Artigo Original

REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

O ENSINO DA FUNÇÃO SENO COM BASE EM SONS MUSICAIS

Teaching The Sine Function Based On Musical Sounds

Lúcia MENONCINI
Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, Brasil
lucia.menoncini@uffs.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-2623-6487

Emanuela Graziela DILKIN
Universidade Federal da Fronteira Sul, Chapecó, Brasil.
emanueladilkin@gmail.com
https://orcid.org/0009-0008-3784-2689

RESUMO

Na Grécia Antiga, a música e a matemática eram consideradas pilares do conhecimento. Foi no século VI a.C que surgiu o primeiro registro da relação existente entre estes pilares, no chamado *quadrivium.* Com o passar dos tempos, esta relação foi se estreitando, e hoje ela pode ser estabelecida e estudada no âmbito escolar. Conhecer a relação entre música e matemática pode ser um fator positivo para o professor que ensina funções trigonométricas. Nesse sentido, o presente trabalho tem como objetivo investigar o esboço de curva da função trigonométrica seno, de modo a estabelecer relações com sons musicais, partindo de um modelo matemático simplificado aplicado no GeoGebra. Para tal, utiliza-se a Teoria de Interpretação Global Figural, proposta pela Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS). Como resultado, é possível reconhecer e compreender a interferência dos parâmetros da função seno na produção do som, assim como o sentido desses parâmetros na onda sonora, em particular no caso da nota musical MI.

Palavras-chave: Funções Trigonométricas, Música, Interpretação Global Figural

ABSTRACT

In Ancient Greece, music and mathematics were considered pillars of knowledge. It was in the 6th century BC that the first record of the relationship between these pillars appeared, in the so-called *quadrivium*. Over time, this relationship became closer, and today it can be established and studied at school. Knowing the relationship between music and mathematics can be a positive factor for teachers who teach trigonometric functions. In this sense, the present work aims to investigate the curve outline of the sine trigonometric function, in order to establish relationships with musical sounds, starting from a simplified mathematical model applied in GeoGebra. To this end, the Global Figural Interpretation Theory, proposed by the Theory of Semiotic Representation Registers (TRRS), is used. As a result, it is possible to recognize and understand the interference of the sine function parameters in sound production, as well as the direction of these parameters in the sound wave, particularly in the case of the musical note MI.

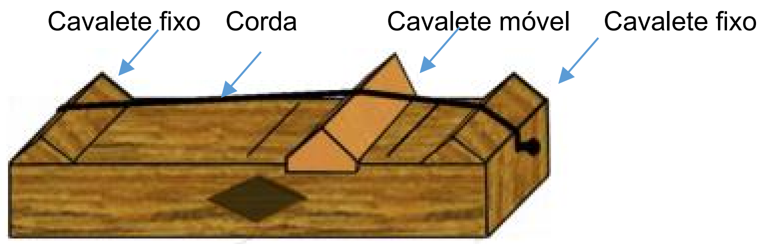
Keywords: Trigonometric Functions, Music, Global Figural Interpretation

1 INTRODUÇÃO

O primeiro registro associando matemática e música é uma lenda que surgiu por volta do século VI a.C. na Grécia Antiga e na Escola Pitagórica (Boyer & Merzbach, 2019). Essa lenda conta que ao passar por um ferreiro, Pitágoras ouviu sons de um martelo que às vezes soavam agradáveis em consonância e ora em dissonância e, isso o instigou a descobrir tal fenômeno (D'Arrezzo, 1996 *apud* Pereira, 2013). Durante experimentos deste fenômeno, notou que o som produzido havia relação com a massa e o tamanho do martelo e inventou um instrumento sonoro composto por apenas uma corda, depois chamado Monocórdio de Pitágoras (Figura 1).

Figura 1

O monocórdio



Fonte: Adaptado de clube da OBMEP (2016).

O monocórdio era um instrumento que continha uma corda única tensionada entre dois cavaletes fixos juntamente com um terceiro cavalete móvel que foi construído para dividir a corda em partes proporcionais (Figura 1). Movendo o cavalete móvel ao longo da prancha, a sua nova posição resultava em diferentes sons, mais agudos ou mais graves. Durante suas experiências, Pitágoras marcou com pontos a distância entre os locais ao longo da corda, de onde os sons soavam mais harmônicos ou desarmônicos para seus ouvidos. Dessa forma, ele desenvolveu sua própria escala musical, que é chamada a Escala Pitagórica, um primeiro sistema de sintonização musical existente.

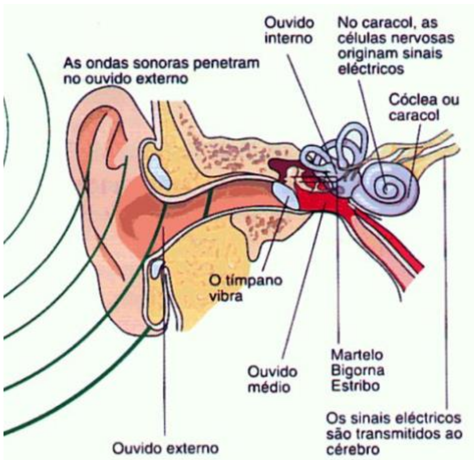
Essa conexão da música com a matemática perpassou o tempo e hoje ela também pode ser utilizada em sala de aula. Neste sentido, o presente estudo tem por finalidade estabelecer relações com a função trigonométrica seno e os sons musicais analisando uma única nota musical, a nota[1] MI. Sendo assim, é uma investigação qualitativa sobre o esboço de curvas e tem-se a seguinte pergunta de pesquisa: *Como relacionar e construir significados para os parâmetros de representação algébrica da função seno a partir de uma nota musical?* Para responder essa questão são apresentados conceitos musicais importantes para a compreensão do tema, a definição da função seno e ao final a experimentação através da Teoria Global Figural e do aplicativo Geogebra[2].

2 O SOM

O som pode ser definido como a sensação do ouvido quando há diferença de vibração do ar. Se o ar serve como meio de propagação, então as ondas de som são flutuações na pressão de ar que se propagam e, atingindo os ouvidos, são convertidas em impulsos nervosos que são decodificados pelo cérebro (Wheeler, 2014). Esse esquema é ilustrado na Figura 2 a seguir.

Figura 21

Ouvido humano e a percepção de ondas sonoras



Fonte: Anacleto (2015).

[1] O termo nota neste trabalho refere-se sempre às notas musicais.
[2] O GeoGebra é um software gratuito de matemática que engloba áreas de geometria, álgebra, gráficos e planilhas de forma dinâmica. Pode ser acessado de forma online e permite compartilhar os recursos produzidos, também é disponível em diversos idiomas.

O som é produzido por vibrações da pressão atmosférica que podem ser regulares e irregulares. As vibrações irregulares produzem ondas irregulares, ou ruídos, e são percebidas como desagradáveis e de sons menos organizados (Med, 1996). As vibrações regulares produzem ondas regulares, despertando sons agradáveis e harmoniosos. Essas se manifestam por meio de três características que fazem um som se distinguir: altura, gravidade e timbre.

Altura: O termo musical altura é usado para descrever se um som é alto ou baixo e é correlacionado à frequência. Quando um som é considerado alto musicalmente possui maior frequência e baixo quando possui menor frequência. Quando alguém fala para abaixar o som ou aumentar o som musicalmente, não está se referendo ao volume do som na forma habitual.

Pode-se perceber essas variações através das ondas sonoras da Figura 3. A onda sonora na Subfigura 3.1 caracteriza um som mais grave (baixa frequência) em relação ao som caracterizado pela onda da Subfigura 3.2, pois ela possui menor número de oscilações completas.

Figura 3

Onda sonora grave e aguda

3.1 – Onda de baixa frequência | 3.2 - Onda de alta frequência

Fonte: Autoras.

Intensidade: A partir da intensidade pode-se distinguir sons mais intensos e menos intensos, sendo esses sons mais fortes e mais fracos, respectivamente. Ondas sonoras transportam energia, e desse modo, grandes amplitudes de onda produzem sons mais fortes, enquanto que amplitudes menores, com menos energia, produzem sons mais fracos. A intensidade do som é medida em Decibel (dB) e até 80 dB o som é suportável para o ser humano, ou seja, não causa risco para os ouvidos.

Além da escala para a intensidade do som em dB também existe a escala em Hertz (Hz) que mensura a altura das notas musicais e indica se o som é grave ou agudo. Assim, as frequências sonoras perceptíveis pelo ser humano variam de 20 Hz a 20000 Hz. Esse intervalo é denominado intervalo audível.

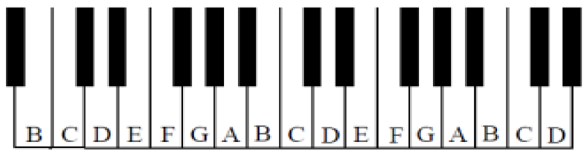
Timbre: O timbre é a característica que permite diferenciar sons que possuem a mesma frequência e amplitude. Deste modo, ondas sonoras produzidas por diferentes instrumentos musicais ou pela voz humana, podem possuir a mesma frequência e mesma amplitude, porém sua sonoridade é diferente, por conta de que o timbre é único para cada instrumento ou tom de voz.

3 A MÚSICA

Branco (2022) explica que a música (do grego *μουσική τέχνη - musiké téchne*, a arte das musas) é uma forma de arte que se constitui em combinar sons e silêncio seguindo uma pré-organização ao longo do tempo. A música é composta por notas musicais que são os menores elementos do som. A escala diatônica contém sete notas: DÓ - RÉ - MI - FÁ - SOL - LÁ – SI, em que a primeira nota é repetida na oitava, dando início a uma nova escala. Na figura a seguir é apresentado o teclado de um piano e suas notas musicais representadas por letras do nosso alfabeto: C – D – E – F – G – A – B.

Figura 4

Teclado musical



Fonte: Wright (2009).

Conforme a Figura 4, há a repetição das notas representadas por letras, mas cada nota possui a sua sonoridade singular. As teclas mais à direita possuem maior altura enquanto que as teclas mais à esquerda possuem menor altura. Dessa forma, quando uma mesma nota está uma *oitava* acima significa dizer que está posicionada mais à direita no teclado. Ao comparar duas notas musicais, uma pode soar mais grave e a outra mais aguda. O que determina esse comportamento é a frequência das vibrações que é resultado das diferentes alturas musicais (Figura 5).

Figura 5

Frequência das notas musicais

Notas	Freqüências
Dó	261,63 Hz
Ré	293,66 Hz
Mi	329,63 Hz
Fá	349,23 Hz
Sol	391,99 Hz
Lá	440,00 Hz
Si	493,88 Hz

Fonte: Prescinato (2011).

A Figura 5 mostra a frequência de cada uma das notas musicais. Quanto maior a vibração mais agudo será o som, e quanto menor a vibração mais grave será o som. Na seção seguinte será contextualizada a abordagem metodológica utilizada na investigação da função seno com base em sons musicais.

4 A ABORDAGEM DE INTERPRETAÇÃO GLOBAL FIGURAL

Neste estudo adota-se uma abordagem qualitativa, em que será analisado o esboço de curva de uma nota musical com o foco na compreensão das relações entre o comportamento gráfico da função seno com base nos sons musicais gerados no *software* GeoGebra. A Teoria dos Registros de Representação Semiótica se insere nesta abordagem pois o autor Raymond Duval discorre sobre a Interpretação Global Figural, a qual trata sobre o esboço de curvas de funções de forma mais ampla e qualitativa em relação à Abordagem Ponto a Ponto.

Na Abordagem Ponto a Ponto, considera-se a expressão algébrica da função, ou seja, sua lei de formação. Nela, o esboço da curva da função é um conjunto de pares ordenados, resultante da atribuição de valores para a variável independente, e onde por meio de cálculos são encontrados os valores para a variável dependente. Essa abordagem gera apenas uma correspondência local entre o par ordenado e o ponto no gráfico, como se fosse uma regra de codificação:

> A regra de codificação só permite, portanto, duas coisas: ou a leitura de uma dupla de números sobre o gráfico a partir de um ponto designado, ou a designação de um ponto a partir de uma dupla de números. A repetição destas duas operações elementares não é suficiente para a conversão de representações entre os dois registros. (Duval, 1993, p. 45)

Com essa abordagem pontual, pode-se não conseguir estabelecer relações entre as representações da função nos registros algébrico e gráfico. Sendo assim, Duval (2012) propõe a Abordagem de Interpretação Global Figural que leva em consideração as unidades significativas da lei de formação, ou seja, os parâmetros (coeficientes) presentes na representação algébrica de uma equação com as unidades significativas visuais próprias da representação gráfica (inclinação, concavidade, intersecção com os eixos).

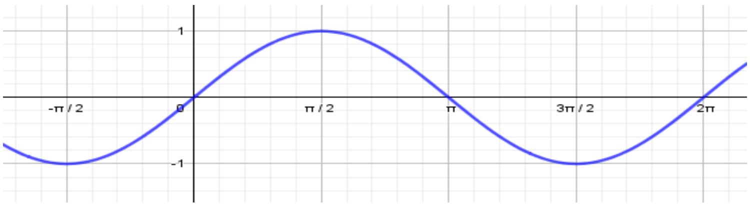
Essa abordagem trata de estudar qualitativamente a expressão ou lei de formação de uma função na denominada equação de curva base, para assim fazer modificações algébricas (tratamentos) e analisar graficamente o que implicam essas modificações (conversões) articulando as operações entre os dois registros. Dessa forma, na seção 5 a função seno é definida para a posterior utilização de um modelo matemático na seção 6, o qual se apoia na frequência da nota musical MI para a análise.

5 A FUNÇÃO SENO VIA INTERPRETAÇÃO GLOBAL FIGURAL

A função seno pode ser definida como a função f de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ que a cada x faz corresponder o número $y = sen\ x$. O gráfico da função seno é chamado senoide e o seu esboço está na Figura 6:

Figura 62

Curva senoide

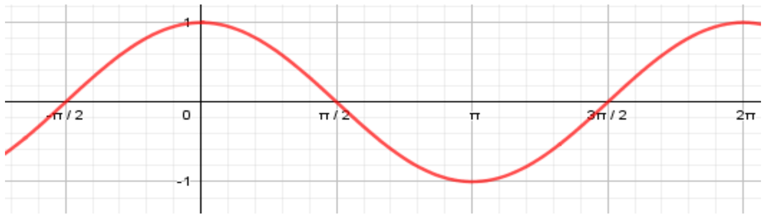


Fonte: Autoras.

Seno é uma função periódica, de período $2\,\pi$, uma vez que $sen(x) = sen\,(x + 2\pi)$. Já a função cosseno surgiu da necessidade de determinar o seno do complemento de um ângulo. Ela pode ser definida como a função real f em que, para cada x faz corresponder o número $y = cos\,x$. O gráfico da função cosseno é chamado cossenoide (Figura 7).

Figura 7

Curva cossenoide

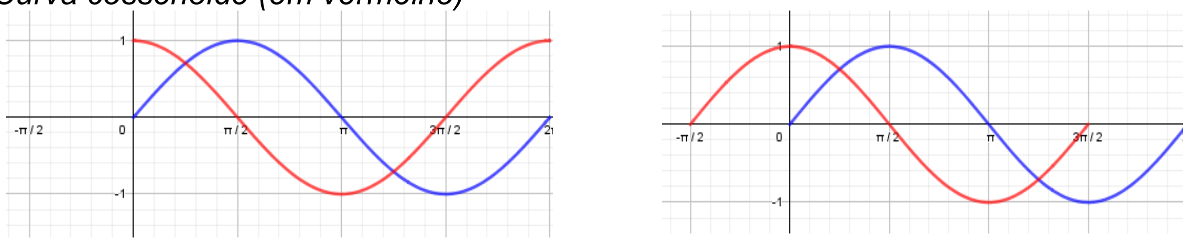


Fonte: Autoras.

O gráfico do cosseno é uma curva periódica, pois $cos(x) = cos\,(x + 2\pi)$ e seu período é 2π. A cossenoide é a própria senoide, porém transladada no eixo horizontal, como se observa na figura a seguir:

Figura 8

Curva cossenoide (em vermelho)



Fonte: Autoras.

Na Figura 8 a onda cossenoide é também uma senoide, pois possui o mesmo formato, porém transladada no eixo horizontal com relação à onda seno. Neste trabalho, é possível utilizar qualquer uma dessas funções. Contudo, opta-se pela função seno e mais especificamente, para a seguinte lei de formação no registro algébrico:

$$y(x) = A.sen(Bx + C) + A_0 \qquad (1)$$

sendo os parâmetros A, B, C e A_0 números reais.

Usando a Abordagem de Interpretação Global Figural e partindo da representação algébrica (1), para o esboço da senoide são modificados os valores dos parâmetros A, B, C e A_0 e são observadas as modificações da curva no registro gráfico.

Para iniciar o esboço da curva, considera-se a função base $y = Asen\ x$, em que $B = 1,\ C = A_0 = 0$, e o valor do parâmetro A é variável. Tomando alguns valores para A, tem-se:

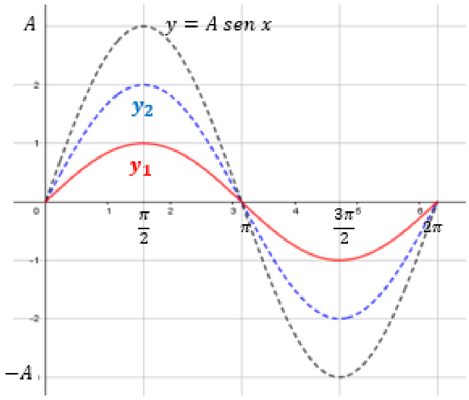
a) Para $A = 1 \Longrightarrow y_1 = sen\ x$.

b) Para $A = 2 \Longrightarrow y_2 = 2sen\ x$.

A Figura 9 mostra a senoide em relação a variação do parâmetro A.

Figura 9

Curva $\boldsymbol{y = Asen\ x}$



Fonte: Autoras.

Da Figura 9 observa-se que o parâmetro A está relacionado com o ponto mais alto (crista) ou o ponto mais baixo (vale) da curva, ou seja, com a amplitude da onda.

Agora, considera-se a função $y = sen\ (Bx)$, em que $A = 1,\ C = D = 0$ e o valor de B é variável. Tomando alguns valores para B, tem-se:

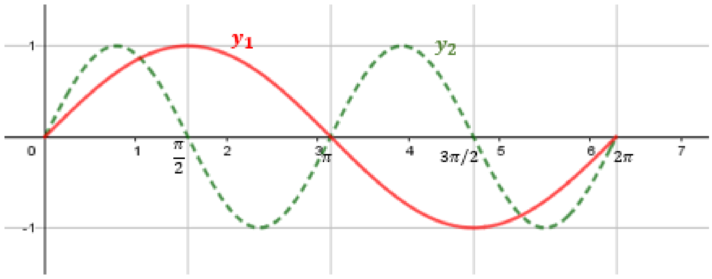
a) Para $B = 1 \Longrightarrow y_1 = sen\ x$.

b) Para $B = 2 \Longrightarrow y_2 = sen2x$.

Na Figura 10, o parâmetro B está relacionado com o comprimento de onda λ e frequência f . Enquanto y_1 tem comprimento $\lambda_1 = 2\pi$, a curva y_2 tem comprimento $\lambda_2 = \pi$.Também, a curva y_1 tem frequência $f_1 = 1\ Hz$, enquanto que y_2 tem frequência $f_2 = 2\ Hz$, já que a senóide completa duas oscilações no intervalo de $[0, 2\pi]$.

Figura *10*

Curva $\boldsymbol{f(x) = sen\ (Bx)}$



Fonte: Autoras.

Mantendo os parâmetros $A = 1, B = 1, D = 0$ e variando o parâmetro C, resulta na função $y = sen\ (x + C)$. Tomando alguns valores para C, tem-se:

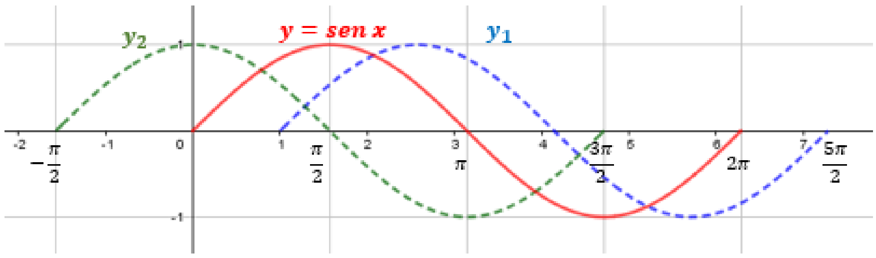
a) Para $C = 0 \Longrightarrow y = sen\ x$

b) Para $C = \frac{\pi}{2} \Longrightarrow y_1 = sen(x + \frac{\pi}{2})$.

c) Para $C = -1 \Longrightarrow y_2 = sen\ (x - 1)$.

Figura 11

Curva $\boldsymbol{f(x) = sen\ (x + C)}$



Fonte: Autoras.

Ao modificar o parâmetro C na expressão algébrica da Figura 11, as curvas sofrem um deslocamento sobre o eixo x, em comparação com a curva $y = sen\ x$. Assim, se $C > 0$, então a senóide se desloca C unidades para a esquerda e se $C < 0$ o deslocamento ocorre para a direita.

O último parâmetro a ser analisado é o A_0. Mantendo constantes $A = 1, B = 1, C = 0$ e variando o valor de A_0 na função $y = sen\ (x) + A_0$. Tomando alguns valores para A_0, tem-se:

a) Para $A_0 = 0 \Longrightarrow y = sen\ x$

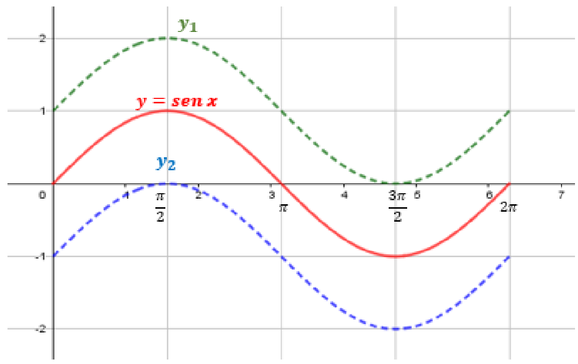
b) Para $A_0 = 1 \Longrightarrow y_1 = sen(x) + 1.$

c) Para $A_0 = -1 \Longrightarrow y_2 = sen\ (x) - 1.$

Na Figura 12 pode-se observar a variação da curva em relação à variação do parâmetro A_0.

Figura 12

Curva $\boldsymbol{f(x) = sen\ (x) + A_0}$



Fonte: Autoras.

De acordo com a Figura 12, o parâmetro A_0 está relacionado com o deslocamento vertical da senoide em relação à curva $y = sen\ x$. Se $A_0 > 0$, então a senóide se desloca D unidades para cima, em relação ao eixo y, e se $A_0 < 0$ a curva sofre um deslocamento para baixo.

6 O MODELO MATEMÁTICO DA FUNÇÃO SENO E SUA RELAÇÃO COM SONS MUSICAIS

6.1 O Modelo matemático simplificado

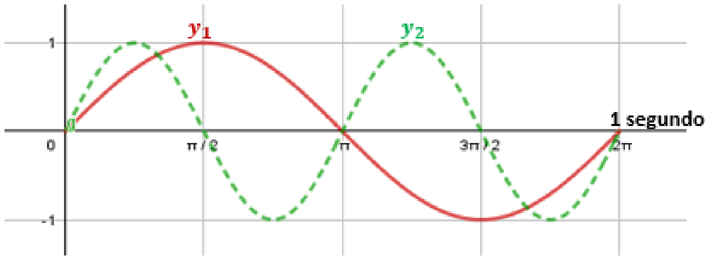
A partir do esboço de curvas anteriormente realizado da função $y = A.sen(Bx + C) + A_0$ é preciso chegar em um modelo matemático simplificado para as ondas musicais senoidais, já que as ondas sonoras variam conforme o tempo t. Os ajustes na função são:

- O parâmetro A indica a Amplitude da onda sonora. Os sons possuem um número racional que multiplica a função da onda sonora, quanto maior esse número o som é mais intenso e quanto menor é menos intenso. Um exemplo pode ser uma pessoa que grita e depois sussurra, ambos na mesma frequência, mas no primeiro caso o som apresenta maior amplitude do que no segundo caso.

- O parâmetro B se relaciona com a frequência f, com o comprimento e com o período T, ou seja, com o tempo que a onda demora para realizar uma oscilação completa. De fato, para mostrar esta última relação, fixe o tempo em 1 segundo e considere as funções $y_1 = sen\ x$ e $y_2 = sen\ 2x$, sendo os parâmetros $A = 1$ e B iguais a $B = 1$ e $B = 2$, respectivamente, conforme Figura 13:

Figura *13*

Curvas $\boldsymbol{y_1 = sen\ x}$ *e* $\boldsymbol{y_2 = sen\ 2x}$



Fonte: Autoras.

Uma oscilação completa da senoide $y_1 = sen\ x$ ocorre em 2π radianos e ela demora um segundo para essa oscilação, então sua frequência é:

$$f = \frac{1\ oscilação}{1\ segundo} = 1\ Hz$$

e escreve-se:

$$1\ s \underline{\qquad\qquad} 2\pi\ rad$$

$$t\ s \underline{\qquad\qquad} x\ \ rad$$

$$x = x(t) = 1.2\pi t$$

Como o tempo para completar uma oscilação completa de y_1 é de 1 segundo, então o período é $T = 1s$. Já a curva $y_2 = sen\ 2x$ completa duas oscilações em um segundo, então sua frequência será

$$f = \frac{2\ oscilação}{1\ segundo} = 2\ Hz$$

da mesma forma,

$$1\ s \underline{\qquad\qquad} 2.2\pi\ rad$$

$$t\ s \underline{\hspace{3em}} x\ \ rad$$

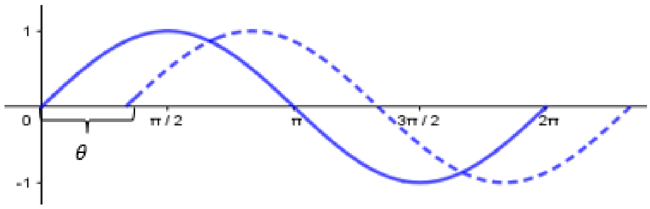
$$x = x(t) = 2.2\pi t$$

O tempo para completar duas oscilações é de 1 segundo e, portanto, o período é $T = \frac{1}{2}s$. Seguindo o raciocínio, chega-se à função $x(t) = f.2\pi t$ sendo que o parâmetro B se relaciona com a frequência f da senóide.

- O parâmetro C está relacionado com o deslocamento horizontal da curva. Assim, se esta onda se propagar para a direita, após um determinado tempo t, terá percorrido uma distância θ (em radianos por segundo, pois o argumento da função está em radianos) conforme Figura 14.

Figura *14*

Propagação da curva $\boldsymbol{y = sen(x - \theta)}$



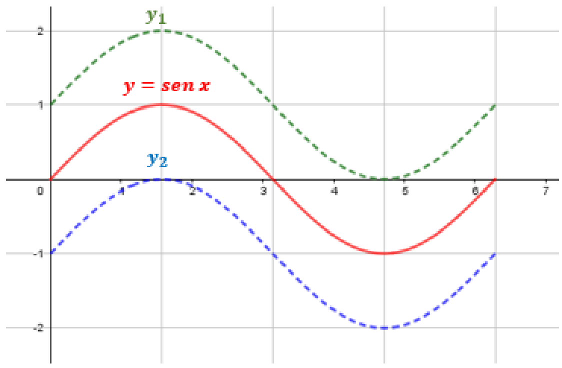
Fonte: Autoras.

O deslocamento da senoide para a direita ($\theta > 0$) indica que o som sofreu um atraso no tempo, ou seja, houve um *delay.* Já o deslocamento para esquerda ($\theta < 0$) significa um avanço do som no tempo.

- O parâmetro A_0 indica o deslocamento vertical da onda (Figura 15).

Figura *15*

Curva $y = sen\ (x) + A_0$



Fonte: Autoras

O deslocamento vertical está relacionado com a pressão atmosférica normal[3]. Quando $A_0 = 0$, a pressão do ar é considerada normal, mas quando $A_0 > 0$ ou $A_0 < 0$, a pressão é maior ou menor que a pressão normal, respectivamente.

Diante da análise qualitativa dos parâmetros A, B, C, A_0, chega-se ao modelo matemático simplificado a seguir, em que $y(t)$ descreve a variação da pressão atmosférica, A é a Amplitude e mede variação máxima da pressão atmosférica, f é a frequência da onda, θ é o ângulo da fase e indica o avanço ou atraso do início do som, e A_0 é a pressão atmosférica normal.

$$y(t) = Asen(2\pi ft - \theta) + A_0 \qquad (2)$$

Assim, a análise qualitativa na seção 6.2 dos parâmetros físicos A, B, C e A_0 da função $y(t)$ deve possibilitar a identificação dos sons harmônicos necessários para cada composição musical e modificar as ondas sonoras quando necessário.

6.2 A Experimentação

Nesta seção, os sons de algumas notas musicais são percebidos e correlacionados com os parâmetros (coeficientes) do modelo matemático (2). Considerando fixo o valor da pressão atmosférica normal $A_0 = 0$, são realizados experimentos para verificar como a variação da amplitude (A), da frequência (f) e do ângulo da fase (θ) influenciam na produção e percepção do som.

Os experimentos são realizados pelo GeoGebra e para evitar repetições deste termo, quando não mencionado, subentende-se o uso deste aplicativo. Opta-se por usar a nota musical MI nos experimentos para exemplificar a produção e percepção de seus sons. No entanto, podem ser utilizadas outras notas musicais e os comparativos podem ser realizados com mais de duas notas. Os experimentos estão divididos em momentos para facilitar a compreensão e distinção de cada atividade.

MOMENTO 1: Para iniciar a experimentação e realizar um comparativo mais assertivo, utiliza-se nesta análise a nota musical MI variando a sua frequência.

Experimento 1 (MI com frequência $f = 329{,}63\ Hz$): Considere a função $y(t) = Asen(2\pi ft - \theta) + A_0$ sendo, $A = 1$, $A_0 = 0$, $\theta = 0$ e $f = 329{,}63$, ou seja, a nota musical MI está com sua frequência normal, que é de 329,63 Hz.

---

[3]De acordo com Filho (2022).

Para reproduzir a sua sonoridade no GeoGebra, basta seguir os passos:

● Na Janela de Entrada, digite TocarSom e escolha a opção *TocarSom(<Função>, <Valor Mínimo>, <Valor Máximo>)*

● Em seguida, entre com os dados da função seno e com os valores mínimo e máximo que se referem à duração de tempo do som:

Função: $y = sen(329.63 * \pi * x)$

Valor Mínimo 0, Valor Máximo 1

● Logo, o comando final é *TocarSom(sin(329.63*pi*x),0,1)*.

Para esboçar a curva da função $y = sen(2 * 329{,}63 * \pi * x)$ basta seguir os passos:

● Na Janela de Entrada, escolha o comando Função(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)

● Em seguida, entre com os dados da função seno, do Valor de x Inicial e do Valor de x Final:

Função: $y = sen(329.63 * \pi * x)$

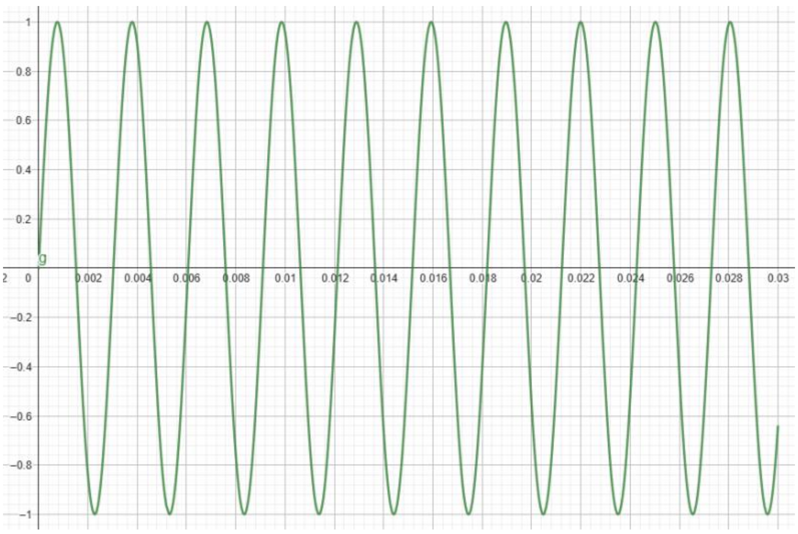
Valor de x Inicial: 0, Valor de x Final: 0.03

Para visualizar a curva, clique com o botão direito do mouse e escolha a opção *Eixo X: Eixo Y: 1:100*

● Logo, o comando final é *Função(sin(329.63*pi*x), 0, 0.03)* e o gráfico é mostrado na Figura 16.

Figura *16*

Curva da nota MI de 329,63 Hz



Fonte: Autoras.

Como a nota MI possui 329,63 Hz de oscilações em 1 segundo o intervalo escolhido é entre 0 e 0,03. A malha do eixo x foi determinada para 1 e a do eixo y para 100. Essas configurações permitiram observar melhor a função seno, contudo, outras configurações poderiam ser realizadas.

Experimento 2 (MI com frequência $f = 659{,}26\ Hz$): Considere a nota musical MI com frequência de 329,63 Hz. Seguindo os mesmos comandos usados para a reprodução do som e da curva da nota MI com frequência 329,63 Hz, a única alteração será o valor da frequência que passa a ser $f = 659{,}26\ Hz$ quando multiplicada por 2. Logo:

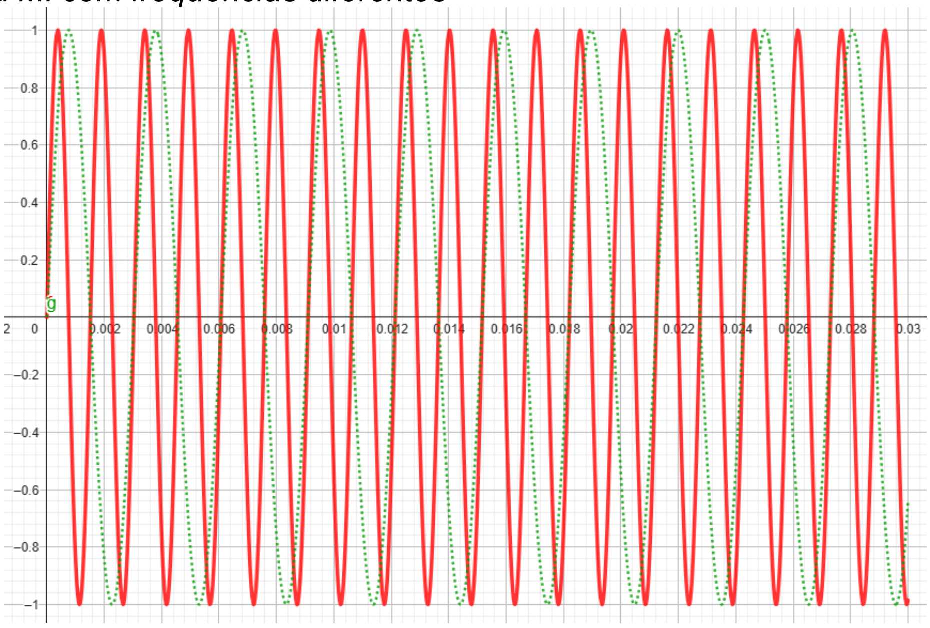
- Para tocar o som, insira o comando *TocarSom(sin(2*329.63*pi*x),0,1*)

Quando a frequência da nota MI é modificada para 659,26 Hz, o som produzido é mais agudo comparado com som produzido da nota MI, $f = 329{,}63\ Hz$

- Para esboçar a curva (Figura 17), insira o comando *Função(sin(2*329.63*pi*x), 0, 0.03).*

Figura *17*

Nota MI com frequências diferentes



Fonte: Autoras.

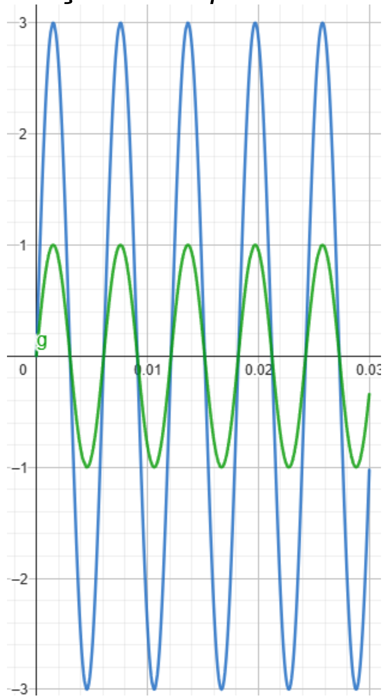
Na Figura 17, ao comparar a curva da nota MI, cuja frequência era $f = 329{,}63\ Hz$ (traço verde pontilhado) com a curva da nota MI, $f = 659{,}26\ Hz$ (traço vermelho contínuo) é possível notar a modificação na quantidade de oscilações, sendo que a nota MI com maior frequência possui mais ciclos no intervalo [0, 0,03] segundos. Ao comparar os sons, a curva com a maior frequência (traço vermelho contínuo) é a que possui um som mais agudo, apesar de ser a mesma nota musical.

MOMENTO 2: utiliza-se a nota musical MI com frequência normal $329{,}63\ Hz$, porém variando a sua amplitude.

Experimento 3 (MI com amplitude $A = 3$): Considere a nota MI com frequência $329{,}73\ Hz$, $A_0 = 0$, $\theta = 0$ e $A = 3$. Seu som é produzido via comando *TocarSom(3*sin(329.63*pi*x),0,1)*. O gráfico dessa nota com alteração na amplitude pode ser esboçado a partir do comando *Função(3*sin(329.63*pi*x), 0, 0.03),* como mostra a Figura 18.

Figura 18

Variação da amplitude na nota MI



Fonte: Autoras.

Pela Figura 18, as frequências continuam as mesmas da nota MI, o único parâmetro que muda é a amplitude. Quando a amplitude é $A = 3$, é possível ouvir no GeoGebra o som da nota MI com uma intensidade maior em comparação com o som produzido no

Experimento 1, quando $A = 1$. Então, o som emitido é a nota MI com a amplitude três vezes maior que a primeira, sendo a mesma frequência, porém com uma intensidade maior.

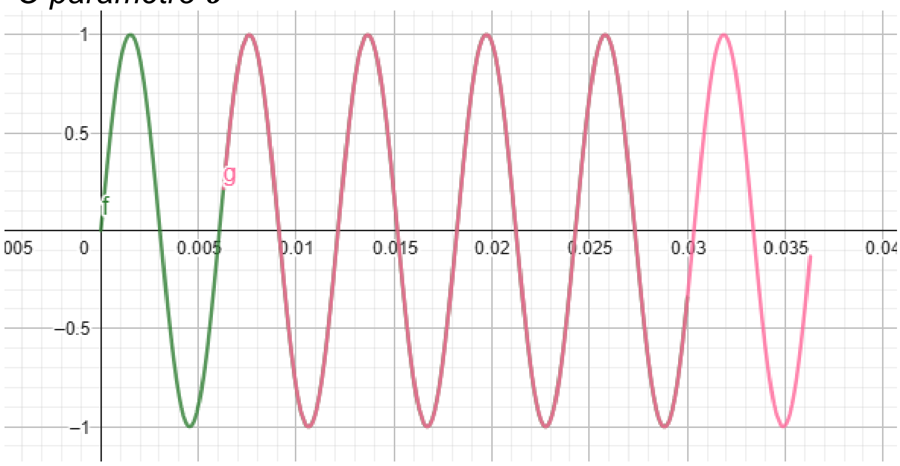
MOMENTO 3: Ainda usando a nota musical MI com frequência normal $329{,}63\ Hz$, altera-se o valor do ângulo da fase θ, isto é, considera-se a função $y(t) = Asen(2\pi ft - \theta) + A_0$ sendo, $A = 1$, $A_0 = 0$, $\theta = 2$ e $f = 329{,}63$.

Experimento 4 (MI com ângulo de fase $\theta = 2$): Na alteração do parâmetro θ, o esperado é que ocorra o fenômeno *delay*[4], que é um atraso do som. No entanto, ao utilizar o comando *TocarSom* com qualquer frequência de nota musical e variando θ, o som não é reproduzido com atrasos. Portanto, não é possível ouvir o efeito causado pela variação desse parâmetro no Geogebra.

Sendo assim, somente é possível visualizar o gráfico da onda sonora deslocada no eixo horizontal. Em um deslocamento de $\theta = \frac{\pi}{500}$, a curva é gerada via comando *Função(sin(329,63*pi*x-pi/500), pi/500, 0.03+pi/500)*, conforme Figura 19.

Figura 19

O parâmetro $\boldsymbol{\theta}$



Fonte: Autoras.

Observando a Figura 19, há um atraso ou deslocamento à direita da curva da função $y = sen(329{,}63 * x - \frac{\pi}{500})$ (cor rosa escuro), em relação à curva $y = sen(329{,}63 * x)$ (cor verde) em que $\theta = 0$, sendo que a interseção das curvas aparece com uma cor resultante

[4] *delay* é o nome dado para o atraso de áudio que ocorre em virtude do processamento do som. Um músico ao gravar uma faixa de áudio pode escutar a música reproduzida em um fone de ouvido em uma velocidade atrasada com a que está tocando, isso é uma falha comum que acontece nos computadores devido a latência (tempo do processamento da informação pelo computador).

da sobreposição do verde com o rosa escuro. O deslocamento à direita corresponde exatamente ao valor do parâmetro θ escolhido.

7. Considerações finais

Quanto aos parâmetros, a variação da amplitude e da frequência foram bem significativas e possibilitou observar, ouvir e distinguir as sonoridades correspondentes a cada uma delas. Porém, quanto ao ângulo de fase, o GeoGebra não foi capaz produzir o *delay* que é o atraso do som. Outra questão refere-se ao parâmetro A_0. Não foram encontrados em livros didáticos estudos que o relacionavam com a pressão atmosférica, sendo encontrado apenas no estudo de Filho (2022) e com base nele, assumiu-se que $A_0 = 0$ correspondia à pressão atmosférica normal. Assumido a pressão atmosférica normal, esse parâmetro não foi explorado.

Para um olhar mais amplo e qualitativo das curvas, uma opção é a abordagem de Interpretação Global Figural, pois pode-se atribuir sentidos aos parâmetros (coeficientes) da função seno através de significados musicais perceptíveis por meio de experimentos visuais e sonoros no GeoGebra. Essa abordagem no esboço de curvas apresenta um grande potencial para o ensino, e a música surge como uma possibilidade relevante para o ensino e a aprendizagem da função seno, enriquecendo as aulas de Matemática.

REFERÊNCIAS

Anacleto, R. [2015]. Anatomia do canal auditivo. Disponível em: http://professor.pucgoias.edu.br/SiteDocente/admin/arquivosUpload/15347/material/Aula%201%20Anatomia%20e%20fisiologia%20ouvido.pdf Acesso em: 24 jan. 2025.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2019). História da matemática. Editora Blucher.

Branco, M. C. (2022). Sob as Musas, sobre a técnica: uma investigação de possíveis interfaces entre pós-humanismo e música. *Per Musi*, (42), 1-19. https://doi.org/10.35699/2317-6377.2022.39909.

Bromberg, C. & Saito, F. (2017). As matemáticas, o monocórdio e o número sonoro. São Paulo: Livraria da Física. (Vol. 1).

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique. In *Annales de didactique et de sciences cognitives* (Vol. 5, pp. 37-65).

Duval, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Trad. Moretti, M. T. *Revemat*, *7*(2), 266-297.

Filho, F. F. (2022). Síntese de som: uma proposta de ensino para funções periódicas.

Med, B. (1996). Teoria da música. Brasília, DF: Musimed.

Pereira, M. D. C. (2013). Matemática e música: de Pitágoras aos dias de hoje. Rio de Janeiro.

Prescinato, R. (2011). O violonista. Disponível em: http://oviolonista.blogspot.com/2011/10/notas-musicais-escala-cromatica.html. Acesso em: 24 jan. 2025.

Wheeler, R. M. (2014). The Science of Sound. *Pearson New International Edition.* Third edition.

Wright, D. (2019). Mathematics and Music. *American Mathematical Society*.

NOTAS DA OBRA

Título da obra
O ensino da função seno com base em sons musicais

Lúcia Menoncini
Doutora em Educação Científica e Tecnológica
Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de Matemática (professora titular), Chapecó, Brasil
lucia.menoncini@uffs.edu.br
https://orcid.org/0000-0003-2623-6487

Emanuela Graziela Dilkin
Licenciada em Matemática
Universidade Federal da Fronteira Sul, Curso de Matemática (egressa), Chapecó, Brasil.
emanueladilkin@gmail.com
https://orcid.org/0009-0008-3784-2689

Endereço de correspondência do principal autor
Rua Caramuru, 442, CEP 89804180, Chapecó, SC, Brasil.

AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: L. Menoncini, E. G. Dilkin.
Coleta de dados: L. Menoncini, E. G. Dilkin.
Análise de dados: L. Menoncini, E. G. Dilkin.
Discussão dos resultados: L. Menoncini, E. G. Dilkin.
Revisão e aprovação: L. Menoncini, E. G. Dilkin.

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista
Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 03-06-2025 – Aprovado em: 08-12-2025