSTAS** e não apenas justapostas.

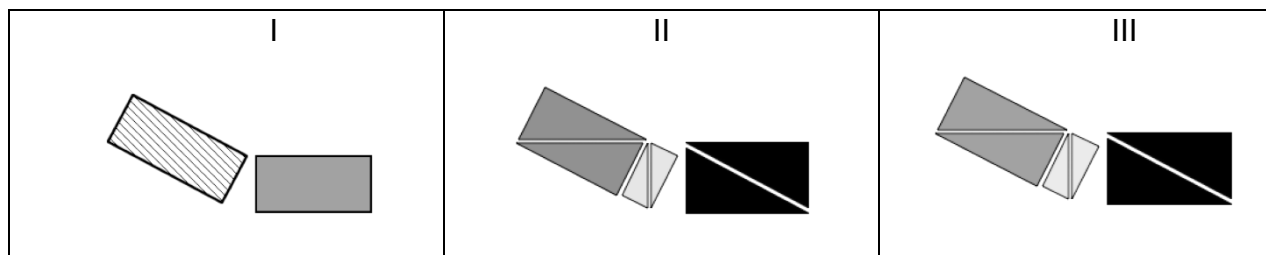
Essas duas possibilidades de basculamento e a mesma possibilidade de sobreposição parcial são encontradas nas configurações euclidianas, embora não haja cores para distinguir as diferentes formas matematicamente relevantes. Por exemplo, para e que são as configurações que sobrepõem parcialmente um círculo e um retângulo:

- Os dois lados do retângulo AD e AE, designados no enunciado do problema, são destacados do plano de fundo formado pelo círculo e pelo retângulo;
- Os dois raios da circunferência AD e AE são destacados do retângulo e da circunferência, ambos truncados pelo setor circular ADE, o que os torna o plano de fundo da figura.

A única diferença entre a configuração quadricolor euclidiana e essa figura, que é articulada com uma declaração de problema, se dá pelo fato de que **as alternâncias se dão entre contornos de superfície e linhas lineares de segmentos**.

A comparação dessas duas configurações da Figura 2 (*Figura 3*) nos leva a introduzir a noção semiocognitiva de **UNIDADES FIGURAIS 2D E UNIDADES FIGURAIS 1D** para analisar todas as representações bidimensionais desenhadas ou pintadas intencionalmente. O uso heurístico da terceira configuração da Figura 2 (*Figura 3*), que compreende apenas unidades figurais 2D, é obtido por meio de reconfigurações sucessivas, que exigem o uso de três cores para serem distinguidas e, portanto, vistas, Figura 3 (*Figura 8 - Seção 1.2, a configuração C3 em Duval (2023a, 2023b)*).

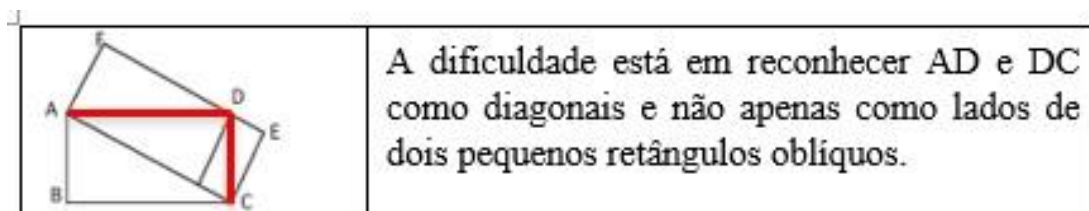
Figura 3 Decomposição e reconfiguração de duas unidades figurais 2D.



Fonte: Figura 8 em Duval (2023a, 2023b).

A dificuldade do uso heurístico, Figura 4 (Figura 7), é que é necessário reconhecer o lado AB (unidade figural 1D) comum a dois retângulos (unidades figurais 2D) e o lado DE (unidade figural 1D) comum a dois retângulos (2D), um dos quais é o mesmo que o lado AB.

Figura 4 A condição semiocognitiva pré-requisitada.



Fonte: Figura 7 em Duval (2023a, 2023b).

1.Q.2.2 Como as fotos, que são representações bidimensionais e não semióticas, diferem das tabelas e figuras geométricas?

Voltemos à foto dos 600 guarda-chuvas multicoloridos abertos (Figura 1 (figura 1)). Ao contrário das representações bidimensionais anteriores, **as fotos não podem ser analisadas de acordo com a proporção figura/solo**. As unidades figurais C.1, C.2, C.3, C.4 e C.5 estão todas justapostas e igualmente visíveis desde o início. Elas não revelam unidades figurais totalmente diferentes, dependendo de como inclinamos nosso olhar. Essa diferença radical decorre do fato de que são produzidas de forma automática e instantânea por uma câmera, que determina **seu conteúdo** (Figura 5 (Figura 2)) as passagens entre a foto e a realidade fotografada (Figura 6 (Figura 12 - seção 1.5 em Duval (2023a, 2023b))..

Figura 5 Análise das transições entre a fotografia e a realidade fotografada.



Fonte: Figura 2 em Duval (2023a, 2023b).

Há apenas uma mudança das unidades figurais mais próximas para aquelas que aparecem cada vez mais distantes, o que depende da configuração da lente da câmera. E essa mudança para o distante vai até a indistinção de todas as unidades figurais justapostas

Figura 6 Os três processos cognitivos para reconhecer o que vemos ou olhamos.

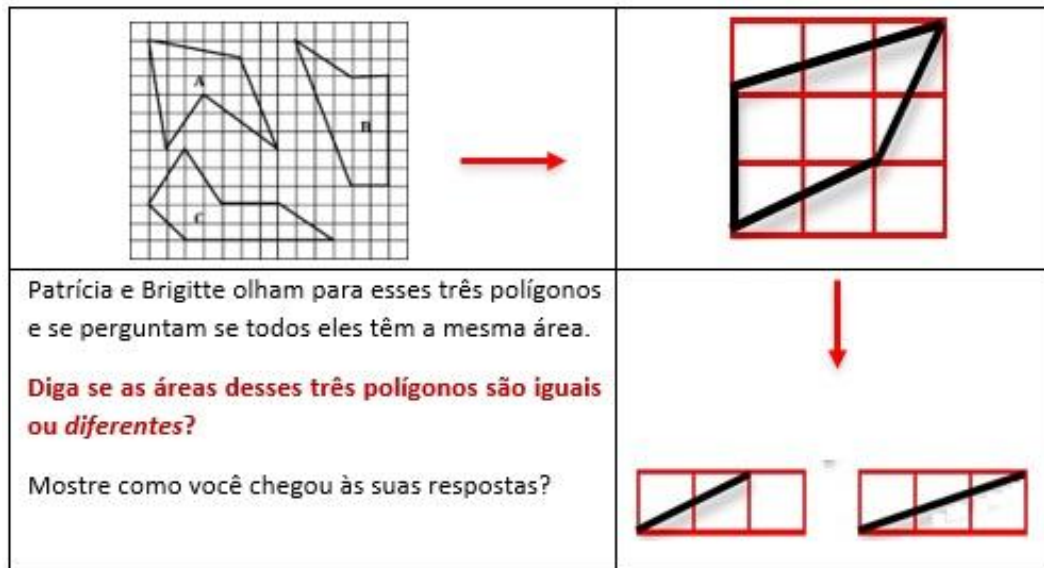


Fonte: Figura 12 em Duval (2023a, 2023b).

1. Q.2.3 O que acontece quando um fundo exterior à figura é introduzido?

O caso mais simples acontece quando introduzimos uma grade para calcular a área de qualquer polígono contando o número de casas da grade, Figura 7 (Figura 9 - Seção 1.3 em Duval (2023a, 2023b)). Assim, para comparar as áreas de polígonos que incluem o mesmo quadrilátero irregular, precisamos decompor seus lados em **três diagonais (1D) de duas casas justapostas (2D) e uma (1D) de três casas justapostas (2D)**. Mas essa abordagem aparentemente simples esbarra em um grande obstáculo visual. A grade exige o reconhecimento visual e o processamento de cada um das casas e de sua diagonal considerados uma a uma, e **obscurece totalmente o reconhecimento visual de todas as possíveis unidades figurais 1D e 2D possíveis**.

Figura 7 O que você precisa reconhecer em um relance.



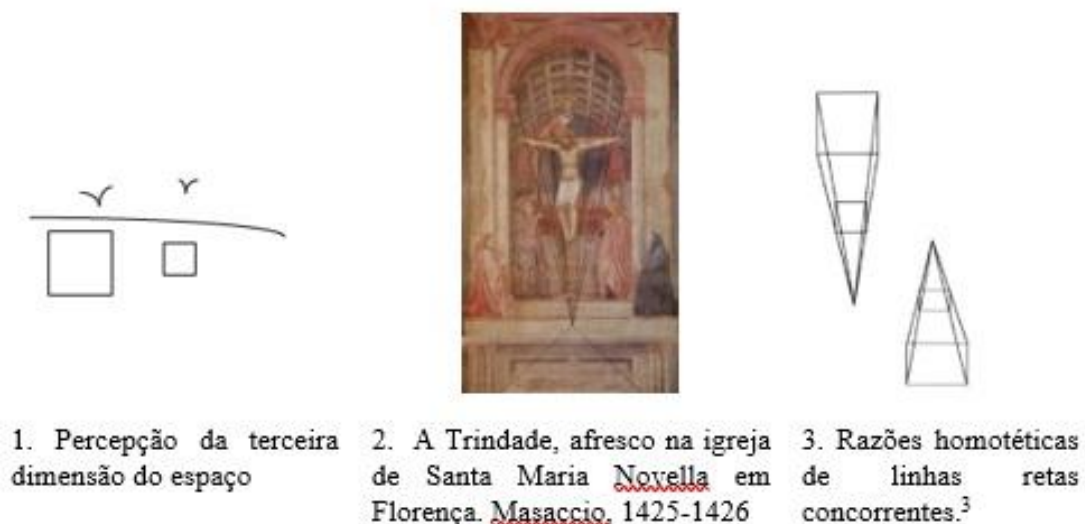
Fonte: Figura 9 em Duval (2023a, 2023b).

O caso mais complexo, mas que se tornou uma das ferramentas de visualização matemática, é o das representações gráficas cartesianas. Aqui, obviamente, temos o suporte de uma grade plana, mas a introdução de dois eixos graduados orientados significa que cada ponto de interseção pode ser associado a um par de dois números. No entanto, isso também leva a uma ruptura cognitiva entre uma compreensão local centrada inteiramente nesses pares e a compreensão qualitativa geral de linhas retas, curvas e todas as unidades figurais 2D (círculo, elipse etc.) que permitem que sejam construídas a partir de equações. A maioria dos alunos não ultrapassa o limiar dessa ruptura cognitiva, e o poder heurístico da visualização de equações de primeiro e segundo graus lhes escapa.

2. Bi.2 Como uma representação bidimensional plana pode visualizar a terceira dimensão do espaço percebido?

Na foto da Place François Villon (Figura 1 (Figura 1)), a terceira dimensão pode ser vista no tamanho cada vez menor dos guarda-chuvas, nas sombras no chão e nas lacunas de luz entre as sombras e as nervuras dos guarda-chuvas. Todas essas unidades figurais 2D e 1D diminuem rapidamente até se tornarem indistinguíveis. A gente não consegue nem mesmo contar o número de guarda-chuvas que vê. A profundidade de campo de uma fotografia depende da configuração da lente da câmera, que é o ponto de vista da área coberta pelos guarda-chuvas abertos.

Figura 8 A terceira dimensão: percepção, representação em perspectiva e homoteticidade de linhas que se cruzam³.



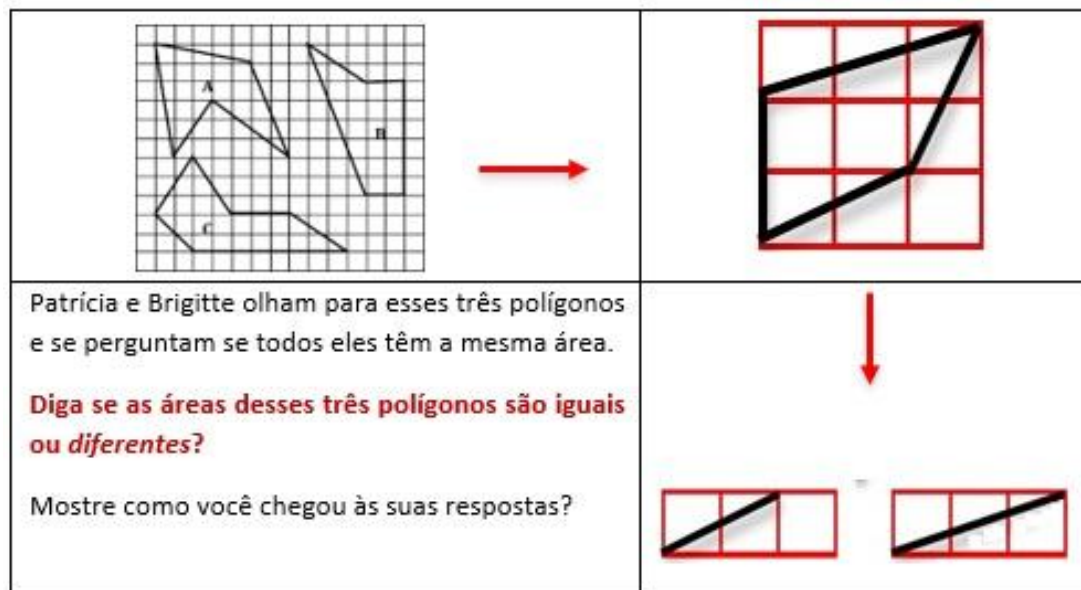
Fonte: Figura 11 em Duval (2023a, 2023b).

2. Bi.2. 1 Qual é a relação entre a figura e o fundo em representações bidimensionais planas da terceira dimensão?

Entre as representações da terceira dimensão por meio da construção de perspectiva e fotografias, há os desenhos do espaço percebido, Figura 8 (Figura 11). A terceira dimensão é introduzida por uma **linha do horizonte** que contrasta as formas **2D altamente esquematizadas** dos objetos no céu com as formas 2D igualmente esquematizadas dos objetos na superfície da Terra. Nessa representação, a proximidade e a distância dos objetos representados podem ser vistas pela redução do tamanho das unidades figurais 2D, **como nas fotografias**. Com a introdução da terceira dimensão, a relação entre a figura e o fundo do qual ela se destaca se baseia em oposições entre **frente e verso**, **perto e longe**, **côncavo e convexo**, **saliente ou retraído**, e não mais entre contornos de superfície 2D e segmentos lineares 1D. Dessas três oposições, a que permite as mudanças mais surpreendentes no olhar é aquela entre ver côncavo/convexo ou saliente/reentrante. Isso se deve ao fato de que ela ocorre **entre unidades figurais da mesma dimensão**, independentemente do número de dimensões, Figura 9 (Figura 10).

³ DUVAL (2018, p. 236).

Figura 9 A ambiguidade dos desenhos e a mudança do olhar.



Fonte: Figura 10 em Duval (2023a, 2023b).

Por exemplo, a trifurcação 1D no ponto B pode ser vista em relevo ou rebaixada. Ela pode ser vista na parte superior como um vértice do paralelepípedo 3D, e a caixa sem tampa que ela representa pode ser vista em relevo (a caixa é então vista de baixo) ou rebaixada (a caixa é então vista de cima). A terceira configuração de duas cores justapõe cubos 3D e compreende 10 trifurcações 1D que podem ser vistas em relevo ou rebaixadas. Se o ponto B, que não está marcado, for visto em relevo, há 5 cubos visíveis e sobrepostos como se formassem uma pirâmide.

Mudar nosso olhar de uma forma de ver para outra não é fácil. Primeiro, é preciso manter a representação por um determinado período. E como há uma maneira de ver que se impõe mais rapidamente do que a outra, especialmente para a justaposição de cubos, é necessário fazer exercícios começando com a figura do meio para praticar.

2. Bi.2. 2 O uso de papel como suporte e representações geométricas bidimensionais

As múltiplas unidades figurais que compõem as configurações geométricas não devem ser confundidas com o suporte de papel em que são desenhadas. Entretanto, esse suporte material é usado em muitas atividades de dobradura, que implicitamente respeitam numerosas atividades lúdicas de dobradura.

Outro auxílio didático mais interessante é o papel vegetal, que **pode ser virado ou dobrado**. Ele é usado para construir um ponto que seja simétrico com outro ponto em relação a um eixo de simetria axial. O que é essencial de um ponto de vista estritamente cognitivo é que **o gesto de virar o papel vegetal** (2D), que é feito no espaço físico (3D), não foi percebido pelos alunos. Eles se

prenderam ao resultado observado. Essas observações destacaram uma lei cognitiva fundamental para a compreensão e, portanto, para o aprendizado da matemática. O que vemos em uma representação geométrica bidimensional só faz sentido se estivermos cientes dos gestos ou operações usados para obtê-la. O que vemos em uma representação geométrica bidimensional **só faz sentido se estivermos cientes dos gestos ou operações que permitem sua obtenção**. Por exemplo, o uso de um papel vegetal facilita o deslocamento de nosso olhar na terceira configuração da Figura 9 (*Figura 10*), para inverter as oposições frente/verso e levantado/rebaixado das 24 unidades figurais 2D que contém.

Para evitar qualquer confusão no uso da notação 3D para duas coisas diferentes, a terceira dimensão em representações bidimensionais planas é denominada **2D/3D**, enquanto os gestos e as operações no espaço físico são denominados **3D/3D**. Além disso, podemos reconhecer a forma de todos os objetos físicos 3D/3D, por exemplo, modelos de cubos, esferas e pirâmides **com nossas mãos, sem vê-los, apenas tocando-os**.

3. Bi.3 Qual é a relação entre as representações semióticas bidimensionais e os objetos físicos representados?

O poder do registro da organização bidimensional das unidades figurais 1D, 2D e 3D é que, como o registro das línguas faladas, ele pode criar representações semióticas **independentemente da realidade ou de qualquer verossimilhança**, Figura 10 (*Figura 14 - Seção II* em Duval (2023a, 2023b)).

Objetos fisicamente impossíveis, como o triângulo de Penrose ou as escadas de Escher, são os exemplos mais famosos. As representações de objetos fisicamente impossíveis também são independentes de qualquer consideração de tamanho, ao contrário das ilusões perceptivas, como a ilusão de Müller-Lyer do tamanho percebido de um segmento ou a ilusão de Delboeuf de dois círculos concêntricos. Longe de serem objeções à confiabilidade das figuras geométricas, a visualização de objetos fisicamente impossíveis revela a contribuição heurística de explorar e modelar o registro da organização bidimensional de unidades figurais. A questão da relação entre as representações semióticas bidimensionais e os objetos físicos representados é a semelhança ou não semelhança.

Figura 10 Os quatro tipos de registros que produzem representações gráficas⁴.

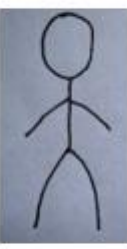
Registros multifuncionais: o tratamento é NÃO ALGORITMIZÁVEL Registros monofuncional: o processamento é ALGORITMIZÁVEL	Registros DISCURSIVOS. Linearidade das expressões que são unidades de significado	Registros NÃO DISCURSIVOS: Compreensão de uma organização bidimensional de unidades figurais 1D, 2D ou 3D
	I. LINGUAS FALADAS: três operações hierarquicamente incluídas (nomeação de objetos, enunciação e raciocínio). Dois modos de produção: <i>a fala e a escrita</i> III. ESCRITA SIMBÓLICA (sistemas de numeração, escrita algébrica, linguagens formais). Operações de substituição ilimitadas. Modo de produção: <i>escrita</i>	II. Configuração geométrica: três operações independentes (construção instrumental, divisão e reconfiguração mereológica, desconstrução dimensional) ICÔNICO: desenho, esboço IV. GRAFICOS ESQUEMAS: Junções entre pontos, marcadas por setas GRÁFICOS CARTESIANOS: Três operações (zoom, interpolação e mudança de eixo)

Fonte: Figura 14 em Duval (2023a, 2023b)

3. Bi.3.1 Graus de iconicidade

As representações de objetos reais (3D/3D) mudam completamente dependendo de onde você olha para eles e os pinta, desenha ou fotografa: de frente, de perfil, em um ângulo, de cima, de baixo... Isso permite definir um critério de semelhança entre a figura (2D) e o objeto real (3D/3D) representado, observando separadamente o contorno fechado da figura e as características significativas dentro do contorno fechado.

Figura 11 Graus de iconicidade no reconhecimento visual de faces.

		
A. Representação figural: Retrato de Ginevra de Benci (1474?)	B. Representação esquemática: Rosto de perfil e rosto de frente (1936 em preto, 1946 em cores)	C. Representação simbólica

Fonte: Figura 21 em Duval (2023a, 2023b)

Podemos então distinguir três graus de semelhança ou iconicidade, dependendo se o contorno é fechado ou suas características internas mantêm ou não essa semelhança, Figura 11 (Figura 21 - Seção III.2 O critério de semelhança e a determinação dos graus de iconicidade em Duval (2023a,

⁴ Fig. 4.6 em Duval (2017, p. 85).

2023b)): representação figural, representação esquemática e representação simbólica, que também podem ser chamadas de representação figural, representação semifigural e representação esquemática.

3. Bi.3.2 Os três processos cognitivos subjacentes a todas as representações bidimensionais semióticas ou não semióticas

A **relação causal** entre objetos físicos 3D/3D e suas múltiplas representações 2D possíveis é o ponto crucial na análise de tudo o que vemos e reconhecemos quase instantaneamente. E aqui precisamos **distinguir três processos cognitivos, e não apenas dois** (Figura 6 (*Figura 12 - Seção I.5 Decomposição e criatividade das representações semióticas em comparação com as representações não semióticas* em Duval (2023a, 2023b))). Há, é claro, a diferença radical entre a foto: Figura 5 (*Figura 2 - Análise das passagens entre a foto e a realidade fotografada* em Duval (2023a, 2023b))) e o poder heurístico de criar representações bidimensionais que são independentes da realidade (Figura 6 (*Figura 12*)), o primeiro e o terceiro processos). E há também a transparência multissensorial de nosso corpo para tudo o que está próximo ou distante, por meio da qual estamos constantemente presentes para o que está próximo ou distante: (Figura 6 (*Figura 12, o segundo processo* em Duval (2023a, 2023b))).

O primeiro obstáculo à compreensão da geometria é que esses três processos de funcionamento cognitivo não são diferenciados no ensino da geometria para alunos de 6 a 16 anos. Os currículos são organizados como se ver e manipular fossem suficientes para adquirir conhecimento e, em seguida, ser capaz de reconhecer quando e como usá-lo.

4. Como se faz a correspondência entre as unidades discursivas de sentido de um enunciado e as unidades figurais designadas em um enunciado?

O desafio didático dessa pergunta diz respeito à oposição cognitiva fundamental entre o que as figuras geométricas visualizam e o vocabulário referente às propriedades e aos objetos geométricos. É necessário **DIZER PARA VER o que é matematicamente pertinente** em uma definição, teorema ou em um enunciado de problema? Ou **A GENTE PODE ENTENDER** uma definição ou um enunciado de problema **SE NÃO VER** a que ele se refere em termos de unidades figurais 1D, 2D ou 3D?

Três comparações entre as representações produzidas pelos dois registros multifuncionais e não algoritmizáveis (Figura 12 (*Figura 17 - Seção II* em Duval (2023a, 2023b))) fornecem algumas respostas a essas duas perguntas).

4.1 Classificação do vocabulário de acordo com o número de dimensões das unidades figurais

Todos os termos do vocabulário geométrico básico são caracterizados pelo número de dimensões das unidades figurais que eles nomeiam: Figura 12 (*Figura 17 - Seção II.2* em Duval 2023a, 2023b)).

Figura 12 Classificação do vocabulário geométrico básico.⁵

VISUALIZAÇÃO	OBJETOS FIGURAIS	PROPRIEDADES	
		relação entre DUAS unidades figurais 1D	
		pertencentes a uma unidade figurar 2D	independente de pertencer a uma unidade 2D
Unidades figurais 2D instantaneamente reconhecíveis (figuras típicas) ↓	Quadrado, triângulo, paralelogramo, círculo, ângulo ↑	Regular, convexo, côncavo, n lados, isósceles, equilátero, retângulo, agudo, obtuso, reto	Simetria axial Simetria central
Unidades figurais 1D mescladas perceptualmente em unidades 2D ↓	Reta, segmento, lado, diagonal, raio, corda, curva, arco ↓		Secante, paralela, Perpendicular, tangente
Unidades figurais 0D identificável, ou somente codificável em uma unidade 1D	Pontos notáveis: interseção, vértice, centro. Pontos implícitos que não podem ser vistos		Simetria

Fonte: Figura 17 em Duval (2023a, 2023b).

Elas são classificadas de acordo com as unidades figurais 2D/2D, 1D/2D e 0D/2D, que formam a margem vertical da tabela. As propriedades, que são sempre termos de relacionamento entre duas unidades figurais, dividem-se em dois tipos:

- Aquelas que caracterizam uma unidade figurar 2D, na qual se opõem a outras propriedades do mesmo tipo;
- Aquelas que são independentes de qualquer unidade figurais 2D, embora possam caracterizá-las.

As setas na margem vertical indicam unidades figurais que se fundem visualmente em uma unidade figurar de um número maior de dimensões. As setas entre duas caixas na parte interna da

⁵ Duval (2015, p. 164).

tabela indicam sentenças que podem ser formuladas pegando-se um termo de cada uma das duas caixas e ligando-as a um verbo (“ser”, “pertencer”).

4.2 a Desconstrução dimensional de unidades figurais reconhecidas

A desconstrução dimensional de formas 2D/2D ou 3D/2D é um processo cognitivo subjacente à percepção visual que é o oposto do indicado pelas setas descendentes na coluna da direita da Figura 13 (Figura 13). Portanto, vai contra a visualização matemática, que é indicada pelas setas ascendentes na coluna da esquerda. A descontração dimensional envolve a divisão das figuras 3D/2D em três faces 2D/2D visíveis... e, em seguida, a divisão das unidades figurativas 2D/2D nas linhas retas subjacentes a cada lado do polígono e das unidades figurais 1D/2D nos pontos de interseção, que são os vértices dos polígonos. Isso nos leva a classificar os termos geométricos e os diferentes contextos nos quais eles podem ser usados ((Figura 12 (Figura 17)) de acordo com os dois movimentos opostos das setas na Figura 13 (Figura 13).

A necessidade de desconstrução dimensional de formas 2D/2D ou 3D/2D surgiu para combinar os termos do vocabulário geométrico de declarações matemáticas com as unidades figurais das visualizações associadas às declarações.

4.3 A mudança dimensional no mapeamento de unidades discursivas de sentido e das unidades figurais designadas

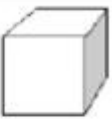
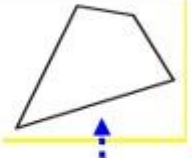
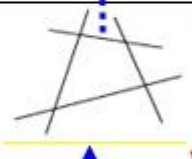
Para entender como trabalhamos e pensamos em geometria, e para sermos capazes de fazer parte disso nós mesmos, é necessário que uma sinergia entre os dois **registros multifuncionais e não algoritmizáveis** tenha começado a se desenvolver, Figura 13 (Figura 13 - Seção 1.6 em Duval (2023a, 2023b)).

Na Figura 13, essa sinergia é indicada pelas setas vermelhas oblíquas entre as setas azuis ascendentes na coluna da esquerda e as setas azuis descendentes na coluna da direita.

As setas azuis apontando para cima refletem o fato de que, para “ver em geometria”, é necessário subir uma dimensão. Portanto, você pode facilmente ir de 0D/2D para 1D/2D, mas não de 2D/2D para 3D/2D. E passar de 2D/2D para 3D/2D não significa que você possa ver todas as mudanças de plano ou face dos objetos físicos 3D/3D. Por outro lado, o trabalho com modelos 3D/3D desenvolve a maneira como as visualizações 3D/2D são vistas e usadas.

As setas azuis descendentes refletem o fato de que, para dizer o que é matematicamente relevante em uma configuração nD /2D, é preciso descer pelo menos uma dimensão. O vocabulário das propriedades correspondentes às unidades figurais 1D e 0D é o que é primordial em todos os enunciados de definições e teoremas.

Figura 13: Desconstrução dimensional das formas percebidas.

Número de dimensões	Visualização	USO MATEMÁTICO DA LINGUAGEM E DO VOCABULÁRIO GEOMÉTRICO
3D		Um poliedro
2D		Um polígono: - a face de um poliedro; - ou a figura obtida por um plano de interseção com um poliedro.
1D		Retas que são: - perpendiculares, paralelas ou que se cruzam; - ou suporte de segmentos.
0D		Pontos de interseção que são: - as extremidades de um segmento; - o ponto médio de um segmento; - os vértices de um polígono.

Fonte: Figura 13 em Duval (2023a, 2023b).

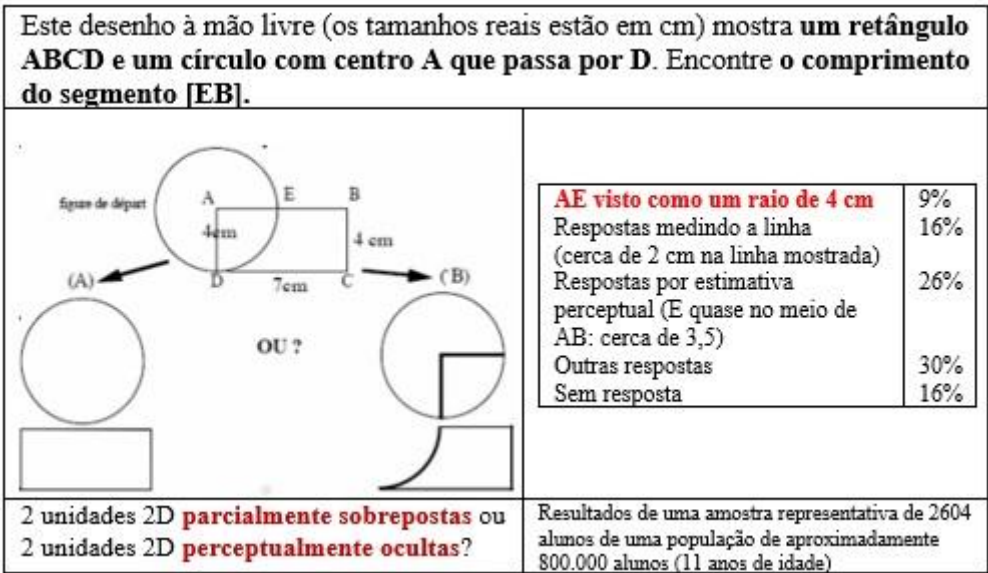
É extremamente lamentável para os alunos, professores e pedagogos que a investigação psicológica e didática sobre a percepção do espaço, a compreensão dos textos e as diferentes formas de raciocínio não tenha considerado todos estes fatores. E, no entanto, é necessário tê-los em conta do ponto de vista matemático, psicológico e epistemológico. Como deve então ser ensinada a geometria no ensino fundamental?

4.4 A armadilha didática da utilização de letras para designar os pontos de intersecção

Existem vários termos ou sintagmas nominais possíveis para designar pontos (0D). A escolha depende da unidade figurativa 1D ou 2D a que pertencem: vértice, centro, ponto médio, ponto de passagem etc. Inversamente, não existe uma unidade figurativa precisa para um ponto qualquer, não importe onde, em qualquer parte do plano em uma unidade 1D ou 2D. É preciso utilizar uma letra para o nomear e mostrar como unidade figurativa 2D e, por conseguinte, para o poder designá-la numa afirmação ou explicação. Eu próprio trapaceie neste texto, como todo mundo, ao utilizar letras na comparação de duas figuras: Figura 2 (Figura 3 - C1) e Figura 9 (Figura 10), mas não a Figura 8 (Figura 11). A armadilha começa a fechar-se assim que se começa a usar letras com palavras, porque

rapidamente se está fazendo uso apenas de letras para escrever, e as palavras rapidamente são só ditas oralmente. E para os que ouvem ou leem, as palavras encontram-se em grande quantidade nos livros didáticos, nas fichas de trabalho e no que é institucionalizado no final das sequências didáticas. Esta designação “cega”, para utilizar a descrição dos signos de Leibniz, tem uma razão mais profunda. Resulta da subordinação da geometria às unidades figurativas **1D/3D**, **2D/3D** e **3D/3D**, ou seja, à **necessidade de fixar pontos para medir ou calcular** distâncias ou comprimentos, ângulos, áreas e volumes. As consequências deste ensino são espetaculares e muitas vezes irreversíveis para a aprendizagem matemática posterior. Vemos muitos alunos tentarem medir unidades **1D/2D** no papel para calcular perímetros e áreas, ou simplesmente desistir (Figura 14 (Figura 4), Figura 15 (Figura 6) e Figura 7 (Figura 9). Quanto às avaliações nacionais, por pudor ou censura, não falemos delas!

Figura 14 Questionários de avaliação para a Configuração C2.



Fonte: Figura 4 em Duval (2023a, 2023b).

Figura 15 Resultados para o mesmo problema em três níveis escolares.

	6 ^{ème} 11-12 anos	5 ^{ème} 12-13 anos	4 ^{ème} 13-14 anos
Uma diagonal divide um retângulo em dois triângulos congruentes	5%	0	6%
Medida dos lados e depois bloqueio	10%	30%	45%
Invariância por meio de compensação (Piaget)	10%	10%	2%
Medida dos lados e depois o cálculo (2,5) × (5cm); (2,3) × (5,5cm)	10%	14%	10%

Fonte: Figura 6 em Duval (2023a, 2023b).

Será necessário repetir aqui o que é absolutamente necessário começar por separar:

- as atividades centradas nos modos de ver as formas geométricas;
- as atividades que implicam cálculos e, portanto, a utilização de fórmulas;
- e as tarefas centradas na tomada de consciência das operações discursivas necessárias à formulação de enunciados.

5. Fazer estas experiências por si próprio, descobrir coisas que não sabia antes e tornar-se intelectualmente independente em matemática

Começar por olhar com atenção para a fotografia dos 600 guarda-chuvas justapostas e **tentar responder às duas questões iniciais** Q. 1 e Q. 2 (O que reconheces à primeira vista? Quais são os opostos que permitem distinguir formas ou superfícies significativamente diferentes?) antes de continuar.

Em seguida, como num verdadeiro manual de emprego ou montagem, é preciso olhar atentamente para todas as comparações de figuras que são sucessivamente apresentadas, e tentar ver e dizer por si mesmo as diferenças que descobre.

Há certas seções do texto que não são utilizadas nestas instruções; elas concernem o registro das línguas faladas (seção II.1), da escrita simbólica e do registro das línguas faladas (seção II.2).

Finalmente, voltemos ao título “O prazer de ver, compreender, dizer e inventar... em matemática, claro!” Tudo isso ao mesmo tempo, se pode pensar. Mas o movimento constante entre estas quatro abordagens semiocognitivas é a forma de trabalhar em geometria.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

MORETTI, Méricles T.; SABEL, Eduardo (Orgs.). Florilégio de pesquisas que envolvem a teoria semiocognitiva de aprendizagem matemática de Raymond Duval (parte 2). Florianópolis: GPEEM/UFSC, 2023a. Disponível em <https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/203982>

DUVAL, R. Le plaisir de voir, de comprendre, de dire et d’inventer...en mathématiques, bien sûr ! REVEMAT, 2023b. Disponível em <https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/issue/view/3547>

DUVAL, R. Figures et visualisation géométrique : «voir» en géométrie. Dans Lima, J. (Eds) *Du mot au concept. Figure*, 147-182. Grenoble: Presses Universitaires, 2015.

DUVAL, R. (2018). Pour l’éducation du regard en géométrie élémentaire et en peinture (Traduction Bruno d’Amore). *La matematica e la sua didattica trad Bruno d’Amore*, 26 (2), 211-245. <https://rsddm.dm.unibo.it/wp-content/uploads/2018/10/Duval-Per-leducazione-allo-sguardo-in-geometria-elementare-e-in-pittura-MD-2018-26-2-3.pdf>

DUVAL R., *Sémiosis et Pensée humaine : registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*. Chap. II, Fig. 1 Fonctions et opérations discursives d'une langue, Fig. 1, p. 90-91. La fonction apophantique d'expression d'énoncés complets, p.110-112, 1995.

LEMONIDIS, E. C. (1990). Conception, réalisation et résultats d'une expérience d'enseignement de l'homothétie. Thèse ULP, Strasbourg, 1990.