Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UM ENSAIO SOBRE A ARTICULAÇÃO ENTRE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS, REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E DIALÉTICA FERRAMENTA-OBJETO

An Essay On The Articulation Between Problem Solving, Semiotic Representation Registers, And The Tool-Object Dialectic

Franco Deyvis Lima de SENA
Universidade Federal do Pará, Belém, Brasil
sena.fdls@gmail.com
https://orcid.org/0000-0002-0849-379X

Emily da Costa MADEIRA
Universidade do Estado do Pará, Belém, Brasil
emilycosta33@gmail.com
https://orcid.org/0009-0009-1936-2929

Acylena Coelho COSTA
Universidade do Estado do Pará, Belém, Brasil
acylena@uepa.br
https://orcid.org/0009-0001-2364-2992

José Messildo Viana NUNES
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo Brasil
messildo@ufpa.br
https://orcid.org/0000-0001-9492-4914

Saddo Ag. ALMOULOUD
Universidade Federal do Pará, Belém, Brasil
messildo@ufpa.br.
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054.

RESUMO

A partir de observações prévias, pode-se inferir que o progresso da humanidade está diretamente relacionado à capacidade de resolver problemas e de compreender o mundo ao seu redor. Nesse contexto, diversas pesquisas têm se dedicado ao estudo de situações-problema e de suas características. Entre essas investigações, destaca-se o enfoque na Resolução de Problemas e nas possibilidades de convergência com outras perspectivas que abordam os processos de ensino e aprendizagem da Matemática. Diante desse cenário, este trabalho busca esboçar os aspectos que envolvem a Resolução de Problemas articulada à Teoria dos Registros de Representação Semiótica e à Dialética Ferramenta-Objeto. Assim, formula-se o seguinte questionamento: em que aspectos o ensino de um objeto matemático pode ser analisado à luz da Resolução de Problemas, dos Registros de Representação Semiótica e da Dialética Ferramenta-Objeto? Para responder a essa indagação, realizou-se um ensaio teórico de caráter qualitativo, fundamentado em revisão bibliográfica, com o objetivo de explorar as possíveis correlações entre as perspectivas analisadas.

Palavras-chave: Resolução de Problemas, Registros Semióticos, Ferramenta-Objeto

ABSTRACT

Based on previous observations, it can be inferred that human progress is directly related to the ability to solve problems and understand the world around us. In this context, several studies have been dedicated to the study of problem situations and their characteristics. Among these investigations, the focus on Problem Solving and the possibilities of convergence with other perspectives that address the processes of teaching and learning Mathematics stands out. Given this scenario, this work seeks to outline the aspects that involve Problem Solving articulated with the Theory of Semiotic Representation Registers and the Tool-Object Dialectic. Thus, the following question is formulated: in what aspects can the teaching of a mathematical object be analyzed in light of Problem Solving, Semiotic Representation Records, and the Tool-Object Dialectic? To answer this question, a qualitative theoretical essay was conducted, based on a literature review, with the aim of exploring the possible correlations between the perspectives analyzed.

Keywords: Problem-Solving, Semiotic Registers, Tool-Object

1 INTRODUÇÃO

É possível notar que o avanço percorrido pela espécie humana recai sobre a necessidade de compreender o mundo ao seu redor e, para isso, o ato de perceber e a habilidade para resolver problemas são características fundamentais. A própria Matemática, enquanto ciência, tem como uma de suas bases a busca por respostas plausíveis para situações em que a solução não é trivial, ou que requer meios para sua formalização e generalização. Consequentemente, um dos principais objetivos do ensino de matemática é o fomento de habilidades para entender e resolver problemas que se originam do cotidiano dos sujeitos ou da própria matemática. Desse modo, evidencia-se que a Resolução de Problemas desenvolvida por Polya (1995, 2004) pode fornecer um método de ensino que visa o desenvolvimento do pensamento fundamentado, autônomo e crítico, frente às necessidades de interpretação e resolução de situações-problema.

Ao mesmo tempo, para serem capazes de resolver uma situação-problema, os sujeitos devem compreender os signos que compõem a linguagem específica usada pela Matemática. Nesse âmbito, Duval (2003, 2012) expressa que a aprendizagem nessa área de conhecimento está ligada à compreensão dos signos que podem ser observados e mobilizados pelos sujeitos, isto é, ao entendimento dos sistemas semióticos e dos registros que os compõem. Douady (1986, 1991) corrobora tal compreensão ao afirmar que os sujeitos aptos a transitar entre quadros, isto é, entre diferentes ambientes conceituais da Matemática, o que também pode ser entendido como mudanças entre representações de objetos de determinados campos matemáticos, podem apresentar compreensão aprofundada sobre o objeto matemático e maior habilidade ao se deparar com situações-problema.

Dessa forma, ao ponderar sobre os processos de ensino de Matemática e suas particularidades, conjectura-se que pode haver articulação entre as ideias de Polya (1995, 2004), Duval (2003, 2012) e Douady (1986, 1991). Destarte, delineou-se a seguinte questão de pesquisa: em que aspectos o ensino de um objeto matemático pode ser analisado mediante a Resolução de Problemas, os Registros de Representação Semiótica e a Dialética Ferramenta-Objeto?

Para responder a essa indagação, a partir da definição de Lakatos e Marconi (2003), adotou-se como fundamentação o método bibliográfico qualitativo, com a finalidade de desenvolver um ensaio teórico sobre as possíveis correlações entre as perspectivas analisadas e a proposição de uma situação-problema. Sobre o uso do ensaio como viés para a abordagem da questão, destaca-se que:

> O ensaio caracteriza-se pela sua natureza reflexiva e interpretativa, diferente da forma classificatória da ciência. [...] O ensaio é um meio de análise e elucubrações em relação ao objeto, independentemente de sua natureza ou característica. A forma ensaística é a forma como são incubados novos conhecimentos, até mesmo científicos ou pré-científicos. [...] O ensaio sempre fala de algo já formado ou, na melhor das hipóteses, de algo que já tenha uma vez estado aí; pertence, pois, à sua essência que ele não destaque coisas novas a partir de um vazio nada, mas se limite a ordenar, de um modo novo, coisas que em algum momento já foram vivas. (Meneghetti, 2011, p. 322).

Como forma de subsídio à pesquisa, foram analisados artigos, dissertações e teses que versassem sobre a temática no banco de periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e no Banco de Teses e Dissertações da CAPES. Entretanto, constatou-se que, apesar de a Resolução de Problemas, a Dialética Ferramenta-Objeto e os Registros de Representação Semiótica serem rotineiramente abordados isoladamente, não foram encontrados trabalhos sobre a possibilidade de articulação entre os três vieses. Portanto, para auxiliar a reflexão proposta, desenvolve-se na presente pesquisa um breve delineamento sobre o quadro teórico levantado e as possibilidades de articulação conjecturadas.

2 RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Antes de adentrar propriamente a Resolução de Problemas, faz-se necessário delinear que, de acordo com Krulik e Rudnik (1988), um problema é uma situação que confronta o que um indivíduo (ou grupo de indivíduos) julga saber e requer uma solução para a qual esses sujeitos não apresentam resposta aparente, ou seja, possuem o ferramental necessário, porém não mobilizam as relações que os levam a uma solução imediata. Ainda segundo os autores, distingue-se também que:

- Pergunta: pode ser resolvida pelo acesso à memória mobilizável instantaneamente e sem esforço adicional;
- Exercício: visa ao fortalecimento de habilidades já adquiridas para o desenvolvimento de resoluções cujas respostas sejam oriundas de aplicações algorítmicas de algo previamente aprendido;
- Problema: define-se pela necessidade de reflexão e de síntese de conhecimentos previamente aprendidos, porém que requer maior desenvolvimento ou articulação. Um problema não precisa estar estruturado em forma de pergunta, mas provoca o sujeito a buscar respostas para sua resolução.

Como discorrem Possamai e Silva (2020, p. 3), os problemas não são atividades de rotina que servem como aplicação de memorizações em finais de capítulos; pelo contrário, um problema matemático é o ponto de partida da aprendizagem do objeto de estudo.

Vale esclarecer que classificar uma questão enquanto problema, além dos fatores já levantados, também depende do público que a observa. O que pode ser considerado um problema para determinado grupo de pessoas pode ser visto como mero exercício para outro. Por exemplo, uma questão que envolve operações com números decimais pode ser vista como um problema para o público do 6º ano do Ensino Fundamental e como uma atividade de revisão (exercício) para estudantes do Ensino Médio. Do mesmo modo, as interferências do docente precisam ser reduzidas ou pensadas de forma pontual e assertiva, uma vez que o excesso de auxílio pode descaracterizar a situação enquanto problema.

Dadas essas compreensões, Polya (1955) destacou-se como um dos principais divulgadores da Resolução de Problemas como método de ensino. Como afirma Schneider (2022, p. 27), o livro "A Arte de Resolver Problemas", de Polya, "[...] é a grande base para o desenvolvimento deste trabalho e que terá aqui um capítulo inteiro. Este livro foi um divisor de águas no estudo da Resolução de Problemas e até hoje é a grande referência quando se trata dessa área". Assim, compreende-se que a proposição de situações-problema pode contribuir para o ensino de Matemática, uma vez que os discentes são instigados a pensar de forma crítica e autônoma. Nesse sentido, a Resolução de Problemas, conforme formulada pelo autor, perpassa as seguintes etapas:

- Compreensão do problema: busca-se entender o que o problema pede a partir da leitura dos dados e condições dispostas;

- Designar um plano de ação: visa, com base no que já se conhece, estabelecer relações e estratégias de ação para encontrar alternativas viáveis a serem executadas e que cumpram os requisitos necessários ao problema;
- Execução do plano: efetua-se o que fora planejado, com atenção à execução coerente e clara de cada passo;
- Retrospecção ou verificação do problema: busca-se analisar a solução obtida, revisar o que foi executado e avaliar o uso de fundamentações e argumentações que sustentem ou refutem a solução encontrada.

Ainda de acordo com Polya (1995), a Resolução de Problemas está atrelada às necessidades de representações advindas de contextos reais ou de contextualizações realísticas. Em outras palavras, os alunos devem ter conhecimentos prévios suficientes para a compreensão inicial e o estabelecimento de novas conexões que possibilitem a construção de um novo conhecimento. Pondera-se, assim, que é necessário identificar quais registros são mobilizados pelos alunos no decorrer da resolução de um problema, como apresentado na Teoria dos Registros de Representação Semiótica, proposta por Duval (2012).

3 TEORIA DOS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA

Percebe-se que um dos principais gatilhos para o desenvolvimento da Matemática, enquanto ciência, foi a necessidade de representar ou compreender situações reais. Como afirma Bunge (1974)

Para tal, assim como em outras linguagens, fez-se necessário o uso de signos, regras, definições e conceitos próprios dessa área. Isso significa que, embora possa ser utilizada para compreender o universo tangível, a Matemática é uma ciência própria que deriva de percepções e da mobilização de representações abstratas. Conforme destaca Bassanezi (1994, p. 56), a Matemática e as ciências são produtos da evolução mental, emocional e social da humanidade e, por isso, constituem fenômenos acumulativos que "dependem de validação, a qual é expressa por uma determinada linguagem". Além disso, o autor enfatiza que "a matemática passou a funcionar como um agente unificador de um mundo racionalizado, sendo um instrumento indispensável para a formulação de teorias que regem o conhecimento, devido à sua generalidade".

Desse modo, verifica-se que a necessidade de estudo das representações semióticas de um objeto tem origem na abstração inerente aos conceitos e objetos matemáticos, uma vez que estes se constituem como registros de representações não concretas. Esse entendimento corrobora a pesquisa desenvolvida por Raymond Duval (2003): a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS).

O autor afirma, em sua teoria, que, para existir a compreensão conceitual de um objeto (noesis), é imperativo que ocorra a apreensão ou a produção de uma representação semiótica (semiose). Desse modo, um registro se caracteriza como uma forma de representação de um objeto matemático, ou seja, é a externalização do conhecimento de um sujeito sobre determinado saber. Essas representações, como discorrido por Duval (2012), abordam dois aspectos principais: a "forma", compreendida como a expressão efetuada pelo sujeito; e o "conteúdo", relativo ao objeto matemático que será representado por meio dessa forma. Para o autor, forma e conteúdo estão presentes em toda comunicação que envolve a matemática, isto é, visualizam-se em toda representação do objeto matemático externalizada de maneira consciente.

Duval (2012, p. 269), contudo, alerta que "[...] as representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento". As representações mentais concebem a apreensão (conceitualização interna) dos conceitos relativos a determinado objeto, projeto ou situação, enquanto "as representações semióticas são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que tem inconvenientes próprios de significação e de funcionamento".

O autor explicita, ainda, que as representações mentais dependem da interiorização das representações semióticas, ou seja, da interiorização do que é externalizado e percebido: "as representações semióticas permitem representações radicalmente diferentes de um mesmo objeto, na medida em que elas podem atender sistemas semióticos totalmente diferentes" (Duval, 2012, p. 269).

Quanto aos "Sistemas Semióticos", entende-se que o autor os divide em "registros" e "códigos". Os códigos referem-se às funções cognitivas não conscientes, processos internos que o sujeito precisa decodificar para externalizar em outro sistema semiótico, o qual não permite representar ou determinar diretamente um conteúdo de conhecimento. Por sua vez, os registros permeiam funções cognitivas conscientes caracterizadas em: I) Externalização (comunicação das representações mentais do sujeito); II) Objetivação (aquilo que se pretende apresentar); e III) Tratamento (manipulação do registro).

Para que um Sistema Semiótico possa ser denominado como Registro de

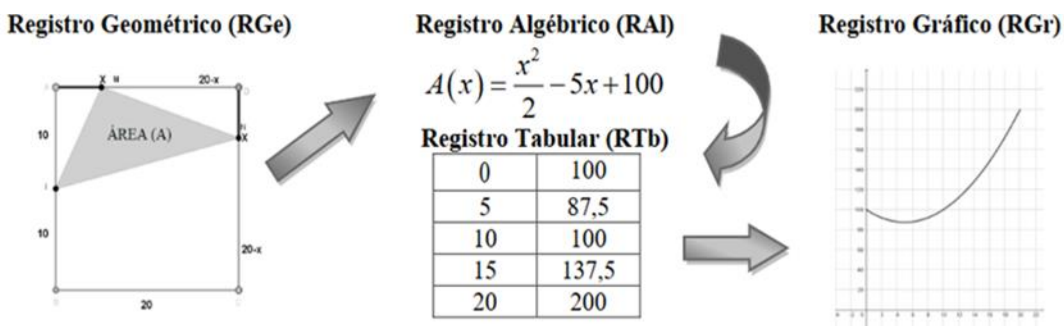
Representação, Duval (2012) assegura que este deve admitir três atividades cognitivas fundamentais ligadas à semiose:

- Formação: relativa à produção de um registro, como na “enunciação de uma frase (compreensível numa língua natural), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, expressão de uma fórmula etc.” (Ibidem, p. 271);
- Tratamento: “o tratamento de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada” (Ibidem, p. 271). Por exemplo, dado $(x+2)^2$, pode-se operacionalizar dentro dessa estrutura e obter $x^2 + 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2$; continuando nesse mesmo registro, ao organizá-lo e agrupá-lo, tem-se $x^2 + 4x + 4$;
- Conversão: atividade cognitiva distinta e independente do tratamento. Duval (2012, p. 12) relata que somente quando ocorre uma conversão entre registros é possível afirmar o funcionamento de uma representação específica, ou seja, “[...] a conversão é um instrumento para diferenciar as variações unicamente estruturais daquelas cognitivas propriamente ditas”.

Como salienta Leivas (2019, p. 267), para Duval, “[...] uma análise cognitiva de registros semióticos de uma atividade matemática é baseada na conversão entre dois registros, discursivos ou não, representantes de um mesmo objeto matemático”. Essa análise pode ser observada na Figura 1, em que se apresenta um exemplo de conversões de representações utilizadas no estudo de funções.

Figura 1

Exemplos de conversões de registros de representação



Fonte: Denardi & Bisognin (2020, p. 6).

Como perceptível, para Duval (2012), é na identificação de um campo de variações cognitivas que se compreende o funcionamento representacional de um registro. O autor ressalta que é por meio do estudo sistemático da passagem de um registro para outro que se reconhece a importância dessas variáveis, permitindo analisar a tarefa cognitiva envolvida sem confundi-la com a tarefa matemática propriamente dita. Entretanto, destaca que não se deve subjugar um registro a outro, isto é, nenhum registro pode ser considerado mais apropriado ou mais acessível, pois cada um apresenta problemas e funcionalidades específicas.

Portanto, verifica-se que o tratamento e, principalmente, a conversão de registros para a resolução de um problema possibilitam que o sujeito compreenda o objeto matemático estudado em diferentes quadros, como exposto por Douady (1986).

4 DIALÉTICA FERRAMENTA-OBJETO E JOGOS DE QUADROS

A Dialética Ferramenta-Objeto, proposta por Douady (1986, 1991), surge como um instrumento de auxílio à elaboração de atividades direcionadas ao ensino de matemática, em que os conhecimentos prévios dos alunos (ferramentas) são utilizados para desenvolver novos conhecimentos (objeto). Para tal, a autora explicita algumas etapas:

- Antigo: os conceitos matemáticos são utilizados como ferramentas explícitas para resolver parcialmente o problema;
- Pesquisa (novo implícito): os alunos não têm ferramental suficiente para resolver imediata e completamente o problema proposto, pois a intenção da dialética é que mobilizem outras ou novas ferramentas adequadas à situação;
- Explicitação e institucionalização local: momento em que as ferramentas utilizadas são sistematizadas para o estudo do objeto;
- Institucionalização: o docente seleciona e explicita os conhecimentos abordados na fase anterior, contextualizando-os e tornando-os próprios aos sujeitos;
- Familiarização: ocorre ao reutilizar os conhecimentos em uma nova situação, em que o educador instiga os alunos a se apropriarem do conhecimento institucionalizado como ferramenta explícita, transformando o novo objeto em conhecimento antigo;
- Complexificação: os discentes são levados a solucionar situações mais complexas, que poderão testar ou desenvolver conhecimentos.

A proposta da autora situa as mudanças de quadro como estratégias decisivas na resolução de problemas, ou seja, a mudança de contexto ou de quadro pode contribuir para a aprendizagem. Douady (1986, p. 12, tradução livre) define um quadro como um conjunto de ferramentas matemáticas que expressam relações entre objetos, porém, “dois quadros podem ter os mesmos objetos e ser diferentes por causa das imagens mentais e da problemática desenvolvida”. Um quadro pode conter um ou vários registros, como no quadro geométrico, no qual são apresentados registros da língua materna, figural e simbólico, enquanto a conversão de registros pode ser realizada dentro de um mesmo quadro. Assim, o professor precisa conhecer o objeto matemático que será ensinado aos alunos para delimitar quais registros permitirão mudanças de quadros e tornar evidente o aprendizado em relação às propriedades e conceitos matemáticos que possibilitam essa conversão.

Essa mudança de quadros não se restringe apenas à busca de diferentes soluções para um problema, mas refere-se, sobretudo, à possibilidade de reformulá-lo em outros quadros conceituais. De acordo com Douady (1986), essa reformulação permite novas aberturas diante das dificuldades encontradas, ampliando o campo de ação do sujeito ao possibilitar o uso de ferramentas, técnicas e procedimentos que não eram pertinentes, ou acessíveis, na formulação inicial. Desse modo, a mudança de quadros se torna um recurso para diversificar estratégias e favorecer uma compreensão mais profunda do objeto matemático.

Por sua vez, os jogos de quadros são mudanças de quadros que foram instigadas pelo educador ao selecionar problemas nos quais elas se fazem necessárias. Considera-se, então, que uma mudança de quadro caracteriza uma mudança de contexto, isto é, uma mudança de modelo teórico. Sob os parâmetros da TRRS, compreende-se essa mudança como um acontecimento semelhante a uma conversão de registros.

Nota-se que a classificação (nomenclatura) dos quadros presentes nas etapas de resolução de uma problemática apresenta caráter subjetivo e, usualmente, fica sob responsabilidade de quem pensa e elabora as atividades. Na perspectiva de Duval (1999, p. 8, tradução livre), a mudança de quadros é propiciada e predeterminada pelo professor, enquanto a mudança de registro “[...] é colocar em jogo o problema da aprendizagem e dar ao professor um meio que pode ajudá-lo a facilitar a compreensão da matemática”, constituindo-se, assim, em uma etapa delicada e decisiva na aprendizagem de matemática.

Sopesando o exposto, retoma-se a questão de pesquisa: em que aspectos o ensino de um objeto matemático pode ser analisado mediante a Resolução de Problemas, os Registros de Representação Semiótica e a Dialética Ferramenta-Objeto? Para responder a esse questionamento, expõem-se a seguir conjecturas de aspectos correlacionáveis.

5 PROPOSIÇÃO DE ARTICULAÇÕES

De forma sintética, compreende-se que os processos relacionados ao ensino de um objeto matemático são permeados por contextos matemáticos ou extramatemáticos (extraescolares). Em outras palavras, assume-se que o ato de ensinar Matemática necessita de contextualizações que podem surgir da própria Matemática — como na compreensão e aplicação de algoritmos e teoremas, ou de situações que fazem parte da vida dos sujeitos que a ensinam ou dos estudantes que buscam aprendê-la, como no uso de analogias ou de problemas cotidianos.

Em ambos os casos, nota-se que a motivação para aprender Matemática pode surgir a partir de uma situação desafiadora. Por isso, como exposto no presente artigo, considera-se que o uso da perspectiva da Resolução de Problemas pode favorecer os processos de aprendizagem. Todavia, para caracterizar-se como um problema, conforme assumido por Polya (1995), uma questão deve ser desestabilizadora; ou seja, o sujeito que a resolve deve sentir-se instigado a resolvê-la e não deve conseguir solucioná-la de forma imediata.

Para esclarecimento, de acordo com a Resolução de Problemas, uma questão-problema requer uma fundamentação realística e difere de exercícios ou perguntas superficiais. Uma pergunta superficial ou um exercício tende a induzir respostas imediatas, pois um exercício objetiva a aplicação repetida de algoritmos como forma de revisão de conteúdos já aprendidos, enquanto uma pergunta superficial pode ser respondida facilmente, sem necessidade de aprofundamento ou reflexão para a elaboração de uma resposta coerente.

Para o autor, uma questão-problema ou situação desestabilizadora não deve possuir solução imediatamente acessível; entretanto, necessita de reflexões oriundas das etapas de compreensão do problema, planejamento da ação, execução e retrospecção. Verifica-se, ainda, que a solução encontrada pode ser ideal e direcionada à aprendizagem do objeto, ou não ideal, mas que, ao ser analisada e revisada, também pode favorecer o processo de aprendizagem.

Ao mesmo tempo, percebe-se que, de acordo com Douady (1991), a Dialética Ferramenta-Objeto enfatiza a necessidade de mudança de quadros como fomento à aprendizagem de um objeto. Para a autora, esse processo perpassa pelas etapas de reconhecimento do conhecimento prévio (antigo), pesquisa, explicitações, institucionalização docente, familiarização do que foi aprendido e complexificação, em busca de novo aprendizado que faça uso do conhecimento adquirido anteriormente.

Nesse cenário, evidenciam-se possibilidades de correlação entre as percepções de Polya (1995) e Douady (1986) nos seguintes pontos:

- Compreensão e Antigo: na busca pelo entendimento da questão-problema, que requer a mobilização de conhecimentos prévios (antigos) para a leitura dos dados, do contexto e das condições necessárias para sua resolução;
- Plano e Pesquisa: na elaboração do plano de ação e no estabelecimento de relações e estratégias, em que os sujeitos são levados a mobilizar novas ferramentas (ou ressignificar as antigas), que ofereçam alternativas de ação para a resolução do problema;
- Execução e Explicitação: na execução do plano e na institucionalização local do que foi planejado e pesquisado, momento em que se coloca a ação em prática e se verifica se a solução encontrada é coerente.

Ainda sob esse panorama, percebe-se que Polya (1995) apresenta a etapa de Retrospecção como uma forma de verificação do que foi efetuado, realizada por meio de conversas entre alunos e com o docente sobre a resolução alcançada (que pode ou não ser a ideal). Contudo, observa-se que Douady (1986) amplia essa perspectiva ao apresentar a etapa de Institucionalização. Para a autora, é necessário que o docente retome o protagonismo e promova, juntamente com a turma, uma retrospecção coletiva que fundamente o que foi resolvido e torne o objeto de ensino claro a todos, favorecendo a aprendizagem do conceito estudado.

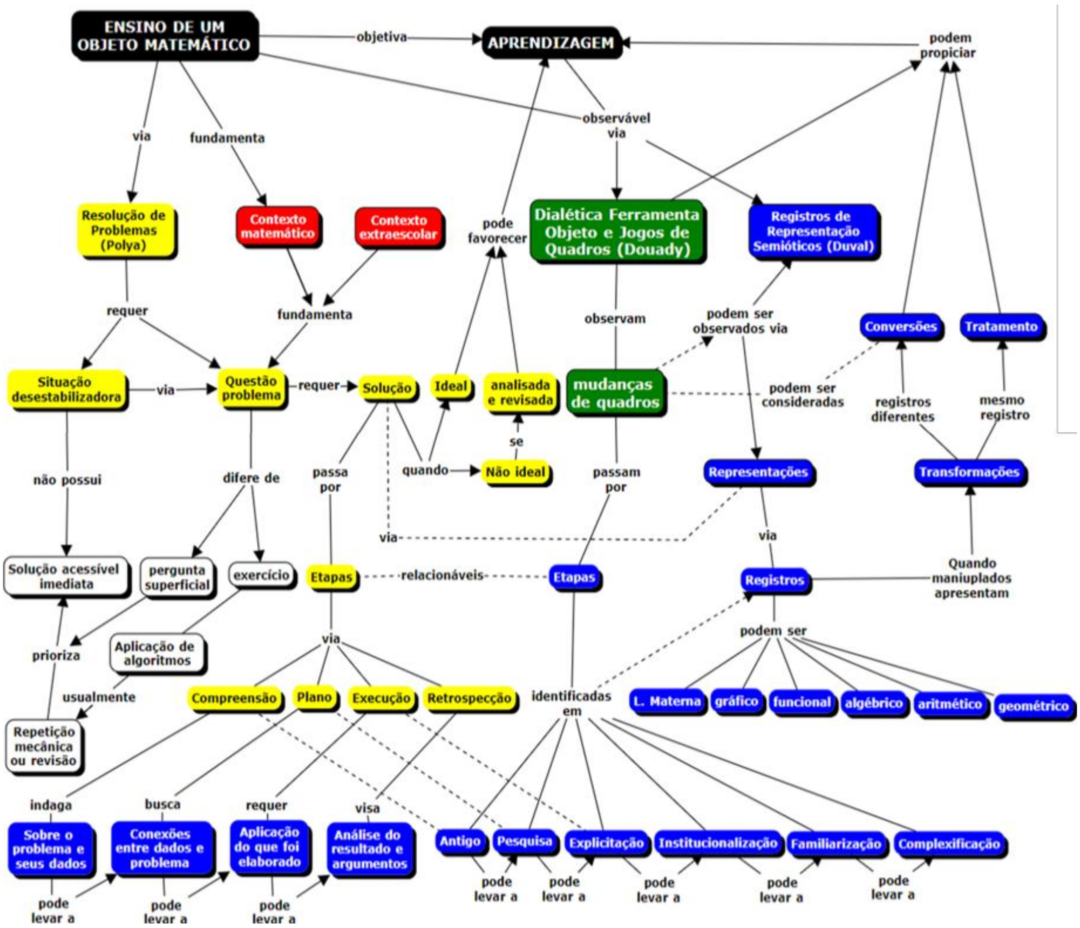
Por conseguinte, ainda na Dialética Ferramenta-Objeto, evidencia-se a possibilidade de que a aprendizagem desse novo conhecimento se torne algo mobilizável com frequência (familiarização), permitindo que essa nova ferramenta, que passa a constituir o "antigo", seja utilizada para compreender situações mais complexas (complexificação).

Vale destacar que as soluções e mobilizações apresentadas no decorrer da resolução de um problema são representadas por meio de registros fundamentados no objeto matemático. Esses registros podem ser identificados e classificados via a TRRS de Duval (2003) e, quando manipulados, passam por transformações (mobilizações) que podem ocorrer dentro de um mesmo registro (tratamento) ou entre diferentes registros (conversão). Para Duval, tratamentos e conversões são fatores determinantes para avaliar a aprendizagem dos sujeitos; assim, infere-se que aqueles capazes de tratar e, sobretudo, converter diferentes registros demonstram aprendizagem aprofundada sobre o objeto matemático estudado.

Especificamente quanto às conversões de registros, salienta-se também a articulação possível com os Jogos de Quadros de Douady (1986). Por exemplo, Duval (2012) ressalta que pode haver certo paralelismo entre as concepções de quadros e registros, e observa-se que as transformações e jogos de quadros oferecem fundamentação para a verificação e o desenvolvimento da aprendizagem no ensino de um objeto matemático.

Para fins de esclarecimento, as considerações expostas podem ser observadas a seguir em forma de Mapa Conceitual, que, conforme apresentado por Novak e Cañas (2010), constitui uma ferramenta gráfica útil para a organização e representação do conhecimento.

Figura 2
Mapa Conceitual sobre aspectos correlacionáveis



Fonte: elaborado para a pesquisa (2025).

Após a exposição da conjectura de correlação apresentada no mapa, entende-se ser plausível delinear a seguir, como a resolução de uma situação-problema pode ser analisada pelas perspectivas da Resolução de Problemas de Polya (1995, 2004), da Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003, 2012) e da Dialética Ferramenta-Objeto de Douady (1986, 1991).

6 PROPOSIÇÃO DE SITUAÇÃO PROBLEMA

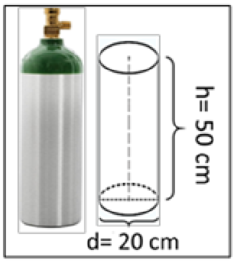
Considerando como público-alvo uma turma do 9º ano do Ensino Fundamental e fundamentando-se na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), objetiva-se, a partir da questão-problema proposta, desenvolver a habilidade EF09MA06, que consiste em "Compreender as funções como relações de dependência unívoca entre duas variáveis e suas representações numérica, algébrica e gráfica e utilizar esse conceito para analisar situações que envolvam relações funcionais entre duas variáveis" (BRASIL, 2018, p. 316).

Pretende-se que a questão-problema instigue os alunos a acessarem compreensões prévias relacionadas à aritmética, à álgebra e à geometria, possibilitando a construção de novos conhecimentos sobre gráficos e funções. Dessa forma, apresenta-se a seguinte questão formulada na Figura 3:

Figura 3

Questão problema proposta

Em um hospital existe um cilindro de oxigênio com dimensões de acordo com a figura ao lado. Sabe-se que a cada dez minutos de uso contínuo por um grupo de pacientes, 7,85 litros de oxigênio são utilizados. Se o cilindro estiver completamente cheio, de que forma é possível representar graficamente sua vazão (em litros) até que ele seja completamente esvaziado?



Fonte: elaborado para a pesquisa (2025).

Busca-se que o problema leve os alunos a perpassar pelas quatro etapas da Resolução de Problemas e a mobilizar conceitos prévios relacionados à geometria espacial (percepção e cálculo do volume de um cilindro), a operações algébricas e aritméticas (no decorrer da resolução) e à noção de geometria plana, de modo que possam construir conhecimento sobre a elaboração de gráficos e a representação de uma função (objeto matemático a ser ensinado).

Quanto ao contexto da questão, considera-se que, para a percepção da figura, de suas dimensões e das operações necessárias, trata-se de um contexto matemático; já sua ambientação é oriunda do cotidiano, ou seja, extraescolar.

Tendo em vista os conhecimentos prévios esperados no 9º ano do Ensino Fundamental, considera-se que a questão pode ser classificada como uma questão-problema, pois sua solução não está completamente evidente para o público-alvo. Assim, pequenas intervenções docentes são válidas para direcionar ou instigar os estudantes durante o processo de resolução.

Desse modo, espera-se que possam ser identificadas as seguintes etapas no decorrer da resolução da questão-problema enunciada:

I) Compreensão e Antigo: Espera-se que o aluno compreenda a problemática e identifique que, para solucioná-la, deverá utilizar diferentes técnicas (ou registros). Essa compreensão inicial só será possível caso mobilize registros da língua materna, geométricos, numéricos e algébricos, ou seja, conhecimentos prévios sobre geometria espacial e operações algébricas e/ou aritméticas (conhecimento antigo).

II) Plano e Pesquisa: Após compreender o enunciado, espera-se que os alunos reconheçam a necessidade de expressar a medida do volume do cilindro para posteriormente calcular a vazão ao longo do tempo e, em seguida, representar o resultado em registro geométrico-gráfico.

Ressalta-se que, por se tratar de uma abordagem inerente à perspectiva da Resolução de Problemas, os passos descritos são apenas uma entre várias possibilidades de caminho. Os sujeitos podem elaborar estratégias distintas para resolver o problema; entretanto, independentemente do percurso adotado, todos perpassam pela etapa de Plano e Pesquisa. Assim, considera-se que, para solucionar o problema, os alunos podem planejar suas ações e perceber a necessidade dos seguintes momentos:

1) Calcular o valor do raio como metade do diâmetro da base do cilindro;
2) Calcular a área da base da figura;
3) Calcular o volume do cilindro a partir dos resultados obtidos;

4) Perceber a necessidade de conversão para uma unidade de medida comum;

4.1) Compreender que a relação entre cm³ e litros é de 1/1000;

4.2) Transformar o volume do cilindro para a unidade utilizada na vazão (litros);

5) Compreender que o volume do cilindro e o volume de vazão estabelecem uma razão que indica a quantidade de unidades de vazão necessárias para esvaziar o cilindro;

5.1) Calcular essa razão;

6) Compreender a relação entre tempo e volume e perceber que o volume do cilindro pode ser reduzido gradativamente de acordo com a vazão;

7) Compreender a relação geométrica entre eixos e variáveis e, a partir de conhecimentos prévios sobre geometria plana, especificamente sobre o plano cartesiano, representar graficamente as variáveis envolvidas.

III) Execução e Explicitação: Com base no plano elaborado, espera-se que os alunos resolvam a questão e expressem suas soluções por meio de diferentes registros de representação semiótica, manipulando-os tanto dentro de um mesmo registro (tratamento) quanto entre registros diferentes (conversão), como nos exemplos de possíveis resoluções apresentadas a seguir.

Figura 4

Possível resoluções e registros

1) Raio do cilindro:

$diâmetro = 2\ vezes\ o\ raio$

$d = 2.r$

$40 = 2.r$

$r = 20\ cm$

2) Área da base do cilindro:

$Ab = \pi . r^2$

$Ab = 3{,}14 . 20^2$

$Ab = 1256\ cm^2$

3) Volume do cilindro:

$Volume\ do\ cilindro = Área\ da\ base\ vezes\ a\ altura$

$Vc = Ab . h$

$Vc = 1250 . 50$

$Vc = 62800\ cm^3$

4) Percepção de unidades de medida:

$Volume\ do\ cilindro\ calculado\ em\ cm^3$

$Volume\ da\ vazão\ pedido\ em\ litros$

4.1) Relação entre unidades de medida:

$1\ \mathrm{cm}^3 = 0{,}001\ \mathrm{litro}$

$1\ \mathrm{litro} = 1000\ \mathrm{cm}^3$

4.2) Transformação de unidades:

$\mathrm{Vc} = 62800\ \mathrm{cm}^3$

$\mathrm{Vc} = 62800/1000 = 62{,}80\ \mathrm{litros}$

5) Percepção de razão entre volumes:

(Volume do cilindro)/(Volume vazão) = nº de vazões

6) Volume do cilindro em função do tempo:

Exemplo 1			Exemplo 2		
Tempo	**Vazões**	**Volume restante**	**Tempo**	**Vazões**	**Volume restante**
0 min	0	$62{,}80 - 0. = 62{,}80\ L$	0 min	0	$62{,}80 - 0 . 7{,}85 = 62{,}80\ L$
10 min	1	$62{,}80 - 7{,}85 = 54{,}95\ L$	10 min	1	$62{,}80 - 1 . 7{,}85 = 54{,}95\ L$
20 min	2	$54{,}95 - 7{,}85 = 47{,}10\ L$	20 min	2	$62{,}80 - 2 . 7{,}85 = 47{,}10\ L$
30 min	3	$47{,}10 - 7{,}85 = 39{,}25\ L$	30 min	3	$62{,}80 - 3 . 7{,}85 = 39{,}25\ L$
40 min	4	$39{,}25 - 7{,}85 = 31{,}40\ L$	40 min	4	$62{,}80 - 4 . 7{,}85 = 31{,}40\ L$
50 min	5	$31{,}40 - 7{,}85 = 23{,}55\ L$	50 min	5	$62{,}80 - 5 . 7{,}85 = 23{,}55\ L$
60 min	6	$23{,}55 - 7{,}85 = 15{,}70\ L$	60 min	6	$62{,}80 - 6 . 7{,}85 = 15{,}70\ L$
70 min	7	$15{,}70 - 7{,}85 = 7{,}85\ L$	70 min	7	$62{,}80 - 7 . 7{,}85 = 7{,}85\ L$
80 min	8	$7{,}85 - 7{,}85 = 0\ L$	80 min	8	$62{,}80 - 8 . 7{,}85 = 0\ L$

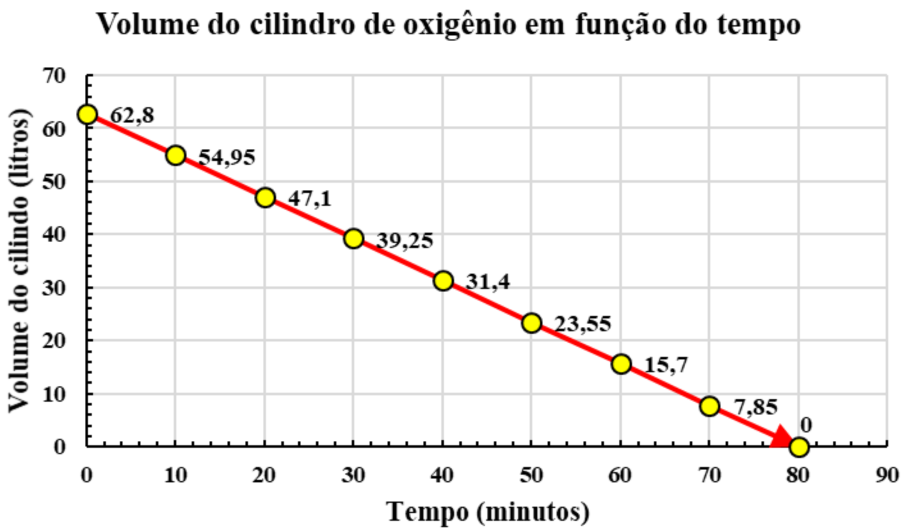
Fonte: elaborado para a pesquisa (2025).

7) Compreender a relação geométrica e representar a função em gráfico:

Para o registro gráfico, espera-se que os alunos também acionem conhecimentos prévios relativos ao plano cartesiano. Caso necessário, o docente pode oferecer dicas ou lembretes sobre a função dos eixos e sobre as relações entre os pontos representados, como ilustrado na Figura 5.

Figura 5

Possível registro gráfico



Fonte: elaborado para a pesquisa (2025).

IV) Retrospecção ou verificação do problema: a partir do que foi obtido na execução, os alunos devem verificar e externalizar se, até o momento, as respostas apresentadas permitem a continuidade do planejamento inicial. Conforme previsto na Resolução de Problemas, uma solução não ideal, quando analisada e refletida, ainda pode levar à aprendizagem do objeto, pois a mobilização de registros por meio de tratamentos e conversões (ou jogos de quadros) pode favorecer a compreensão do conceito estudado.

Destaca-se que, para chegar até o presente ponto de elaboração do registro gráfico, os alunos deveriam: observar o registro geométrico; relacionar o registro geométrico com o registro algébrico (conversão); relacionar registros algébricos e aritméticos (conversão); manipular registros aritméticos (tratamento); compreender o registro gráfico; relacionar registros gráficos e algébricos ou aritméticos (conversão); e esboçar o registro gráfico (tratamento).

V) Institucionalização: como passo seguinte, e considerando que o objetivo de ensino do conceito inicial de função pode não ter sido plenamente atingido, recomenda-se que o professor institucionalize o que foi produzido até o momento. Dessa maneira, o docente pode revisar as resoluções dos alunos, identificar possíveis deslizes e explicitar os conceitos matemáticos envolvidos nas operações realizadas. Ao mesmo tempo, pode utilizar a mobilização efetuada pelos alunos para representar o registro funcional, tornando o conceito mais evidente.

Após a institucionalização, emergem as etapas de: VI) Familiarização dos conhecimentos e VII) Complexificação, relacionadas à consolidação do registro funcional e à construção de um conhecimento mais complexo que o anterior. Essas relações podem ser observadas na figura a seguir.

Figura 6

Registro funcional institucionalizado

Tempo (min)	$f(tempo) = V_{cilindro} - \left(\frac{tempo}{10} . V_{vazão}\right)$	Coordenadas $(x;\ y)$
0 min	$f(0) = 62{,}80 - (0/10\ .7{,}85) = 62{,}80$	$(0\ ;\ 62{,}80)$
10 min	$f(10) = 62{,}80 - (10/10\ .7{,}85) = 54{,}95$	$(10\ ;\ 54{,}95)$
20 min	$f(20) = 62{,}80 - (20/10\ .7{,}85) = 47{,}10$	$(20\ ;\ 47{,}10)$
30 min	$f(30) = 62{,}80 - (30/10\ .7{,}85) = 39{,}25$	$(30\ ;\ 39{,}25)$
40 min	$f(40) = 62{,}80 - (40/10\ .7{,}85) = 31{,}40$	$(40\ ;\ 31{,}40)$
50 min	$f(50) = 62{,}80 - (50/10\ .7{,}85) = 23{,}55$	$(50\ ;\ 23{,}55)$
60 min	$f(60) = 62{,}80 - (60/10\ .7{,}85) = 15{,}70$	$(60\ ;\ 15{,}70)$
70 min	$f(70) = 62{,}80 - (70/10\ .7{,}85) = 7{,}85$	$(70\ ;\ 7{,}85)$
80 min	$f(80) = 62{,}80 - (80/10\ .7{,}85) = 0$	$(80\ ;\ 0)$

Fonte: elaborado para a pesquisa (2025).

Avalia-se que a situação-problema aqui apresentada, assim como outras, quando elaboradas para produzir manipulações de registros, conversões e mudanças de quadros, pode levar à aprendizagem dos estudantes que as tentam resolver. Considera-se também que a vertente aqui esboçada corrobora a possibilidade de reflexão articulatória para a busca de elementos convergentes ao processo de ensino de um objeto matemático.

Ademais, pondera-se que diversas abordagens visam avaliar e aprimorar os processos de ensino e aprendizagem de Matemática e, dentre elas, destaca-se a Resolução de Problemas como um viés metodológico que demonstra capacidade de potencializar a aprendizagem dos estudantes a partir de cenários que exigem reflexão aprofundada e mobilização de representações que evidenciam o desenvolvimento de novos conhecimentos. Dessa forma, pretende-se futuramente construir uma proposição de sequência de atividades que, ao ser posta em prática, possa corroborar (ou não) a análise aqui efetuada superficialmente. Constata-se, desse modo, que existe relevância e necessidade de aprofundamento quanto à perspectiva de interlocução teórica almejada.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

A partir da análise das ideias de Polya, Duval e Douady, observa-se que o ensino de Matemática deve considerar o conhecimento prévio dos alunos e as diferentes formas de representação semiótica, sendo que a mobilização e a conversão desses registros são fundamentais para o aprofundamento da compreensão dos conceitos matemáticos.

Além disso, destaca-se a relevância da perspectiva dialética entre ferramenta e objeto, que reforça a importância de se promover um ambiente de aprendizagem que permita ao aluno não apenas aprender o conteúdo matemático, mas também compreender o processo de construção desse conhecimento, refletindo e adaptando suas estratégias conforme a complexificação do problema.

A proposta de uma situação-problema no contexto de uma turma do 9º Ano do Ensino Fundamental, como apresentada, é um exemplo prático de como os conceitos abordados podem ser aplicados para estimular a reflexão dos alunos e o desenvolvimento de habilidades matemáticas, como a compreensão de funções, geometria espacial e análise de gráficos. Nesse sentido, a combinação entre os saberes prévios dos estudantes e as novas aprendizagens, mediada pela Resolução de Problemas, propicia um ambiente desafiador, mas ao mesmo tempo acessível, para o crescimento cognitivo.

Por fim, a análise das diferentes etapas da Resolução de Problemas e o uso de registros semióticos e conversões, quando aplicados corretamente, apresentam potencial para aprimorar os processos de ensino e aprendizagem, levando os alunos a uma compreensão profunda e flexível dos conceitos matemáticos. A proposta aqui apresentada, ao enfatizar a importância de uma abordagem metodológica que envolva reflexão e adaptação, indica a necessidade de novas pesquisas e práticas que aprofundem ainda mais os processos de ensino da Matemática, buscando sempre estratégias que estimulem o raciocínio crítico e a compreensão real das relações funcionais e geométricas.

REFERÊNCIAS

Bassanezi, R. (1994). Modelagem Matemática. Dynamis, Blumenau, v. 2, n. 7, p. 55-83, abril/jun. 1994.

Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. http://basenacionalcomum.mec.gov.br/.

Denardi, V. B., & Bisognin, E. (2020). Resolução de problemas e representações semióticas na formação inicial de professores de matemática. *Revista de Educação Matemática*, 17, e020022. Recuperado de http://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/197.

Douady, R. (1987). Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5–32. Recuperado de https://cir.nii.ac.jp/crid/1570572700049163392.

Douady, R. (1991). Tool, object, setting, window: elements for analysing and constructing didactical situations in mathematics. In Mathematical knowledge: Its growth through teaching (pp. 107-130). Dordrecht: Springer Netherlands. Recuperado de https://link.springer.com/chapter/10.1007/978-94-017-2195-0_6.

Duval, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In *Aprendizagem em matemática: Registros de representação semiótica* (pp. 11–33). Papirus.

Duval, R. (2012). Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução: Méricles Thadeu Moretti. *REVEMAT*, 7(2), 266–297. https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/27282.

Krulik, S., & Rudnick, J. A. (1988). Problem Solving: A Handbook for Elementary School Teachers. Allyn & Bacon/Logwood Division, 160 Gould Street, Needham Heights, MA 02194-2310.

Leivas, J. C. P. (2019). Geometria euclidiana e do táxi: Um problema concreto e os registros de representações semióticas. *Revista de Educação Matemática*, 16(22), 252–269. Recuperado de http://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/221.

Lakatos, E. M., & Marconi, M. A. (2003). *Fundamentos de metodologia científica*. 5. ed. São Paulo: Atlas, 2003. 311 p. ISBN: 8522433976.

Meneghetti, F. K. (2011). O que é um ensaio teórico? *Revista de Administração Contemporânea*, 15(2), 320–332. Recuperado de https://www.scielo.br/j/rac/a/4mNCY5D6rmRDPWXtrQQMyGN/.

Novak, J. D., & Cañas, A. J. (2010). A teoria subjacente aos mapas conceituais e como elaborá-los e usá-los. *Práxis Educativa*, 5(1), 9–29. Recuperado de http://educa.fcc.org.br/scielo.php?pid=S1809-43092010000100002&script=sci_abstract&tlng=en.

Polya, G. (1995). *A arte de resolver problemas: Um novo aspecto do método matemático*. Interciência.

Polya, G. (2004). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

Possamai, J. P., & Silva, V. C. (2020). Comunicação matemática na resolução de problemas. *Revista de Educação Matemática*, 17, e020026. Recuperado de http://www.revistasbemsp.com.br/index.php/REMat-SP/article/view/201.

Schneider, A. (2022). Polya e a teoria da resolução de problemas aplicados à educação matemática nos ensinos fundamental e médio (Dissertação de mestrado profissional, Universidade Federal de Santa Catarina). Repositório Institucional da UFSC. Recuperado de https://repositorio.ufsc.br/handle/123456789/241025.

NOTAS DA OBRA

TÍTULO DA OBRA
Um ensaio sobre a articulação entre resolução de problemas, registros de representação semiótica e dialética ferramenta-objeto.

Franco Deyvis Lima de Sena
Mestre em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP.
Doutorando em Educação em Ciências e Matemáticas na Universidade Federal do Pará - UFPA, Belém, PA, Brasil.
sena.fdls@gmail.com.
https://orcid.org/0000-0002-0849-379X.

Emily da Costa Madeira
Mestra Profissional em Ensino de Matemática, Belém, PA, Brasil.
emilycosta33@gmail.com.
https://orcid.org/0009-0009-1936-2929.

Acylena Coelho Costa
Doutora em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP.
Professora na Universidade do Estado do Pará – UEPA, Belém, PA, Brasil.
acylena@uepa.br.
https://orcid.org/0009-0001-2364-2992.

José Messildo Viana Nunes
Doutor em Educação Matemática pela Pontifícia Universidade Católica de São Paulo – PUCSP. Professor na Universidade Federal do Pará - UFPA, Belém, PA, Brasil.
messildo@ufpa.br.
https://orcid.org/0000-0001-9492-4914.

Saddo Ag. Almouloud
Professor na Universidade Federal do Pará - UFPA, Belém, PA, Brasil.
messildo@ufpa.br.
https://orcid.org/0000-0002-8391-7054.

Endereço de correspondência do principal autor
Av. Barão do Rio Branco, 1785, 68725-000, Igarapé-Açu, PA, Brasil.

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: F. D. L. Sena, E. C. Madeira, A. C. Costa, J. M. V. Nunes.

Discussão dos resultados: F. D. L. Sena, E. C. Madeira, A. C. Costa, J. M. V. Nunes.
Revisão e aprovação: F. D. L. Sena, E. C. Madeira, A. C. Costa, J. M. V. Nunes.

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 21-02-2025 – Aprovado em: 24-11-2025