REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

UM MODELO TEÓRICO DA MATEMÁTICA PARA O ENSINO DO CONCEITO DE DERIVADA

A Theoretical Model Of Mathematics For Teaching The Concept Of Derivative

Josenilson Lopes LOLA
Instituto Federal de Educação, Petrolina, Brasil
josenilsonlola@ifsertao-pe.edu.br
https://orcid.org/0009-0007-2970-035X

Jonei Cerqueira BARBOSA
Universidade Federal da Bahia, Salvador, Brasil
jonei.cerqueira@ufba.br
https://orcid.org/0000-0002-4072-6442

RESUMO

O presente estudo teve por objetivo construir um Modelo Teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Derivada. Essa estrutura organiza as formas de comunicar o conceito de derivada no contexto de ensino. Para garantir maior heterogeneidade, foram empregados dados secundários registrados em artigos publicados em periódicos da área de Educação Matemática. A estrutura proposta foi organizada nos seguintes panoramas: Definição formal, Gráfico, Reta tangente a uma curva, Função derivada, Regras de derivação e Aplicações das derivadas. Essa organização sistematiza uma discussão teórica sobre as *realizações* desse conceito, destacando suas relações de convergência e implicações em outros conceitos matemáticos. O modelo pode contribuir como referencial analítico para novas pesquisas e como subsídio à prática pedagógica de professores e futuros professores.

Palavras-chave: Discurso, Derivada, Matemática para o Ensino, Modelo Teórico

ABSTRACT

The present study aimed to construct a Theoretical Model of Mathematics for Teaching the Concept of Derivative. This structure organizes the ways in which the concept of derivative is communicated in teaching contexts. To ensure greater heterogeneity, secondary data reported in articles published in Mathematics Education journals were used. The proposed structure was organized into the following perspectives: Formal Definition, Graph, Tangent Line to a Curve, Derivative Function, Differentiation Rules, and Applications of Derivatives. This organization systematizes a theoretical discussion of the *realizations* of this concept, highlighting their convergent relationships and implications for other mathematical concepts. The model may serve as an analytical framework for further research and as a resource for the pedagogical practice of both practicing and prospective teachers.

Keywords: Discourse, Derivative, Mathematics for Teaching, Theoretical Model

1 INTRODUÇÃO

Pesquisas em Educação Matemática voltadas ao ensino da derivada têm como objetivo problematizar as diferentes formas pelas quais os professores comunicam este

conteúdo, utilizando diferentes abordagens teóricas. A exemplo, destacamos a análise da interpretação geométrica das derivadas por Zeguin (2018); a abordagem discursiva do livro didático, examinada por Park (2015); a perspectiva da Modelagem Matemática, investigada por Silva (2020); e o ensino baseado em problemas, abordado por Souza e Fonseca (2017).

Os estudos mencionados anteriormente nos fornecem uma visão mais abrangente sobre as diversas abordagens e estratégias empregadas na comunicação da derivada de uma função no contexto educacional. Ao examinarmos essas pesquisas, podemos compreender mais profundamente não apenas as técnicas e métodos utilizados pelos educadores na comunicação, mas também as diferentes percepções, interpretações e desafios que emergem no processo de ensino da derivada.

Davis e Renert (2014) destacam que, ao examinarmos as práticas pedagógicas adotadas pelos professores, podemos identificar uma matemática específica que permeia a ação docente no processo de ensino. Essa matemática, direcionada à prática docente, possibilita ao professor estruturar situações de aprendizagem e ampliar as possibilidades interpretativas dos alunos por meio do estabelecimento de conexões e de práticas adequadas. Essa matemática específica da ação docente pode ser compreendida como Matemática para o Ensino (MpE) (Davis; Renert, 2014, tradução nossa).

A MpE pode ser explorada por meio do desdobramento de entendimentos coletivos sobre determinados conceitos matemáticos, decorrente da participação ativa do professor em situações comunicacionais, tais como atividades de ensino, análise de livros didáticos, pesquisas em Educação Matemática e programas de formação continuada de professores. Nessa perspectiva, a MpE é a matemática específica da ação do professor, ou mobilizada na sua tarefa de e como ensinar (Davis; Renert, 2014).

Nesse estudo, conceituamos a MpE como um modelo teórico que visa categorizar e analisar a diversidade de *realizações* pelas quais um conceito matemático pode ser comunicado. Um modelo teórico representa uma estrutura teórica que organiza, em categorias, as formas de ocorrências da matemática comunicada pelos professores em suas atividades relacionadas ao ensino (Santos & Barbosa, 2019). Assim, a construção de um modelo dessa natureza possibilita sistematizar diferentes *realizações* de um conceito matemático e evidenciar as relações estabelecidas entre elas no contexto de ensino.

Para compreender como essas *realizações* se constituem e podem ser organizadas, faz-se necessário explicitar o entendimento de conceito adotado neste estudo. Entendemos que o termo conceito representa todas as possíveis *realizações* que estejam ou possam estar associadas a uma palavra específica. Numa perspectiva discursiva, tais *realizações*

correspondem às diversas formas de comunicar tal conceito, que incluem a fala, a escrita, símbolos, ícones, objetos concretos e gestos (Sfard, 2008). Dessa forma, compreendemos que o conceito de derivada abarca todas as *realizações* que guardam relação com a palavra derivada, tais como reta tangente, inclinação, função, variação, razão, entre outros.

Diante do exposto, este estudo teve por objetivo estruturar e sistematizar as diferentes maneiras de comunicar o conceito de derivada na perspectiva de constituir um modelo teórico de Matemática para o Ensino que organize essas formas de ocorrências.

2 A COMUNICAÇÃO DO CONCEITO DE DERIVADA

Na Educação Matemática, diferentes lentes teóricas têm permeado pesquisas que visam discutir o ensino, na perspectiva de problematizar o discurso mobilizado pelo professor para comunicar um conteúdo em suas atividades de ensino (Rhoads & Weber, 2016). Inspirados nestas reflexões, pesquisadores apontam que há uma particularidade na ação do professor ao comunicar um conceito matemático, tornando-o único e diferenciado dos demais profissionais que fazem uso da matemática nas mais diversas atividades não relacionadas ao ensino, como, por exemplo, engenheiros e matemáticos (Ball, Thames & Phelps, 2008).

Esta especificidade presente na maneira como os professores estruturam suas tarefas de e como ensinar tem como uma das denominações Matemática para o Ensino (tradução livre de Mathematics for Teaching) (Davis & Renert, 2014). A Matemática para o Ensino (MpE) é dinâmica, emergente e configura-se nos conhecimentos matemáticos mobilizados pelo professor em sua atividade de ensino. Depende da experiência e do envolvimento dos participantes, sendo produzida no compartilhamento de suas ações recíprocas (Davis & Renert, 2014).

Neste estudo apropriamo-nos da Matemática para o Ensino buscando estruturar e sistematizar as diferentes *realizações* que emergem dos diversos modos de comunicar o conceito de derivada com o objetivo de construir um modelo teórico.

Nessa perspectiva de problematizar a comunicação desse conceito, pesquisadores em Educação Matemática, no cenário nacional (Rachelli & Bisognin, 2020), e internacional (Borji & Martínez-Planell, 2020), vêm estudando o processo de comunicação em aulas de matemática. Alguns destes estudos são motivados pelo alto índice de reprovação e

destacam que os estudantes apresentam dificuldades na análise e interpretação gráfica e na compreensão de definições conceituais (Souza & Fonseca, 2017).

Os estudos supracitados apresentam diferentes *realizações* para o conceito em questão, cuja comunicação ocorre por meio da interpretação gráfica (Lopes & Santos, 2016), representação numérica e tabelar (Viseu, 2017), definições e teoremas (Park, 2015), uso de regras para resolução de problemas (Müller, Cury & Lima (2015), aplicações das derivadas na física (Ingar, 2019; Nasser, Sousa & Torraca, 2017).

Nessas pesquisas, identificamos diferentes formas de comunicação empregadas para abordar a derivada de uma função. Essas formas estão relacionadas a determinadas modalidades de comunicação caracterizadas pelos elementos que mobilizam, as palavras-chave empregadas e as normas seguidas pelos integrantes da comunidade discursiva, como apontado por Sfard (2008). A autora argumenta que é possível identificar uma ampla variedade de repertórios comunicacionais, que consistem em diferentes tipos de discursos. Nesse contexto, o discurso é entendido como uma forma bem definida de comunicação, que abrange qualquer interação comunicativa dentro de um determinado contexto social (Sfard, 2008).

Nesta perspectiva teórica, a matemática é compreendida como uma forma bem definida de comunicação, especialmente como um tipo de discurso. A comunicação é caracterizada como uma atividade coletiva e padronizada dos discursos, e acontece nas interações e negociações entre os indivíduos que se comunicam. Nesse processo, compreender conceitos matemáticos implica modificar e ampliar o próprio discurso (Sfard, 2008).

Nesta direção, Sfard (2008) pontua que o discurso matemático ocorre por meio do uso de *palavras* para nomear quantidades e formas; *mediadores visuais*, que são recursos utilizados no processo de comunicação em forma escrita; *narrativas endossadas* que são proposições validadas pelos participantes do discurso, como definições, axiomas e teoremas, e na realização de *rotinas* que são os padrões sistemáticos que se repetem em um discurso, ou seja, são ações ordenadas pelos participantes do discurso para estruturar tarefas, conjecturar, calcular e realizar demonstrações (Sfard, 2008).

As *realizações* de um conceito são reguladas pelas *regras* ao *nível do objeto* e pelas *metarregras*. *Regras ao nível do objeto* são definidas como “narrativas sobre regularidades no comportamento dos objetos do discurso” (Sfard, 2008, p. 201, tradução nossa) e estão diretamente relacionadas às propriedades dos objetos matemáticos. Como exemplo,

destacamos as regras de derivação, que serão descritas como um dos panoramas desse estudo.

As *metarregras* são ações discursivas que “definem padrões na atividade dos discursantes ao tentar produzir e substancializar narrativas no nível do objeto” (Sfard, 2008, p. 201, tradução nossa). Elas são fundamentais para entender como o discurso matemático é desenvolvido e aplicado. Em geral, essas regras estão implícitas no discurso matemático e tornam-se evidentes quando fazemos julgamentos, como determinar se uma descrição específica pode ser considerada uma definição matemática adequada ou se uma demonstração pode ser aceita como correta.

Diante do exposto, este estudo tem por objetivo estruturar e sistematizar as diferentes formas de comunicar o conceito de derivada, identificadas nos artigos científicos que compõem o *corpus*, na perspectiva de construir um Modelo Teórico de Matemática para o Ensino. Os resultados deste estudo foram agrupados em categorias que descrevem as *realizações,* de forma estruturada, destacando suas relações de convergência e implicações em outros conceitos matemáticos.

3 PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Para alcançar nosso objetivo, optamos por uma abordagem qualitativa (Creswell, 2012). Essa escolha metodológica possibilitou explorar, de maneira aprofundada, as múltiplas *realizações* identificadas no material analisado, buscamos compreender não apenas os resultados, mas também os processos envolvidos em sua construção.

Buscamos identificar *realizações* que apresentam, em diferentes contextos, a comunicação do conceito de derivada, e tendo em vista a garantia de uma maior heterogeneidade dessas *realizações,* tivemos a predileção por dados secundários[1] registrados em artigos científicos[2].

Para compor o *corpus* da pesquisa, realizamos uma busca na Plataforma Sucupira e selecionamos periódicos com escopo exclusivo em Educação Matemática que foram classificados (quadriênio 2013 – 2016) pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), com *Qualis*[3] entre A1 e B2 nas áreas de Ensino e/ou Educação.

[1] Os dados de pesquisa secundários são aqueles que já foram coletados, tabulados, ordenados e analisados, com outros objetivos que não os da pesquisa em questão (Oliveira, 2007).
[2] São fontes para auxiliar no desenvolvimento e divulgação do conhecimento.
[3] Disponível em: http://qualis.capes.gov.br/

Na busca pelas *realizações*, pesquisamos publicações por meio da palavra derivada ou Cálculo Diferencial, nos idiomas português, inglês e espanhol. Como critério inicial, consideramos as publicações compreendidas no período de 2011 a 2021, por entendermos que esse recorte temporal possibilitaria alcançar uma diversidade de *realizações*.

Como critérios de inclusão, foram considerados artigos publicados nos periódicos previamente selecionados, dentro do recorte temporal estabelecido, nos idiomas definidos para a busca e que abordassem o conceito de derivada no contexto do ensino. Como critérios de exclusão, foram desconsiderados os trabalhos que não apresentavam relação direta com o objeto de investigação, que abordavam a derivada sem relação com situações de ensino ou cujas *realizações* identificadas já estivessem contempladas nos artigos anteriormente selecionados, sem acrescentar novas formas de comunicar o conceito de derivada.

Em seguida, a seleção dos artigos foi feita com base na análise dos títulos, resumos e palavras-chave tendo em foco o nosso objeto de investigação. Na sequência, quando necessário, procedemos a leitura completa dos artigos e agrupamos, em categorias, as diferentes formas de comunicar o conceito de derivada. Ao final desse processo, foram selecionadas vinte e duas publicações para compor o *corpus* da pesquisa.

Como estratégia metodológica para a produção e análise dos dados e para a estruturação de um Modelo Teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Derivada, utilizamos as ideias do Estudo do Conceito (EC), proposto por Davis e Renert (2014), em articulação com a abordagem discursiva de Sfard (2008).

O EC constitui uma estratégia de investigação colaborativa voltada à identificação e à ampliação de entendimentos acerca de determinado conceito matemático, tomando como foco a diversidade de interpretações, representações, relações e formas de comunicá-lo que podem emergir em contextos relacionados ao ensino. Nessa perspectiva, o conceito não é compreendido de forma isolada ou restrita a uma única definição, mas a partir de uma rede de significados e relações que pode ser mobilizada na atividade docente.

A abordagem discursiva de Sfard (2008), por sua vez, oferece elementos para compreender essas *realizações* como formas de comunicação do conceito matemático. A articulação entre essas perspectivas possibilitou analisar a diversidade de modos de comunicar o conceito de derivada e estabelecer relações entre eles, subsidiando a estruturação do modelo teórico proposto.

Com base em Sfard (2008), compreendemos que um conceito é constituído de todas as *realizações* que estão ou podem estar associadas a uma palavra e, tais *realizações*

correspondem aos diferentes repertórios mobilizados para comunicar tal conceito, incluindo fala, escrita, símbolos, ícones, objetos concretos e gestos. Partindo desse princípio, as *realizações* do conceito de derivada identificadas nos documentos foram agrupadas, por critério de semelhança, em seis panoramas: Definição formal, Gráfico, Reta tangente a uma Curva, Função derivada, Regras de derivação e Aplicações das derivadas.

4 PANORAMAS DO CONCEITO DE DERIVADA

4.1 Definição Formal

As *realizações* desse panorama têm por propósito descrever a derivada por intermédio do cálculo de limites. Elas são comunicadas por meio de palavras faladas ou textos e caracterizam-se como definições que apresentam uma generalização conceitual e as configuram como *narrativas endossadas* (Sfard, 2008). Como exemplo, destacamos as que descrevem que a derivada de uma função representa a medida da taxa de variação instantânea dessa função em relação à sua variável independente (Park, 2015; Souza & Fonseca, 2017).

Park (2015), destaca que “em livros de cálculo, a derivada é tipicamente definida com um símbolo, por exemplo, $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, consistindo de quatro componentes – função, quociente de diferenças (QD), limite e derivada [...]”, onde o limite com h tendendo a zero, quando existir, é numericamente igual à função derivada (Zeguin, 2018).

O cálculo da derivada por meio de limites apresenta aplicações na resolução de problemas matemáticos aplicados à física e no desenvolvimento de conceitos e propriedades. Destacam-se, ainda, implicações no Teorema do Valor Médio para funções deriváveis e na obtenção da primeira expressão para o resto da fórmula de Taylor, que é conhecido como expressão de Lagrange do resto (Pino–Fan, Godino & Moll, 2011).

Nesse panorama, também inserimos *realizações* que estabelecem vínculos entre a definição formal e os mediadores visuais. Viseu (2017) descreve que professores utilizam vários mediadores visuais (tabelar, gráfica, computacional, algébrica, numérica) para que alunos consigam verificar conexões entre diferentes formas de comunicação do conceito de derivada. Para Sfard (2008), os mediadores visuais são recursos utilizados para comunicar ações do discurso matemático em forma escrita, usando caracteres numéricos

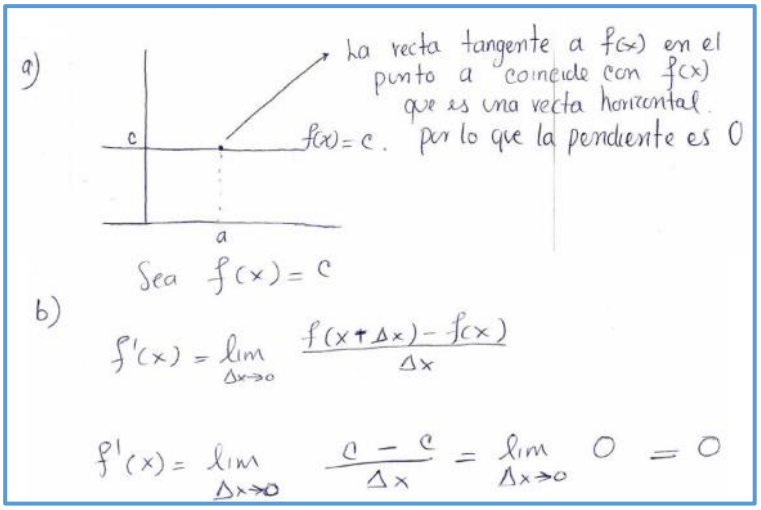
(2 ,7, 0, - 6, etc.), símbolos literais (2x, a – b, y^2, etc), operadores aritméticos (+,÷, √, ≤, ≠, =), gráficos, etc.

Com o propósito de desenvolver narrativas sobre definição formal, Pino–Fan, Godino e Font (2015) comunicam essas *realizações* associadas a mediadores visuais (tabelar, gráfica, computacional, algébrica, numérica). Nesse processo, os alunos são convidados a participar de tarefas que os instigam a estabelecer conexões entre diferentes maneiras de comunicar este conceito. O uso de mediadores visuais na comunicação de um conceito, pode contribuir para inserção de discursantes, menos experientes, na comunidade discursiva (Sfard, 2008).

As *realizações* que apresentam a derivada de uma função real em um ponto específico do seu domínio também foram inseridas nesse panorama. A derivada de uma função f em um número "a", denotada por $f'(a)$, é definida por $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ *(Park, 2015).* Essa derivada pode ser mediada por notações simbólicas envolvendo letras ou números, por exemplo $f'(a)$, como descrito anteriormente, para um ponto genérico "a" ou em pontos específicos: $f'(0)$, $f'(1)$, $f'(2)$ pertencentes a um intervalo aberto no qual a função é definida (Park, 2015). Como ilustração, trazemos um exemplo do cálculo da derivada para uma função constante.[4]

Figura 1

Derivada da função constante



Fonte: Pino–Fan, Godino e Font (2015)

[4] Uma função constante é uma função matemática em que o valor da variável dependente é o mesmo para todos os valores da variável independente. Por exemplo: f(x) = 2 (Gonçalves, 2009).

Geometricamente, o gráfico da função constante é ilustrado por meio de uma linha horizontal, paralela ao eixo das abscissas. Como a função não apresenta variação em relação à sua variável independente, sua taxa de variação instantânea é nula e, consequentemente, sua derivada é igual a zero. Assim, em todos os pontos de seu domínio, a derivada indica a ausência de variação nos valores da função (Pino-Fan, Godino & Font, 2015; Park, 2015).

Diante do exposto, salientamos que a compreensão da definição formal constitui uma etapa importante no estudo do conceito de derivada, pois possibilita ao aluno reconhecer e estabelecer relações entre elementos fundamentais à compreensão desse conceito no contexto matemático em que é mobilizado.

4.2 Gráfico

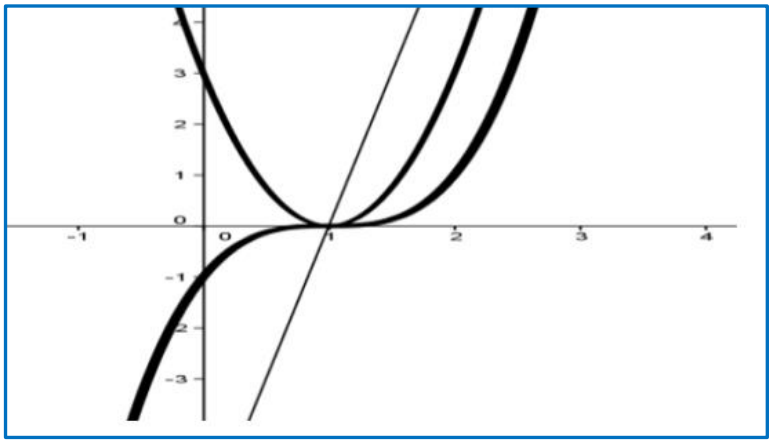
O panorama Gráfico é constituído por *realizações* que mobilizam mediadores visuais para comunicar relações entre as variáveis independente e dependente, bem como para evidenciar padrões e relações entre uma função e sua derivada. Por meio da representação gráfica, é possível identificar, entre outros elementos, os zeros de uma função, correspondentes aos valores da variável independente para os quais a função assume valor igual a zero. Esses elementos desempenham papel importante na análise das propriedades das funções e em suas aplicações (Borji & Martínez-Planell, 2020; Zeguin, 2018).

Analisando o gráfico de uma função, é possível identificar características como os valores da função em diferentes pontos, a existência de pontos críticos, como máximos e mínimos, os intervalos em que ela é crescente ou decrescente, entre outros aspectos relevantes para a sua compreensão (Bisognim & Bisognim, 2011; Park, 2015).

Como exemplo, trazemos uma tarefa apresentada por Bisognim e Bisognim (2011) em uma pesquisa realizada com alunos de um curso universitário. A questão foi proposta com o objetivo de instigar os estudantes a identificar e estabelecer as relações existentes entre o gráfico de três funções, conforme apresentado na Figura 2.

Figura 2

Gráfico da função F e das derivadas de primeira e segunda ordem



Fonte: Bisognin e Bisognin (2011)

Foram apresentados os gráficos das funções e solicitava-se ao aluno que identificasse o gráfico da função F, da função derivada primeira de F e da função derivada segunda de F. Essas informações gráficas são essenciais para compreender o comportamento global da função e como ela se relaciona com a sua derivada (Panero, 2016; Vranken & Engler, 2014).

Algumas tarefas que apresentam essas *realizações* foram construídas com o auxílio de softwares livres, como o GeoGebra[5]. A utilização desse recurso em sala de aula possibilita visualizar, de forma dinâmica, as relações existentes entre a função e sua reta tangente. A perspectiva dinâmica proporcionada pelo software também possibilita explorar aspectos algébricos e geométricos, evidenciando relações entre as funções e suas derivadas (Zeguin, 2018).

A análise dessas *realizações* é importante, pois o uso de diferentes mediadores visuais permitem o desenvolvimento discursivo do aluno (Matamoros, García & Llinares, 2013). Comunicar-se matematicamente requer fazer parte do discurso matemático e ter a capacidade de modificar, internalizar e ampliar o próprio discurso. Em outras palavras, implica em “ser capaz de se comunicar não apenas com os outros, mas também consigo mesmo” (Sfard, 2008, p. 575, tradução nossa).

[5] Software livre de geometria dinâmica que permite criar, manipular e explorar objetos geométricos de forma interativa. Proporcionam uma abordagem visual e interativa para o estudo da geometria, permitindo aos usuários construir figuras geométricas, modificar suas propriedades e observar as mudanças em tempo real (Lopes, 2013).

No *corpus* analisado, observamos desconexões entre conceitos matemáticos, palavras, símbolos e gráficos usados para comunicar a derivada de uma função. Tais dificuldades podem estar associadas à ênfase atribuída, durante as aulas, aos aspectos analíticos em detrimento dos aspectos gráficos, o que pode limitar o estabelecimento de conexões entre diferentes formas de comunicar esse conceito (Bisognin & Bisognin, 2011).

Desta forma, a construção desse panorama é importante para percebermos como a comunicação por meio dos mediadores visuais possibilita investigar as maneiras pelas quais os alunos analisam, interpretam e relacionam as informações explicitadas pelo gráfico da função e o de sua derivada. Esse processo pode favorecer o estabelecimento de conexões entre *realizações* analíticas e gráficas, expressas por meio de diferentes formas de visualização (Panero, Arzarello & Sabena, 2016; Ingar & Maria, 2019).

4.3 Reta tangente a uma curva

Este panorama reúne *realizações* que comunicam a derivada de uma função em um determinado ponto, como sendo igual a inclinação da reta tangente ao gráfico da função neste ponto (supondo que a derivada existe nesse ponto). A reta tangente a uma curva é uma reta que toca a curva em um ponto específico e tem a mesma inclinação (derivada) que a curva nesse ponto (Park, 2015).

A interpretação geométrica da reta tangente em um ponto do gráfico de uma função é vista como uma aproximação ao declive dessa reta tangente. Essa aproximação é obtida considerando o limite de uma sequência de inclinações das retas secantes à curva, quando o comprimento do intervalo de base dessas retas tende a zero (Urquieta, Yañez & Andrade, 2014).

A reta secante é uma linha reta que atravessa o gráfico de uma função em dois pontos distintos. Ela passa por dois pontos diferentes na curva da função, enquanto a reta tangente é uma linha que toca a curva em um único ponto (localmente) e tem a mesma inclinação da curva nesse ponto (Zeguin, 2018).

Nesse contexto, Amaral e Muller (2012) utilizaram o *software* GeoGebra para que os alunos pudessem analisar o que acorre quando a reta secante se aproxima da reta tangente. Essa interpretação geométrica é fundamental para a compreensão do conceito de reta tangente e de sua relação com a derivada de uma função.

Fazendo uso da perspectiva dinâmica desse recurso tecnológico, ficou perceptível que à medida que os dois pontos da reta secante se aproximam cada vez mais, a reta secante se torna mais semelhante à reta tangente. Essa relação entre as retas tangente e secante é fundamental para o cálculo diferencial, no qual a derivada é definida como a inclinação da reta tangente no ponto de tangência (Amaral & Muller, 2012).

Estas *realizações* são significativas, pois, conhecendo a inclinação e o ponto de tangência, podemos utilizar a equação da reta para determinar a equação da reta tangente à curva. Essa equação descreve a reta que passa pelo ponto de tangência e possui a mesma inclinação que a curva nesse ponto (Pinto & Vianna, 2012). A inclinação da reta tangente representa a derivada da função.

Com base no exposto, a organização desse panorama possibilita compreender que a derivada de uma função, do ponto de vista geométrico, representa a inclinação da reta tangente em cada ponto do gráfico. Ao analisarmos o gráfico da função e traçarmos as retas tangentes, podemos visualizar como a função varia instantaneamente em cada ponto.

Essas ferramentas proporcionam um ambiente propício ao aprofundamento da compreensão do conceito de derivada e facilitam a exploração dos aspectos geométricos e discursivos relacionados a esse tema.

4.4 Função derivada

Nesse panorama, adotamos a definição de função proposta por Sfard (2008, p. 175-176) “se ... x denota uma quantidade variável, então todas as quantidades que dependem de x de qualquer maneira, ou que são determinadas por ela, são chamadas de funções” para agrupamos *realizações* que apresentam a derivada como função.

A definição da derivada pode ser expandida de um ponto para um intervalo e, assim, tornar-se uma função (Park, 2015). Esta função [y = f(x)] pode ser pode ser representada por $f'(x)$, $\frac{\partial y}{\partial x}$ ou $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ e calculada por meio da definição de limite ou regras de derivação (Zeguin, 2018). A função derivada pode ser abordada graficamente ou fazendo do uso de palavras – por exemplo, inclinação, coeficiente angular (Park, 2015).

Panero, Arzarello e Sabena (2016) descrevem que representar algebricamente a função derivada, implica uma atividade semiótica sobre os signos x_0, $f'(x_0)$, o limite, e a expressão algébrica da razão incremental da função f nos intervalos ($x_0 \pm h$; x_0). Logo, calcular a derivada de uma função consiste em substituir x_0 por um ponto genérico x.

Uma vez que a derivada é comunicada como uma função, ela pode ser determinada em pontos específicos x_0 ou na variável x. Vejamos o exemplo proposto por Park (2015): A derivada da função f(x) = x^2 é indicada pela *metarregra* $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2xh+h^2}{h} = 2x + h$, onde calculando *o limite, temos:* $f'(x) = \lim_{h\to 0} 2x + h = 2x$ (Park, 2015, p. 409).

Uma função derivável pode ser classificada em crescente se $f'(x)$ > 0 ou decrescente se $f'(x)$ < 0 em um intervalo (c, b). Se $f'(c) = 0$, então tem-se um máximo, mínimo ou um ponto de inflexão x = c (Matamoros, García & Llinares, 2013). Essa *realização* é utilizada para analisar o comportamento de uma função derivável em um intervalo aberto. Por meio do cálculo da primeira derivada é possível inferir se um ponto é extremo.

Os pontos extremos de uma derivada referem-se aos valores onde a derivada de uma função atinge o seu máximo ou mínimo local. Esses pontos são importantes para analisar o comportamento da função e identificar os pontos críticos ou de mudança na taxa de variação (Park, 2015). Os pontos extremos representam *narrativas endossadas* com aplicações no cálculo de área, volume, lucro, custo, dentre outras.

Nas *realizações* descritas acima, observa-se um vínculo entre os panoramas Definição Formal, Função Derivada e Gráfico. Para Sfard (2008), a conexão entre diferentes repertórios mobilizados facilita a comunicação de um conceito matemático.

O panorama Função Derivada é importante, pois fornece informações sobre o comportamento de uma função e auxilia na construção de seu gráfico, estimulando a percepção visual do aluno. Por meio dessa análise, podemos compreender como a função varia em cada ponto, identificando regiões de crescimento, decrescimento e pontos de máximo ou mínimo. Para Nasser, Sousa e Torraca (2017), essas informações são valiosas na análise e interpretação de fenômenos matemáticos e físicos.

4.5 Regras de derivação

As *realizações* inseridas nesse panorama são guiadas por produções discursivas que conferem padrões e regularidade ao discurso matemático. A autora Sfard (2008) define essas estruturas algébricas de *rotinas*. Considerando que o discurso é guiado por regras, as *rotinas* matemáticas constituem um conjunto de *metarregras* (Sfard, 2008).

As regras de derivação são utilizadas para comunicar, por meio de exemplos algébricos, como a derivada pode ser aplicada e quais são as suas implicações. Para ilustrar, apresentamos algumas funções acompanhadas de suas respectivas regras de derivação (*metarregras*). Dada uma função polinomial $f(x) = ax^m$, a sua derivada é indicada por $f'(x) = max^{m-1}$. Logo, se $f(x) = 2x^3$, então $f'(x) = 6x^2$ (Pino–Fan; Godino; Moll, 2011).

Também foram identificadas técnicas para derivar o produto e o quociente de funções. Para calcular a derivada da função $f(x) = [cos(x) - x.e^x]$, aplicaremos a regra do produto $f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$ e derivar a função trigonométrica. Dessa forma, teremos como resultado $f'(x) = -sen(x) - e^x - x.e^x$ (Müller, Cury & Lima, 2015).

As *realizações* mencionadas foram ilustradas com a finalidade de oferecer uma ferramenta adicional para comunicar o conceito de derivada. No entanto, nas aulas de Cálculo, há uma ênfase maior nos processos algébricos, com um entendimento limitado dos conceitos. Como resultado, é possível observar que os alunos enfrentam dificuldades em estabelecer relações entre as regras de derivação, a representação gráfica e sua aplicação no estudo do movimento e da variação (Vranken; Engler, 2014).

Essas *realizações* indicam a variabilidade de formas de comunicar o conceito de derivada. Normalmente, são compartilhadas com os alunos de forma clássica, por meio de definições, teoremas, demonstrações e trabalhadas em listas de exercícios sem que haja rigor na demonstração de propriedades e entendimentos dos conteúdos (Pino-Fan; Godino; Font, 2015). Assim, muitas vezes, observa-se uma preocupação maior em realizar operações algébricas e em memorizar fórmulas, sem dar a devida atenção aos conceitos.

Diante do exposto, a construção desse panorama é importante, pois, por meio das regras de derivação podemos comunicar, de forma generalizada, as derivadas de diferentes tipos de funções matemáticas, desde as funções polinomiais até as funções trigonométricas, exponenciais e logarítmicas, possibilitando identificar a forma que suas expressões assumem. Essas regras proporcionam ferramentas para o estudo do comportamento das funções e para a resolução de problemas em diferentes áreas do conhecimento.

4.6 Aplicações das derivadas

A resolução de problemas por meio da aplicação das derivadas pode enriquecer a dinâmica em sala de aula ressignificando saberes na área de Cálculo e aliando esse campo

do conhecimento com as demandas da sociedade contemporânea (Souza & Fonseca, 2017). Quando o aluno aplica o novo conhecimento na resolução de questões do cotidiano, compreende melhor o conceito. Nessa perspectiva, destacamos algumas *realizações* que constituem este panorama, a exemplo das aplicações envolvendo taxas de variação.

Os autores Pino-Fan, Goldino e Moll (2011) apontam que o limite das taxas médias de variação, também denominado de taxa instantânea de variação de y em relação a x, pode ser expresso na relação: $taxa\ instantanea\ de\ variação = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x_2 \to x_1} \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$. A variação de y = f(x) em relação a x quando x = a, representa da derivada $f'(a)$.

Com base na *realização* apresentada, Nasser, Sousa e Torraca (2017) propõem a seguinte tarefa: *A que taxa de variação cresce a área de um círculo em relação ao seu raio, quando o raio é igual a 2?* Os autores descrevem que esperavam a seguinte solução: $A(r) = \pi r^2$, em que $A(r)$ representa a área do círculo. Onde $\frac{dA}{dr} = 2\pi r$. Assim, para r = 2 tem-se $\frac{dA}{dr} = 4\pi$. Logo, 4π representa o valor da taxa de crescimento da área em relação ao raio do círculo. Nesse processo, observa-se uso de *palavras* (área, círculo, raio variação), *mediadores visuais* (caráteres algébricos) e *metarregra* ($A(r) = \pi r^2$) para comunicar a aplicação da derivada.

Por meio das aplicações, é possível conectar o conceito de derivada a outros conceitos matemáticos. Relacionando vivências pessoais e o currículo escolar, podemos levar o aluno a perceber a importância e a aplicabilidade do conceito de derivada.

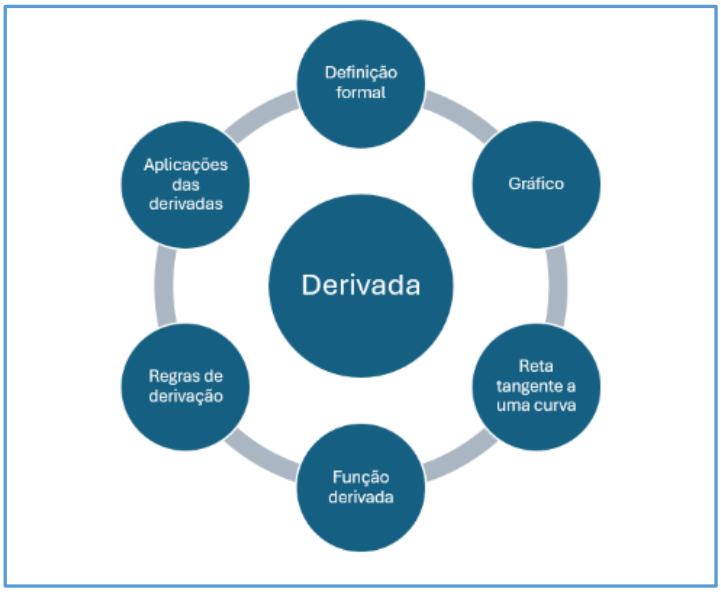
Nesse contexto, o professor deve estar preparado para conciliar diferentes narrativas com situações cotidianas, pois as experiências vivenciadas possibilitam novas ações e descobertas, nas quais a comunicação se torna eficiente. As aplicações das derivadas, quando associadas aos panoramas anteriormente apresentados, possibilitam o surgimento de novas estratégias para superar as dificuldades presentes na comunicação do conceito de derivada.

5 ANÁLISE E SISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os diferentes repertórios que foram mobilizados para comunicar o conceito de derivada foram sintetizados em um Modelo Teórico da Matemática para o Ensino do Conceito de Derivada, conforme apresentamos na Figura 3, a seguir.

Figura 3

Um Modelo Teórico da Matemática para o Ensino do Conceito de Derivada



O panorama Definição Formal constitui as *narrativas endossadas* que regulam a comunicação do conceito, enquanto no panorama Gráfico, agrupamos *realizações* que aparecem na forma de *mediadores visuais*. A construção e análise gráfica podem potencializar o ensino, pois constituem importantes recursos pedagógicos que auxiliam na compreensão dos conceitos trabalhados em sala de aula.

Com o intuito de destacar as conexões entre as retas secantes, a reta tangente, o coeficiente angular e a derivada de uma função, apresentamos o panorama Reta Tangente a uma Curva. As informações comunicadas nesse panorama foram relacionadas aos registros gráficos e à definição formal, visando uma ampla compreensão.

O panorama Função Derivada é, geralmente, comunicado de forma associada a *mediadores visuais* e *regras ao nível do objeto,* que são definidas como “narrativas sobre regularidades no comportamento dos objetos do discurso” (Sfard, 2008). Ou seja, são narrativas que regulam o discurso.

Já o panorama Regras de derivação foi constituído a partir da junção de regras que descrevem as *rotinas*, ou seja, as ações dos participantes quando comunicam um conceito (Sfard, 2008). São atividades que se tornam habituais, permitindo que os alunos resolvam problemas matemáticos de maneira eficiente. As *rotinas* incluem habilidades básicas, como contar, somar, subtrair, multiplicar, entre outras.

Na sequência apresentamos o panorama Aplicações das Derivadas. Nele, agrupamos diferentes *realizações* presentes no discurso sobre derivadas, que são reguladas pelo uso de *rotinas, palavras, mediadores visuais e narrativas endossadas* pela comunidade discursiva.

As *realizações* foram agrupadas em seis panoramas que são interligados, mas sem uma relação de dependência entre si, ou seja, não há uma hierarquia, podendo ser comunicados em conformidades aos objetivos da aula. Os diferentes usos de um conceito estão condicionados às *regras de nível do objeto*, que fundamentam as *rotinas*, e pelas *metarregras* que descrevem tais *rotinas* (Sfard, 2008). A articulação desses panoramas constitui o conceito de derivada.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este estudo teve por objetivo estruturar e sistematizar as diferentes maneiras de comunicar o conceito de derivada na perspectiva de constituir um modelo teórico de Matemática para o Ensino que organize essas formas de ocorrências. A análise realizada possibilitou organizar essas *realizações* em seis panoramas interligados e não hierárquicos, evidenciando diferentes formas de comunicar a derivada e as relações que podem ser estabelecidas entre elas.

A sistematização dessas *realizações* permite compreender o modelo não como uma proposta prescritiva para o ensino da derivada, mas como um referencial teórico que reúne diferentes possibilidades de comunicação desse conceito. Nessa perspectiva, os panoramas não constituem etapas de uma sequência a ser seguida pelo professor, podendo ser mobilizados e articulados de diferentes maneiras, de acordo com os objetivos de ensino, as particularidades dos estudantes e o contexto em que a prática pedagógica se desenvolve.

Esse modelo teórico pode contribuir para a formação inicial e continuada de professores de Matemática, ao evidenciar diferentes *realizações* mobilizadas na comunicação do conceito de derivada e as relações estabelecidas entre elas. Nesse sentido, pode subsidiar discussões e o planejamento de situações de ensino que articulem a definição formal, as representações gráficas, a reta tangente, a função derivada, as regras de derivação e as aplicações, fornecendo subsídios para a prática pedagógica de professores e futuros professores. Além disso, pode constituir um referencial analítico para o desenvolvimento de novas pesquisas na área.

Na formação continuada, pode ser mobilizado como referencial para o planejamento e a reflexão sobre situações de ensino da derivada, possibilitando aos professores analisar as *realizações* mobilizadas em suas aulas e estabelecer relações entre os diferentes panoramas, ampliando as possibilidades de comunicação do conceito de derivada.

Entretanto, sua utilização não deve assumir caráter prescritivo, tampouco ser compreendida como garantia de aprendizagem do conceito de derivada. Os panoramas sistematizados representam *realizações* identificadas e organizadas no âmbito desta investigação e, portanto, não esgotam as diferentes formas pelas quais o conceito pode ser comunicado em outros contextos educacionais.

Disponibilizar à comunidade acadêmica uma variabilidade de *realizações* do conceito de derivada, sistematizadas nos panoramas anteriormente discutidos, amplia as possibilidades de sua compreensão e comunicação. Pode contribuir para que os alunos reconheçam distintas formas de comunicar e aplicar o conceito e, consequentemente, ampliem e modifiquem seu discurso sobre derivada.

Como limitação, destaca-se que a sistematização dos panoramas foi realizada a partir de dados secundários, não contemplando a observação direta de situações de ensino e aprendizagem. Dessa forma, o estudo não permite analisar como os estudantes mobilizam e articulam esses panoramas em contextos reais de sala de aula, o que limita a captura da dinamicidade, da espontaneidade e das tensões próprias das interações e do discurso oral.

Como perspectivas para pesquisas futuras, sugere-se a realização de investigações empíricas que analisem o discurso de professore e estudantes durante situações de ensino da derivada, buscando identificar como os diferentes panoramas são mobilizados, articulados e transformados.

REFERÊNCIAS

Ball, D. L., Thames, M. H, Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? Journal of Teacher Education, 59, p. 389-407.

Bisognin, E., Bisognin, V. (2011). Análise do desempenho dos alunos em formação continuada sobre a interpretação gráfica das derivadas de uma função. Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, *v.* 13, n. 3, p. 509–526. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/7056.

Borji, V., Martínez-Planell, R. (2020). On students' understanding of implicit differentiation based on APOS theory. Educational Studies in Mathematics, 105(2), 163–179. https://doi.org/10.1007/s10649-020-09991-y.

Creswell, John W. (2012). Educational research: planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research. 4. ed. Boston: Pearson.

Davis, B., Renert, M. (2014). The math teachers know: Profound understanding of emergente mathematics. Editorial Routledge, New York: pp. 141.

Gonçalves, M. B, Flemming, D. M. (2009). Cálculo A. São Paulo: Pearson.

Hoff do Amaral, E. M., MÜLLER, T. J. (2012). Integração de Tecnologias para Construção de Objetos de Aprendizagem – O case E2D Ensino de Derivadas a Distância. RENOTE, Porto Alegre, *v*. 10, n. 1. DOI: 10.22456/1679-1916.30812. https://seer.ufrgs.br/index.php/renote/article/view/30812.

Ingar, K. V., Silva, M. J. F. (2019). Estudio de la derivada parcial por medio de las aprehensiones uma el registro gráfico de funciones de dos variableumaon estudiantes de ingeniería. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, *v*.21, n.1, pp. 049-068.

Lopes, M. M. (2013). Sequência Didática para o Ensino de Trigonometria Usando o Software GeoGebra. Bolema, Rio Claro (SP), *v*. 27, n. 46, p. 631-644.

Lopes, T. B., Santos, L. G. (2016). O uso do geogebra como ferramenta auxiliar para estudo da reta tangente a um gráfico. Novas Tecnologias na Educação. *v*. 14 Nº 2.

MÜLLER, T. J., CURY, H. N., LIMA, J. V. (2015). Análise de Dificuldades em Cálculo: uma discussão em um Ambiente Virtual de Aprendizagem. Perspectivas da Educação Matemática, [S. l.], *v*. 8, n. 17. https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/780.

Nasser, L., Sousa, G. A., Torraca, M. A. A. (2017). Desempenho em cálculo: investigando a transição do ensino médio para o superior. Boletim GEPEM. N. 70, p. 43-55.

Oliveira, M. M. (2007). Como fazer pesquisa qualitativa. Petrópolis, Vozes.

Panero, M., Arzarello, F., Sabena, C. (2016). The Mathematical Work with the Derivative of a Function: Teachers' Practices with the Idea of "Generic". Bolema. Rio Claro (SP). *v.* 30, n. 54, p. 265- 286.

Park, J. (2015). Communicational approach to study textbook discourse on the derivative. Published online. Springer Science+Business Media Dordrecht.

Pino–Fan, L. R., Godino, J. D., Font, V. (2015). Una Propuesta para el Análisisde las Prácticas Matemáticas de Futuros Profesores sobre Derivadas. Bolema, Rio Claro (SP), *v*. 29, n. 51, p. 60-89.

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., MOLL, V. F. (2011). Faceta Epistémica Del ConocimientoDidáctico-Matemático Sobre La Derivada. Educ. Matem. Pesq., São Paulo, *v*.13, n.1, pp.141-178.

Pinto, G. M. F., Vianna, C. C. S. (2012). Compreensão gráfica da derivada de uma função real. Revista de Educação, Ciências e Matemática *v*.2 n.3. ISSN 2238-2380.

Rachelli, J., Bisognin, V. (2020). Derivadas Parciais: um Estudo com Base na Teoria APOS. JIEEM *v*.13, n.1, p. 26-34.

Rhoads, K., Weber, K. (2016). Exemplary high school mathematics teacher's reflection on teaching: A situated cognition perspective on content knowledge. International Journal of Education, *v*. 78, p. 1-12.

Sánchez-Matamoros, G., García, M., Llinares, S. (2013). Algunos Indicadores del Desarrollo del Esquema de Derivada de una Función. Bolema, Rio Claro (SP), *v*. 27, n. 45, p. 281-302.

Santos, G. L. D., Barbosa, J. C. (2019). Um Modelo Teórico de Matemática para o Ensino do Conceito de Função a partir de Artigos Científicos. Boletim GEPEM, n. 74, p. 127 – 143.

Sfard, A. (2008). Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing. New York, NY: Cambridge University Press.

Silva, J. R. D. (2020). An analysis of the conceptual contents present in THE TEACHING OF DERIVATIVES. REnCiMa, *v*. 11, n.4, p. 348-368.

Souza, D. V., Fonseca, R. F. (2017). Reflexões acerca da aprendizagem baseada em problemas na abordagem de noções de cálculo diferencial e integral.
 Reflections on the problem based learning in the approach of notions of differential calculation and integral. Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, São Paulo, *v*. 19, n. 1. https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/26575.

Urquieta, M. A. V., Yañez, J. C., Andrade, J. S. (2014). Análisis según el Modelo Cognitivo APOS* del Aprendizaje Construido del Concepto de la Derivada. Bolema, Rio Claro (SP), *v*. 28, n. 48, p. 403-429.

Viseu, F. (2017). Representações na aprendizagem da derivada de uma função por alunos do ensino secundário. Zetetiké, Campinas, SP, *v*. 25, n. 2, p. 265-288.

Vrancken, S, Engler, A. (2014). Una introducción a la derivada desde la variación y el cambio: resultados de una investigación con estudiantes de primer año de la universidad. Bolema. Rio Claro (SP), *v*. 28, n. 48, p. 449-468.

Zengin, Y. (2018). Examination of the constructed dynamic bridge between the concepts of differential and derivative with the integration of GeoGebra and the ACODESA method. Educ Stud Math 99, 311–333. https://doi.org/10.1007/s10649-018-9832-5.

NOTAS

TÍTULO DA OBRA
Um Modelo Teórico da Matemática para o Ensino do Conceito de Derivada

Josenilson Lopes Lola
Doutor em Educação. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sertão Pernambucano (IFSertãoPE), Petrolina, Pernambuco, Brasil
josenilsonlola@ifsertao-pe.edu.br
https://orcid.org/0009-0007-2970-035X

Jonei Cerqueira Barbosa
Doutor em Educação Matemática. Universidade Federal da Bahia (UFBA), Salvador, Bahia, Brasil
jonei.cerqueira@ufba.br
https://orcid.org/0000-0002-4072-6442

ENDEREÇO DE CORRESPONDÊNCIA DO PRINCIPAL AUTOR
Avenida Eulália, número 291, Bairro Vila Eulália, CEP 56331025, Petrolina – PE, Brasil

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: J. L. Lola, J. C. Barbosa
Coleta de dados: J. L. Lola
Análise de dados: J. L. Lola, J. C. Barbosa
Discussão dos resultados: J. L. Lola, J. C. Barbosa
Revisão e aprovação: J. L. Lola, J. C. Barbosa

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
Não se aplica.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

LICENÇA DE USO – uso exclusivo da revista. Os autores cedem à **Revemat** os direitos exclusivos de primeira publicação, com o trabalho simultaneamente licenciado sob a Licença Creative Commons Attribution (CC BY) 4.0 International. Estra licença permite que **terceiros** remixem, adaptem e criem a partir do trabalho publicado, atribuindo o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico. Os **autores** têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicada neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista. Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EQUIPE EDITORIAL – uso exclusivo da revista
Dr. Méricles Thadeu Moretti
Dra. Rosilene Beatriz Machado
Dra. Bárbara Cristina Basa
Dr. Eduardo Sabel
Dra. Karina Zolia Jacomelli Alves

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 21-04-2026 – Aprovado em: 21-09-2026