

(RE)DESCOBRINDO O MUNDO SOB O OLHAR DE UM GEÔMETRA: VISUALIZAÇÃO DE GRADES E CERCAS URBANAS

(Re)Discovering The World Through The Look Of A Geometer: Visualization Of Grids And Urban Fences

José Carlos Pinto LEIVAS

Universidade Franciscana – Santa Maria/RS, Brasil


leivasjc@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-6876-1461> 

André Firpo BEVILÁQUA

Universidade Federal de Santa Maria – Santa Maria/RS, Brasil

andre.firpo@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-4512-4256> 

RESUMO

O artigo apresenta uma pesquisa qualitativa/descritiva que teve como objetivo analisar fotografias obtidas pelos pesquisadores no que diz respeito a formas geométricas envolvidas. Para isso, foram utilizadas argumentações nas análises com base em habilidades de visualização, imaginação e criatividade. O ensino de Geometria apresenta, segundo autores, dificuldades por parte do professor em associar fundamentos teóricos com objetos reais nem sempre disponíveis no âmbito escolar, acadêmico ou ao seu redor. As fotografias analisadas concentraram-se em cercas e grades urbanas em que o olhar do pesquisador logo identificou elementos geométricos que são usualmente empregados por definições e uso de fórmulas o que leva a uma aprendizagem mecânica. O uso do GeoGebra permitiu uma análise mais apurada de verificação de paralelismo, perpendicularismo, vetores, equações cartesianas de certos elementos bem como distinção, por exemplo, entre losangos e quadrados, arcos de circunferências concêntricas, circunferências tangentes e outros. Acreditamos que o artigo possa servir de estímulo ao professor e seu ensino de modo a proporcionar uma aprendizagem mais significativa inclusive desenvolvendo pensamento e letramento geométricos.

Palavras-chave: Letramento Geométrico, Visualização, Fotografias

ABSTRACT

The article presents a qualitative/descriptive research that aimed to analyze photographs obtained by researchers with regard to geometric shapes involved. For this, arguments were used in the analyzes based on visualization, imagination and creativity skills. The teaching of Geometry presents, according to authors, difficulties on the part of the teacher in associating theoretical foundations with real objects that are not always available in the school, academic or surrounding areas. The photographs analyzed focused on urban fences and railings in which the researcher's gaze quickly identified geometric elements that are usually used by definitions and the use of formulas, which leads to mechanical learning. The use of GeoGebra allowed a more accurate analysis of checking parallelism, perpendicularity, vectors, cartesian equations of certain elements as well as distinguishing, for example, between rhombuses and squares, arcs of concentric circles, tangent circles and others. We believe that the article can serve as a stimulus to teachers and their teaching in order to provide more meaningful learning, including developing geometric thinking and literacy.

Keywords: Geometric Literacy, Visualization, Photography

1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

No mundo físico, os elementos materiais são frequentemente utilizados ou manipulados sem uma reflexão mais aprofundada sobre seu uso, constituição ou relevância, como se estivessem ali desde sempre, cumprindo sua função de atender às necessidades e/ou desejos humanos. A cerca/grade de uma casa, por exemplo, é geralmente instalada com o propósito de ornamentação e segurança, cumprindo, ao mesmo tempo, uma função tanto ética quanto estética. No entanto, após sua instalação, dificilmente alguém se dedica a analisar as formas que a compõem, os materiais utilizados em sua confecção ou mesmo o seu papel naquela residência. É como se ela formasse parte, desde sempre, daquela paisagem, quase como um elemento natural, invisível em sua cotidianidade. Em muitos casos, isso acaba por relegar tais objetos a um plano de indiferença, onde sua presença é aceita como parte intrínseca do ambiente que habitamos. Em outras palavras, a cerca/grade é “apenas” uma cerca/grade, supostamente não há muito mais o que possamos dizer sobre tal objeto.

Essa é a antítese do que pretendemos mostrar nesta investigação. Neste trabalho, defendemos que há muitas coisas que podem ser ditas sobre uma cerca/grade, visto que ela pode ser analisada sob diferentes perspectivas. Nesse sentido, uma “simples” cerca/grade pode tornar-se objeto de ensino e de aprendizagem, desde que fomentemos, em nossas práticas pedagógicas, um olhar curioso, atento e até mesmo analítico para o ente em questão. O grupo brasileiro “O Rappa”, por exemplo, postula, em uma de suas canções, um questionamento de ordem filosófica sobre tal objeto. Na música “Minha alma”, há uma estrofe que instaura um questionamento importante sobre a existência das grades: “As grades do condomínio são pra trazer proteção / Mas também trazem a dúvida se é você que tá nessa prisão”. Que tal explorar a canção em uma aula de Língua Portuguesa ou de Filosofia, por exemplo?

Disciplinas como a Matemática, especialmente quando pensamos na área de Geometria, também podem aportar importantes contribuições para a análise do objeto em questão. Ao examinar uma cerca/grade sob o viés geométrico, é possível explorar as formas, simetrias, padrões e proporções que a constituem, revelando aspectos que muitas vezes passam despercebidos no cotidiano. Tal abordagem não apenas enriquece a compreensão do objeto, mas também pode fomentar uma discussão interdisciplinar, no sentido de articular conhecimentos da Matemática/Geometria com outros campos do

conhecimento, tais como Língua Portuguesa e a Filosofia. Dessa forma, a cerca/grade deixa de ser vista apenas como um elemento inanimado, convertendo-se em um ponto de partida para reflexões mais amplas e complexas, a exemplo dos diferentes modos de representação de um mesmo elemento do mundo físico/material.

O presente artigo concentra-se em uma perspectiva específica para a análise de cercas/grades urbanas, examinando-as sob o viés da Geometria. O objetivo da investigação é analisar fotografias de cercas/grades urbanas coletadas pelos pesquisadores no que diz respeito a formas geométricas envolvidas. Para tanto, as análises foram embasadas em argumentações que mobilizam habilidades como visualização, imaginação e criatividade. A partir disso, o artigo delinea uma compreensão particular de letramento geométrico, destacando como a Geometria pode ser explorada para a descrição e análise de elementos do espaço urbano.

O artigo está estruturado em quatro seções, a partir desta introdução. A seguir, apresenta-se a fundamentação teórica, com a discussão de conceitos essenciais como letramento geométrico, visualização, imaginação e criatividade. Na sequência, detalha-se a base metodológica, caracterizando a presente investigação como descritiva/analítica e descrevendo a imagem como um registro passível de análise, especialmente no que diz respeito a seus aspectos visuais, imaginativos e criativos. Por fim, expõe-se a análise dos dados e as considerações finais, nas quais são retomados os objetivos da investigação, discutindo-se de que forma acreditamos que tenham sido alcançados.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nos primórdios da civilização, os seres humanos faziam registros cuneiformes em pedras (cavernas), mesmo sem conhecerem a escrita em linguagem formal, a fim de expressarem ideias que desejassem ficar para a posteridade ou, ao menos, para se comunicarem com outros indivíduos que por ali passassem. Muitas vezes, tais registros eram feitos por certos tipos de imagens que tinham algum significado sobre a vida dos mesmos.

Somente muitos séculos após, as civilizações que vieram a habitar a terra foram realizando descobertas de tais registros e buscando interpretá-los à luz de novos conhecimentos que foram sendo sedimentados nos seres humanos. Assim, aspectos visuais desses interpretadores foram explorados, trazendo à tona construtos mentais

daquilo que os antepassados desejavam deixar registrado.

Portanto, há de se considerar que a utilização de registros figurais mentais nos seres humanos já dava indícios de pensamento visual, mesmo sem uma linguagem formal que foi sendo elaborada e construída no decorrer do desenvolvimento humano. Na medida em que a humanidade foi se desenvolvendo ao longo dos séculos, necessidades de formalizar nomenclaturas e relações entre entes ligados à Geometria levaram o matemático Euclides, na Grécia Antiga, a elaborar uma sistematização dessa área em termos de definições, proposições e teoremas. Uma primeira versão traduzida diretamente para a língua portuguesa encontra-se em Bicudo (2009). Desde então muitos outros trabalhos surgiram.

Na literatura matemática encontra-se algo a respeito da alfabetização matemática, sendo que, no Brasil, uma das pesquisadoras precursoras na temática foi Danyluk (1989) quando pouco ainda se falava a respeito de linguagem em Educação Matemática no país. A autora indica que “o homem não é um ser independente do mundo, mas um ser solicitado pelo mundo através das coisas que nele estão.” (p.24). No que diz respeito ao ensino de Geometria atual, há uma rejeição à sua compreensão, uma vez que pouco se relaciona a temática com o mundo envolvido pelo ser. Avançando um pouco mais, a pesquisadora afirma:

Os significados dos entes podem ser clareados pelo ser-aí, ou podem se perder. Quando o homem lança seu olhar atento e indaga o Ser do ente, ele o olha de modo ontológico, isto é, procurando ver o eu é caracteristicamente fundamental a este ser e, com isso, pode clarear o significado do mesmo. (p. 25).

Assim, ao ensinar Geometria, é fundamental lançar mão do que leva, por exemplo, o serralheiro a criar determinadas ornamentações, inclusive a fim de conferir segurança em grades/cercas e atribuir os significados geométricos envolvidos.

Nossas pesquisas atuais têm se concentrado na formação de pensamento visual geométrico, em que buscamos propostas de desenvolver, desde o início da formação do indivíduo, modos de associar elementos geométricos que se encontram no seu convívio com as respectivas representações/registros formais. Para isso, investigamos habilidades de visualização, de imaginação e de criatividade, as quais acreditamos poderem ser desenvolvidas ao longo da escolaridade. Assim, o primeiro autor do presente artigo denomina letramento geométrico o processo de associar elementos concretos existentes no mundo real a definições e representações geométricas formais. Nesse sentido, o presente trabalho privilegiará o termo grifado no lugar de alfabetização geométrica, ao compreender a presença da Geometria na vida cotidiana, mais especificamente em

cercas/grades de residências urbanas. Para seu desenvolvimento, abordamos, a seguir, as referências sobre as habilidades citadas.

2.1 Visualização

Esta habilidade tem sido investigada em diversos patamares nos últimos tempos. Assim, para Presmeg (1986, p. 297), “uma imagem visual é definida como um esquema mental representando informações reais ou espaciais”. A autora, uma das precursoras na temática, indica onde se processa a imaginação visual, tão fundamental especialmente para a aprendizagem de Geometria, pois pesquisas como a de Pavanello (1993) já mostravam que esta área é bastante abandonada, tanto na escola básica quanto na superior. Nos currículos, ela se restringe à Geometria Plana e Espacial, consistindo, principalmente, de definições e fórmulas sem uma compreensão mais apurada ao observar um objeto como uma grade/cerca delimitando uma propriedade e nela visualizar representações de entes geométricos como veremos no presente artigo.

Por sua vez, Mariotti (1995), citado em Costa, 2000) caracteriza visualização como uma habilidade que consiste em trazer à mente imagens de coisas visíveis. Por sua vez, Senechal (citado em Costa, 2000, p. 262) indica que “visualização significa em linguagem popular ‘percepção espacial’ e assim é uma reconstrução mental da representação de objetos a 3 dimensões”. Na sequência cronológica, os estudos de Arcavi (1999) consideram que

Visualização é a habilidade, o processo e o produto de criação, interpretação, uso e comentário sobre figuras, imagens, diagramas, em nossas mentes, em papel ou com ferramentas tecnológicas, com a finalidade de desenhar e comunicar informações, pensar sobre e desenvolver ideias não conhecidas e avançar na compreensão. (p. 217).

Compactuando com a definição do autor, consideramos neste artigo imagens fotografadas de cercas/grades de ambientes urbanos e as interpretamos mentalmente com imagens oriundas da Geometria. Para tal, algumas dessas imagens podem ser percebidas ou exploradas utilizando as ferramentas do Geogebra, como no caso de simetrias.

Mais recentemente, encontramos, nas considerações de Cifuentes (2005, p. 58), que “visualizar é ser capaz de formular imagens mentais e está no início de todo o processo de abstração”. De forma similar, Zimmermann e Cunningham (1991, p. 3) definem visualização matemática como “o processo de formação de imagens

(mentalmente, ou com papel e lápis, ou com o auxílio de tecnologia) e utilização dessas imagens para descobrir e compreender matemática”. Ao utilizar fotografia de grades/cercas em residências domésticas, é possível descrever como determinadas formas geométricas podem ser utilizadas pelo construtor na ornamentação das mesmas, como é possível perceber na Figura 1 (a). Também, é possível analisar a questão de segurança sugerida por outros formatos, como ocorre na Figura 1 (b).

Figura 1

Grade ornamental e de segurança



(a)



(b)

Fonte: acervo dos pesquisadores

Observando a fachada da moradia na Figura 1 (a), constata-se uma ornamentação simples com repetição de uma forma geométrica. Esse recurso pode ser útil como segurança para evitar alguma queda. Na parte inferior da construção, o mesmo formato aparece novamente, o que indica ter sido privilegiado o aspecto visual geométrico, tendo em vista que o risco de queda no térreo é menor. Já na Figura 1(b), percebe-se que a ênfase recai sobre a segurança, uma vez que as formas muito próximas inibem a visualização do interior, bem como a invasão de animais de pequeno porte (cães, gatos etc.). Observa-se nela uma variedade imensa de formas de curvas generalizadas e relações geométricas como as transformações geométricas.

De fato, há pesquisas no âmbito da arquitetura que contribuem para essa compreensão ao evidenciarem a relevância da geometria e suas implicações no processo projetual, destacando não apenas seus aspectos formais, mas também suas dimensões funcionais e qualitativas, bem como a necessidade da adoção de parâmetros e técnicas de modelagem que orientem sua aplicação em projetos (Pires e Pereira, 2020).

Nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar (2008), encontramos

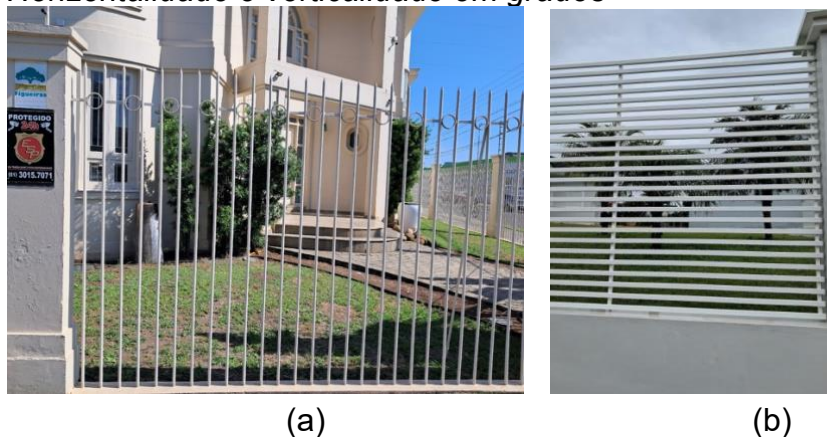
indicativos para a Geometria e para as medidas por níveis de escolaridade. O documento aponta que os programas de ensino, desde a pré-escola até o último ano do Ensino Médio, necessitam capacitar os alunos a:

1. Analisar as características e propriedades de formas geométricas bi e tri-dimensionais e desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas.
2. Especificar posições e descrever relações espaciais recorrendo à geometria de coordenadas e a outros sistemas de representação. (p. 45).

Uma dificuldade que se manifesta em muitos estudantes e, até mesmo, em adultos leigos, é distinguir os sentidos horizontal e vertical quando se quer relacionar alguma posição entre objetos diversos. Na Figura 2 (a e b), localizamos tais elementos em cercas/grades urbanas, as quais parecem que podem ilustrar uma construção visual mental em quem parar para observar que tais conceitos fazem parte do mundo real. Isso vai diretamente ao encontro do que definimos neste artigo como letramento geométrico, ou seja, um processo de associar a elementos concretos existentes no mundo real definições e representações geométricas formais.

Figura 2

Horizontalidade e verticalidade em grades



Fonte: acervo dos pesquisadores

Um estudante dos anos iniciais pode reproduzir as duas figuras e explorar o uso de recursos materiais concretos como régua, esquadros etc. para desenvolver argumentos matemáticos acerca de relações geométricas envolvidas nas duas imagens visuais, especificando e descrevendo suas conclusões, como se espera na perspectiva do letramento geométrico. O posicionamento da régua, por exemplo, para reproduzir a primeira fica vertical em relação a si próprio, enquanto a segunda não. Assim, os movimentos vertical e horizontal se tornam bem reais.

2.2 Imaginação

A habilidade que dá título à presente seção já é identificada em crianças bem pequenas que ainda sequer ingressaram nos primeiros anos de escolaridade. Por exemplo, na areia das praias, elas constroem com suas mãos, por conta própria, inúmeras ideias como castelos e outros elementos do seu imaginário criativo. Cabe ao professor, na Educação Infantil, não deixar que isso esmaça, e sim que avance no desenvolvimento de relações topológicas elementares, como preconizado por Piaget e Inhelder (1993).

Por sua vez, a imaginação visual apresenta diferenças entre as pessoas, como indicado por Skemp (1993):

Se é correto que pensemos que imaginação visual é a mais favorável à integração de ideias; e se não é acidental que quando nos tornamos conscientes de como as idéias se relacionam umas a outras, nos referimos à experiência como insight, não como um ouvir interior; então podemos racionalmente estabelecer a hipótese de que as pessoas que têm sobressaído por sua contribuição matemática e científica usaram mais da imaginação visual do que a auditiva. (p. 118)

A esse respeito, observar a Figura 3 leva o geômetra a imaginar conceitos formais geométricos, como o de semirreta, indicados pelas flechas superiores na parte superior da cerca (o ponto origem estaria na linha horizontal ou até mesmo mais abaixo) que surgem no emaranhado dos arbustos. Após tal percepção, torna-se viável ao professor que pretende desenvolver conceitos básicos geométricos, a formalização de tal conceito abstrato do objeto visualizado.

Figura 3

Imaginação visual de semiretas



Fonte: acervo dos pesquisadores

Leivas (2009, p. 20) utiliza imaginação para expressar “uma forma de concepção mental de um conceito matemático, o qual pode vir a ser representado por um símbolo ou esquema visual, algébrico, verbal ou uma combinação dos mesmos, com a finalidade de comunicar para o próprio indivíduo ou para outros tal conceito”.

2.3. Criatividade

No que diz respeito à habilidade de criatividade, de acordo com Torrance (1966), ela admite as seguintes dimensões: flexibilidade, fluência e originalidade, as quais servem para descrever soluções criativas para problemas. Para o autor, fluência é o número de soluções que foram propostas pelo participante; flexibilidade é o número de estratégias que o participante aplica para a solução e originalidade é o número de ideias estatisticamente infrequentes que são produzidas pelos indivíduos. Assim, ao visualizar uma grade/cerca em uma residência, de imediato, o geômetra busca interpretar o que o seu produtor imaginou e como isso pode ser levado ao ensino de Geometria em níveis escolares, por exemplo. Com isso, segundo o autor, há ganhos consideráveis na aprendizagem geométrica/matemática dos alunos.

Considerando, ainda, a Figura 3, a criatividade pode fluir de diversas formas, tais como: a existência de uma única linha em toda a extensão do objeto; muitas outras linhas que a cruzam; uma variedade de setas na parte superior destas últimas, todas de mesmo tamanho, o que poderia caracterizar o que o autor denominou fluidez. Certamente que indivíduos perceberão a existência desses elementos relacionados à Geometria de formas diferenciadas, o que caracterizaria a fluência. Complementarmente, a originalidade estaria em transcrever para a linguagem geométrica as ideias concebidas ou visualizadas. Se isso ocorrer para um certo número de participantes de uma investigação a respeito do tópico em questão, então tal constatação iria ao encontro do que definimos neste trabalho como letramento geométrico. Nessa direção, é retomado o dito por Cifuentes (2005, p. 58) que “visualizar é ser capaz de formular imagens mentais e está no início de todo o processo de abstração”.

3 FUNDAMENTAÇÃO METODOLÓGICA

O presente trabalho consta de uma pesquisa descritiva/analítica envolvendo fotografias retiradas do meio urbano de diversas regiões que envolviam estruturas

construídas por profissionais serralheiros ou similares e que são utilizadas para o isolamento de residências da rua, em geral, as denominadas “grades/cercas”. Nesse sentido, o pesquisador vislumbra formas geométricas nestas construções que podem ser exploradas para o ensino de Geometria. Portanto, essas fotografias constituem os documentos de pesquisa a serem abordados, por meio da análise de seus aspectos visuais, imaginativos e criativos.

Para Loizos (2015), uma imagem, muito embora possa fornecer um registro restrito, torna-se poderosa na medida em que permita uma exploração do pesquisador, por exemplo, utilizando um software como o GeoGebra para confirmar certas percepções imaginativas e explorar a criatividade. A título de exemplificação, pode-se pensar em uma imagem que, inicialmente, seria identificada como um quadrado, mas que, após sua exploração no mencionado software, não se confirmaria como tal, a considerar que as medidas encontradas para os lados não coincidem ou que os ângulos não são todos retos. Nesse sentido, Loizos (2015, p. 138) se questiona sobre o que seria ‘visual’ e responde: “Devido ao fato de muitos de nós usarmos os olhos para ler, há um sentimento trivial, segundo o qual nossa leitura deste texto poderia ser chamada de uso de um método de pesquisa visual”. Assim, apoiar a visualização em argumentos tecnológicos, bem como nos teóricos, permite avançar na pesquisa, uma vez que “a manipulação imagem visual pode ser mais sutil e oculta, mas ela é claramente ideológica”. (p. 140).

Severino (2016) aborda que na pesquisa documental “tem-se como fonte documentos no sentido amplo, ou seja, não só de documentos impressos, mas sobretudo de outros tipos de documentos, tais como jornais, fotos, filmes, gravações, documentos legais” (p. 131, grifo nosso). Podemos assim entender o presente trabalho nessa direção metodológica. Serão consideradas fotos específicas e explorada a visualização geométrica nelas contidas com as devidas argumentações. Caso seja relevante, a mesma será levada ao software GeoGebra e serão discutidas possibilidades criativas de análise prática/teórica.

4 ANÁLISE DOS REGISTROS FOTOGRÁFICOS

A primeira foto a ser explorada trata-se de um portão de acesso a uma residência (Figura 4). A visualização inicial conduz ao que se denomina um feixe de retas paralelas. Para confirmar isso, levamos a figura ao GeoGebra.

Figura 4

Feixe de paralelas



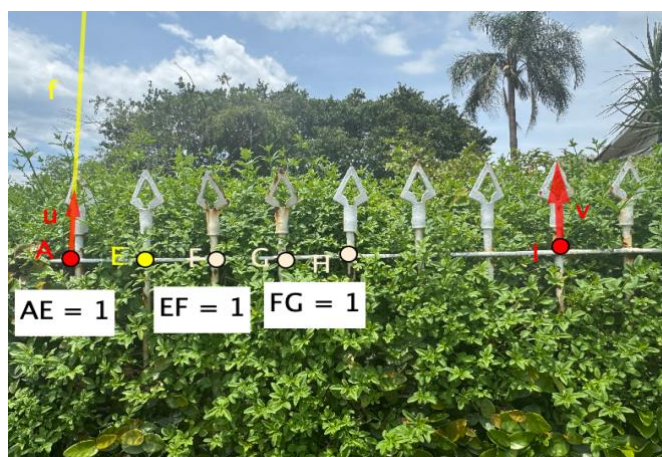
Fonte: acervo dos pesquisadores

Inicialmente, escolhe-se arbitrariamente os pontos A e B sobre uma das linhas e traça-se a reta r em verde. Escolhe-se, em seguida, dois outros pontos C e D, um em cada reta distinta, e pede-se para obter as retas paralelas a r por estes pontos (vermelha e rosa). Obviamente que, ao utilizar a ferramenta 'reta paralela' do software, isso já denota certa indicação da relação de paralelismo. Porém, a criatividade vai além ao comparar as respectivas leis que definem as três retas na janela de Álgebra. Isso pode ser levado ao ensino indutivo de Álgebra Linear e Geometria Analítica. Nessa janela, são apresentadas as equações cartesianas das mesmas e a exploração visual mostra que em todas elas os coeficientes da variável y apresentam o mesmo valor, o que leva à obtenção do coeficiente angular dessas retas (e a respectiva inclinação). Com isso, fica caracterizado o paralelismo entre elas. Algo que pode ser notado é que o fotógrafo não é profissional e, conseqüentemente, a foto não foi exatamente frontal. Uma possibilidade de utilizar esta exploração, por exemplo, com alunos do Ensino Médio, consiste em solicitar que obtenham mais algumas retas além das traçadas r , s e t .

Retomamos a fotografia apresentada em etapa anterior deste trabalho, agora com olhar analítico, sob a óptica da imaginação visual proporcionada pelas ferramentas do GeoGebra, conforme a Figura 5.

Figura 5

Vetores paralelos associados a semirretas



Fonte: acervo dos pesquisadores

Ao observar a cerca construída num cenário ecológico preservado por plantas, ela deveria também servir de segurança para a moradia. Importante destacar que a vegetação cobriu parte da mesma e, dessa forma, foi possível perceber o objeto a partir de uma linha horizontal, o que vai ao encontro do dito por Skemp (1993) sobre a imaginação visual ser favorável à integração de ideias. Ao iniciar cada 'flecha' em pontos A, B, C, ... e apontar no sentido superior, isso leva ao conceito de semirreta ou mesmo de vetor. A semirreta é uma parte da reta que tem um ponto inicial e segue num dos sentidos desta. Por sua vez, um vetor é um elemento geométrico apresentando uma direção, um módulo e um sentido. Nesse caso, a direção é indicada pelo algo comum entre o feixe de paralelas, o sentido corresponde, no caso, ao sentido da semirreta (vertical superior), e o módulo consiste no seu comprimento, aqui igual para todos.

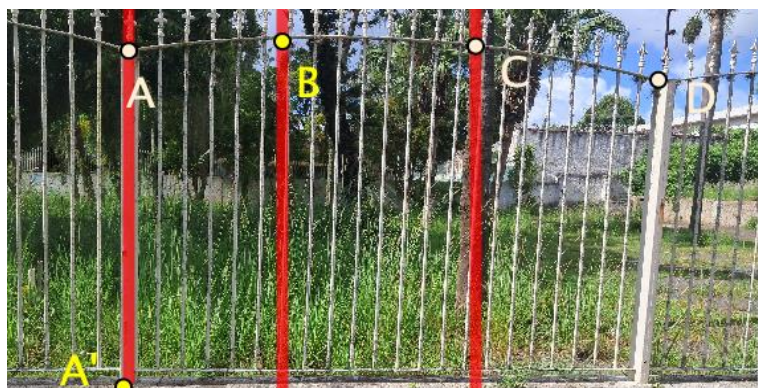
Com a ferramenta 'distância', é possível mostrar que as semirretas ou vetores estão todas distantes 1 unidade da anterior e da posterior. Por sua vez, ao analisar os dois vetores grifados (u e v) em vermelho e analisar a janela de Álgebra, percebe-se que ambos têm os mesmos valores (coordenadas). Em nosso entender, o profissional que construiu a cerca e o proprietário sequer imaginaram o aspecto geométrico, buscando tão somente conferir certa segurança à residência. Portanto, a imaginação do geômetra ao trazer as relações entre um elemento construído pelo homem e útil para sua segurança pode servir de elemento importante para aulas de Geometria, muitas vezes com limitações entre o que se faz na teoria e a vivência dos indivíduos. Com isso, ao que tudo indica, o interesse dos alunos pela área pode ser ampliado e assim desenvolver

pensamento geométrico.

No que segue (Figura 6), isso é reforçado em termos de segurança, uma vez que novamente pode-se apontar um feixe de retas (visualmente paralelas) partindo de um ponto inicial, logo se tratando de semirretas que apontam para cima no sentido das flechas, tendo por origem um ponto de certa curva. Ao escolher os pontos A, B, C e D, constata-se que cada vão da cerca representa uma curva passando por estes, de forma similar a uma catenária. Uma vez que a curva é ancorada pelos pontos extremos A e D, ao contrário do que muitos diriam, não se trata de parábola, mas, reiteramos, de catenária. A catenária é uma curva do segundo grau que tem seus pontos extremos fixos, similarmente ao que ocorre com os fios suspensos entre dois postes no ambiente urbano, ou na brincadeira de pular cordas.

Figura 6

Um feixe de paralelas contendo uma catenária



Fonte: acervo dos pesquisadores

A partir da visualização inicial, torna-se necessário alguma argumentação sobre as afirmações, o que pode ser feito levando a fotografia ao GeoGebra. No software, escolhe-se um ponto inicial A e obtém-se a semirreta passando por ele. Obviamente que ela não é infinita, mas limitada, muito embora haja um significado importante de um pequeno segmento após o sinal da flecham o que corresponde à representação de semirretas. Escolhidos arbitrariamente outros pontos em linhas distintas, utiliza-se a ferramenta 'reta paralela' à primeira, passando por este ponto e, assim consegue-se perceber o formato de paralelas, comprovando-se com as respectivas equações na janela de Álgebra. Considerando-se o sistema cartesiano ortogonal, todas elas são do tipo $x=k$, em que k corresponde a abscissa de cada ponto A, B, C. As discussões a respeito da Figura 6

configuram exemplos potencialmente relevantes para o ensino de Geometria nas práticas pedagógicas, especialmente quando se tratar do ensino de Cálculo ou Geometria Analítica, mostrando ser possível levar a criatividade e a imaginação para a sala de aula.

Na Figura 7 (a e b), imagina-se elementos geométricos servindo de ornamentação e segurança. O profissional poderia simplesmente ligar pontos por certas linhas retas paralelas e perpendiculares. No entanto, se fora uma única forma retangular ou quadrada, essas linhas poderiam ser entortadas, possibilitando ingressos e/ou invasões inoportunas. Assim, ao colocar algum elemento entre as linhas, isso dificulta a deformação, muito embora pudesse ser feito por linhas intermediárias retas. A criatividade de quem solicita o objeto ou de quem o fabrica, muitas vezes, explora elementos da Geometria. Para o professor que se preocupa com um ensino contextualizado dessa área, de modo a despertar o interesse, a imaginação e a criatividade de seus alunos, as análises apresentadas neste artigo podem resultar relevantes, alinhando-se à perspectiva defendida por Piaget e Inhelder (1993).

Percebemos na Figura 7 (a) que as linhas retas verticais ligam um ponto na base e passam por um ponto em uma linha superior, indicando, posteriormente, uma flecha, correspondendo em Geometria a um vetor ou semirreta como já analisado. No entanto, o comprimento vertical entre os dois pontos fixado (A e B), por exemplo, permitiriam facilmente um afastamento entre duas linhas consecutivas. Assim, o construtor fortalece com uma ornamentação que cumpre não apenas com uma função estética, mas também ética. Visualiza-se, uma forma geométrica inicial similar a um S, deixa um espaço de três paralelas e reproduz a mesma figura geométrica. Como isso é feito consecutivamente na mesma direção horizontal pode ser associado ao movimento de translação em Geometria, ou seja, a figura é transladada horizontalmente por um vetor de módulo 3. Por sua vez, se isolar uma dessas imagens, é possível analisar que ela fica bipartida verticalmente pela linha AB, e a parte da direita fica simétrica em relação a da esquerda, caracterizando outro movimento importante na Geometria de Transformações, que é a reflexão (a qual necessita de um eixo de simetria, no caso AB). Em publicação recente, esse último movimento foi explorado em construções de lixeiras, a partir de sua análise no GeoGebra.

Figura 7

Ornamentando cercas e janelas

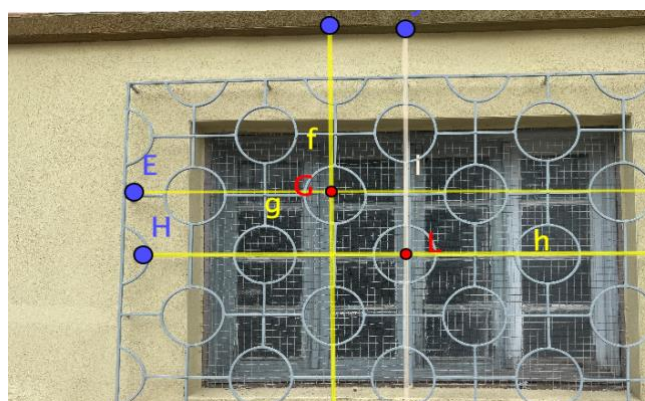


Fonte: acervo dos pesquisadores

Já na Figura 7 (b), observa-se a grade protetora em uma janela. Nela, percebe-se uma forma retangular constituída por linhas horizontais e verticais (segmentos de retas). No encontro dessas linhas, numa mesma horizontal, pontos alternados servem de centro de circunferências de mesmo raio. Na linha seguinte, os centros das circunferências ficam em verticais alternadas em relação à linha anterior. Levando a figura ao GeoGebra, é possível confirmar o paralelismo, o perpendicularismo e a congruência das circunferências, por exemplo. Na Figura 8, levamos a foto ao GeoGebra e construímos dois segmentos de reta f e i verticais e consecutivos e dois horizontais g e h , também consecutivos. Obtivemos as intersecções G e H , que são centros de duas dessas circunferências, para identificar duas das circunferências consecutivas e em paralelas e verticais sequenciais.

Figura 8

Grade com ornamentos circulares

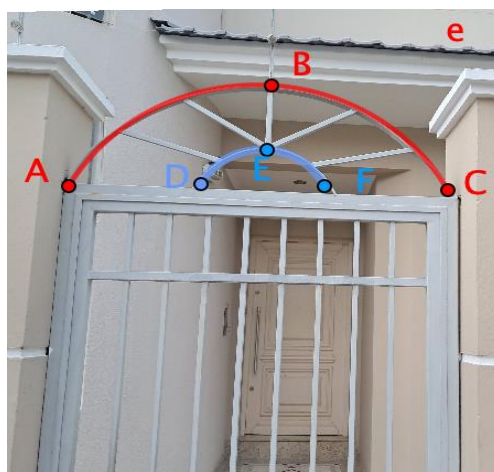


Fonte: acervo dos pesquisadores

Vamos a uma nova grade ornamentada com Geometria. Na Figura 9, visualizamos a criatividade ornamental num portão de acesso a uma residência. Usualmente, tais grades são em formato mais retilíneos, com pequenas conexões para evitar invasões e garantir a segurança. Aqui, focamos na parte superior, a qual é fixada e não acompanha o movimento de abrir e fechar. O GeoGebra, novamente, vem em nosso auxílio para analisar os aspectos geométricos, a saber, duas semicircunferências concêntricas.

Figura 9

Grade com ornamentos circulares concêntricos



Fonte: acervo dos pesquisadores

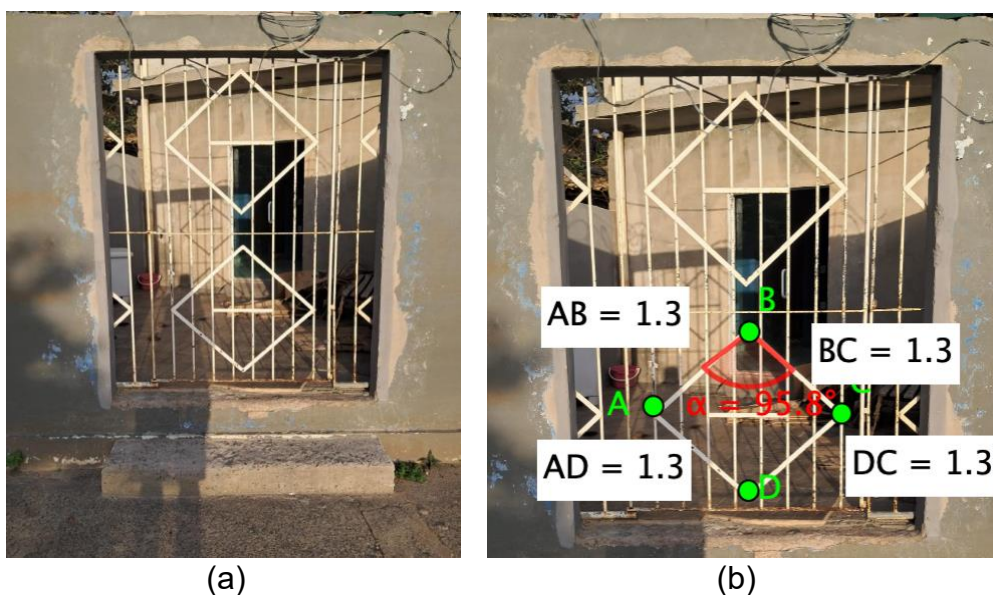
Levamos a fotografia ao software, demarcamos em uma linha horizontal dois pontos extremos (A e C) que passam pela imagem superior circular e escolhemos um terceiro ponto B sobre essa curva. Experimentamos utilizar a ferramenta ‘circunferência’ por três pontos e confirmamos ser esta figura geométrica contendo a linha curva da grade, porém, seu centro ficava bem distante. Então, utilizamos a ferramenta ‘arco circular’, o que se identifica pelos seus pontos extremos A e C e pelo ponto B (em vermelho).

De forma análoga, fizemos para obter o arco semicircular DEL em azul, o qual está contido em uma circunferência de mesmo centro da anterior, somente menor do que o daquela. Assim, é possível explorar o conceito de circunferências e de arcos concêntricos.

Não é raro encontrar pessoas que confundem quadrados com losangos. Novamente, vamos fazer uso do GeoGebra e da fotografia capturada pelos autores em uma das tantas grades e cercas coletadas para explorar o conceito que distingue um losango que não é um quadrado (Figura 10).

Figura 10

Exploração em quadrilátero



Fonte: acervo dos pesquisadores

Consideramos a foto capturada em 10 (a), pois foram visualizadas, de imediato, duas formas de quadriláteros, quebrando a verticalidade das linhas retas a fim de dar maior rigidez (embora o triângulo seja a figura que dá rigidez, aqui cada quadrilátero é formado por triângulos). Observa-se, ainda, os sinais de maior à esquerda e o de menor à direita, como se fossem indicativos para observar o quadrilátero. Este se assemelha muito a um quadrado, ainda que quando o quadrado (um tipo particular de losango) não se encontra com dois lados paralelos à vista frontal e dois verticais é frequente não mais o denominarem quadrado.

Na Figura 10 (b), entrou em ação novamente o GeoGebra com suas ferramentas, especialmente a de medir segmentos e ângulos. Denotamos por A, B, C e D (em verde) os quatro vértices do quadrilátero e na sequência os segmentos AB, BC, CD e DA (em vermelho) correspondendo aos lados do mesmo. Utilizamos a ferramenta para medir distâncias e verificar que as quatro correspondem a um mesmo valor. No entanto, isso não basta para afirmar que é um quadrado, embora a visualização possa deixar antever isso e que os lados são paralelos e perpendiculares dois a dois, o que pode ser também verificado no GeoGebra. Porém, para não delongar muito e a figura não ficar muito ‘engessada’, optamos por obter um dos ângulos formados por dois lados consecutivos (AB e BC) e constatamos que o mesmo não corresponde a 90° (ângulo entre perpendiculares). Esse é o diferencial que caracteriza um losango que não é quadrado.

Naturalmente, isso pode levar o estudante a compreender que um quadrado é um tipo de losango que apresenta lados congruentes e ângulos retos, o que nem sempre é bem compreendido pelos estudantes até de níveis mais elevados.

Na Figura 11, a seguir, a visualização vai na direção de circunferências tangentes em um portão residencial.

Figura 11

Circunferências tangentes



Fonte: acervo dos pesquisadores

Ao levar a fotografia ao GeoGebra, escolhe-se em uma vertical dois pontos A e B, obtendo-se a reta que os contém (na janela de Álgebra aparece sua equação $f: 3.7x + 0.1y = 10.3$). Em seguida, escolhe-se um ponto C na primeira linha vertical à esquerda e um D na segunda. Utiliza-se a ferramenta 'reta paralela' e clica-se em C e na reta inicial, obtendo-se $h: 3.7x + 0.1y = 8.4$. Após, clica-se em D e na reta inicial, encontrando-se $g: 3.7x + 0.1y = 6.5$. Logo, percebe-se que entre duas linhas consecutivas aparece uma circunferência que toca cada uma delas em um único ponto (E e F em vermelho), o que caracteriza a tangência entre reta e circunferência. Essa imagem pode ser útil também para explorar o paralelismo de reta (ou segmentos de retas, mais precisamente, uma vez que são limitadas nos dois sentidos). Analisando a janela de Álgebra, verifica-se que as ordenadas dos pontos de tangência apresentam o mesmo valor, significando que se encontram à mesma altura do chão, enquanto que a diferença entre as abscissas fornece o diâmetro de cada circunferência: $E = (1.7; 3.4)$ e $F = (2.2, 3.4)$, $d = 2.2 - 1.7 = 0.5$. As equações obtidas para as retas possibilitam identificar os coeficientes angulares, ou seja, comprovar o paralelismo, pois são iguais.

5 CONSIDERAÇÕES E IMPLICAÇÕES

Neste artigo, tratamos de uma pesquisa descritiva/analítica, na qual foram capturadas fotos em diversas ocasiões e localidades pelos próprios autores, na expectativa de analisar os aspectos geométricos presentes em cercas de residências e grades de janelas, com base na percepção visual dos observadores. A investigação busca, assim, proporcionar ao professor de Matemática/Geometria opções para um ensino contextualizado. Às vezes, o professor procura lançar mão de algo real ao seu redor e encontra dificuldades para associar elementos de Geometria formal a objetos que podem ser percebidos.

Na medida em que os observadores visualizam algo diferenciado em cercas/grades, a sua imaginação logo os leva a uma concepção mental dessa visualização, e sua imaginação os conduz a alguma forma, elemento ou relação com entes geométricos. Sua criatividade os leva a considerar uma foto do objeto e uma forma de comprovação que ele pode, de fato, estar representando coisas geométricas. Logo, consideram o software GeoGebra, que lhes permite comprovar sua imaginação.

Por exemplo, como comprovar que as linhas formadas na Figuras 2 são associadas a retas ou segmentos de retas verticais e horizontais, bem como a feixes desses elementos geométricos pelo fato do paralelismo entre eles. Em outras, isso pode ser feito utilizando a ferramenta 'distância' no GeoGebra e comprovando manterem a mesma distância entre ambas(os), como ocorreu na análise constante da Figura 5, ao associar criativamente a noção e conceituação de vetores, muitas vezes ensinados meramente por uma definição formal em que os estudantes sequer chegam a distinguir os conceitos de direção e sentido.

Visualizando-se as Figura 7 e 8, logo a imaginação pode conduzir a pelo menos dois movimentos aqui descritos, ou seja, às transformações rígidas no plano (reflexão e translação), além de outras que estudantes criativos e visuais podem detectar quando lhes é oportunizado um ensino geométrico para além de definições e aplicações de fórmulas, inclusive na formação de professores. Imaginar o conjunto dos quadrados como sendo um subconjunto do dos losangos, em geral, oferece dificuldades aos estudantes, pois lhes é mostrado um quadrado com dois lados sempre na horizontal e, quando este é apresentado por meio de uma rotação qualquer menor do que 90° , imediatamente dizem tratar-se de um losango.

Questões relacionadas à tangência de circunferências, por exemplo, também oferecem alguma dificuldade de representação real/concreta. A Figura 11 ilustra uma possibilidade de obtenção de circunferências tangentes a um feixe de paralelas que servem para oferecer certa rigidez ao feixe. A análise da mesma no GeoGebra conduziu à comprovação do paralelismo do feixe por meio das equações das retas, o que proporciona nova possibilidade de visualizar tal conceito na Geometria Analítica, explorando as equações dessas retas. A partir disso, pode-se repassá-las para suas equações reduzidas e, assim, verificar diretamente que seus coeficientes angulares são idênticos, ao constatar-se a mesma inclinação para todas, enquanto os lineares caracterizam o deslocamento de uma para outras.

Finalizamos estas considerações finais com a retomada da Figura 9 e sua correlação com um conceito importante em Geometria, que é o posicionamento de arcos de circunferências que possuem o mesmo centro. A obtenção no software desses arcos pelo GeoGebra estimula a obtenção de tais arcos por três pontos, já que os externos do maior indicam tratar-se do diâmetro e, conseqüentemente, o centro do menor se encontra nesse mesmo segmento. O segmento unindo um ponto da curva maior até o diâmetro permite identificar o centro do menor.

Concluimos o artigo acreditando que o mesmo pode ser elemento norteador para o ensino e a aprendizagem de Geometria em diversos níveis de escolaridade e, principalmente, na formação de professores de Matemática, de modo que possam utilizar tais recursos metodológicos, por assim dizer, para tentar amenizar o fracasso da Geometria na aprendizagem dos estudantes. Pensamos que explorar o pensamento geométrico desses estudantes por meio de visualização, imaginação e criatividade com auxílio do GeoGebra em que os alunos precisam registrar seus pensamentos, considerações e conclusões sejam elementos detectores do que chamamos letramento geométrico, isto é, um processo de associar a elementos concretos existentes no mundo real definições e representações geométricas formais.

REFERÊNCIAS

- Arcavi, A. (1999). The role of visual representation in the learning of mathematics. In Proceedings of the North American Chapter of the PME. <http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/26.pdf>
- Bicudo, I. (2009). *Os elementos/Euclides*. São Paulo, SP: Editora UNESP.

- Cifuentes, J. C. (2005). Uma via estética de acesso ao conhecimento matemático. *Boletim GEPEM*, (46), 55-72.
- Costa, C. (2002). Visualização, veículo para a educação em geometria. In: M. Saraiva, I. Coelho, & J. Matos (Orgs.), *Ensino e aprendizagem de geometria* (pp. 157–184). Lisboa, Portugal: Editora Vozes.
- Danyluk, O. S. (1989). *Alfabetização Matemática*. Passo Fundo, RS: Ed. da UPF.
- Leivas, J. C. P. (2009). *Imaginação, intuição e visualização: A riqueza de possibilidades da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura em Matemática* (Tese de doutorado, Universidade Federal do Paraná). Curitiba, PR.
- Mariotti, M. A. (1995). Visualization in teaching-learning situations. *Proceedings of the International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (4), pp. 65-72).
- Pavanello, R. M. (1993). O abandono da geometria no Brasil: causas e consequências. *Revista Zetetiké*, 1(1), pp 7-17.
- Piaget, J., & Inhelder, B. (1993). *A representação do espaço na criança*. Porto Alegre, RS: Artes Médicas.
- Pires, J. de F., & Pereira, A. T. C. (2020). Entre las curvas de la arquitectura contemporánea y la enseñanza de la geometría en arquitectura: un enfoque didáctico del diseño paramétrico. *Revista de Ciencia y Tecnología*, 33(1), 63-75.
- Presmeg, N. C. (1986). Visualization and mathematical giftedness. *Educational Studies in Mathematics*, 17(3), 297-311.
- NCTM. (2008). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa, PT: APM.
- Severino, A. J. (2016). *Metodologia do trabalho científico*. São Paulo, SP: Cortez.
- Skemp, R. R. (1993). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid, Espanha: Ediciones Morata.
- Torrance, E. P. (1966). *Torrance tests of creative thinking—norms technical manual research edition—verbal tests, forms A and B—figural tests, forms A and B*. Princeton, NJ: Personnel Pres. Inc.
- Zimmermann, W., & Cunningham, S. (1991). *Visualization in teaching and learning mathematics: A project sponsored by the Committee on Computers in Mathematics Education of The Mathematical Association of America*. Washington, DC: Mathematical Association of America.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA

(Re)descobrimdo o mundo sob o olhar de um geômetra: visualização de grades e cercas urbanas

José Carlos Pinto Leivas

Doutor

Universidade Franciscana, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Santa Maria, Brasil
leivasjc@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0001-6876-1461>

André Firpo Beviláqua

Doutor

Universidade Federal de Santa Maria, Departamento de Letras Estrangeiras Modernas, Santa Maria, Brasil
andre.firpo@gmail.com

<https://orcid.org/0000-0002-4512-4256>

ENDEREÇO DE CORRESPONDÊNCIA DO PRINCIPAL AUTOR

Rua Major Ernesto Witrock, 141, Apto. 202, CEP 92310-280, Canoas, RS, Brasil.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA

Concepção e elaboração do manuscrito: J. C. Pinto Leivas, A. Firpo Beviláqua

Coleta de dados: J. C. Pinto Leivas, A. Firpo Beviláqua

Análise de dados: J. C. Pinto Leivas

Discussão dos resultados: J. C. Pinto Leivas

Revisão e aprovação: J. C. Pinto Leivas, A. Firpo Beviláqua

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA

Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO

Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM

Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA

Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES

Não se aplica.

LICENÇA DE USO – uso exclusivo da revista. Os autores cedem à **Revemat** os direitos exclusivos de primeira publicação, com o trabalho simultaneamente licenciado sob a [Licença Creative Commons Attribution](#) (CC BY) 4.0 International. Esta licença permite que **terceiros** remixem, adaptem e criem a partir do trabalho publicado, atribuindo o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico. Os **autores** têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicada neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista. Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no [Portal de Periódicos UFSC](#). As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EQUIPE EDITORIAL – uso exclusivo da revista

Méricles Thadeu Moretti

Rosilene Beatriz Machado

Débora Regina Wagner

Karina Zolia Jacomelli Alves

Eduardo Sabel

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista

Recebido em: 08-06-2025 – Aprovado em: 19-03-2026

