REVEMAT
REVISTA ELETRÔNICA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

CARACTERÍSTICAS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO MANIFESTADAS NO TRABALHO COM EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO PRIMEIRO GRAU EM AULAS NA PERSPECTIVA DO ENSINO EXPLORATÓRIO DE MATEMÁTICA

Characteristics Of Algebraic Thinking Mobilized In Work With First-Degree Equations In Classes From The Perspective Of Exploratory Mathematics Thinking

Patrícia Andressa MAIESKI
Universidade Estadual do Paraná, União da Vitória, Brasil.
patriciaamaiesk@gmail.com
https://orcid.org/0009-0005-2091-5712

Maria Ivete BASNIAK
Universidade Estadual do Paraná, União da Vitória, Brasil
maria.basniak@unespar.edu.br
https://orcid.org/0000-0001-5172-981X

RESUMO

O objetivo deste trabalho consiste em investigar indícios do pensamento algébrico relacionados às equações polinomiais do primeiro grau, manifestadas por estudantes do sétimo ano dos Anos Finais do Ensino Fundamental a partir de práticas assentes no Ensino Exploratório de Matemática (EEM). Assumem-se como dimensões fundamentais do EEM, a reflexão, a comunicação e a colaboração. As análises são sustentadas na transcrição dos áudios gravados durante as aulas, nos registros escritos dos estudantes e no caderno de campo da professora/pesquisadora. A prática assente no EEM contribuiu para os estudantes negociarem significados, tanto para a ideia de incógnita quanto para a representação das situações envolvidas nas tarefas utilizando equações polinomiais do primeiro grau. Nas resoluções das equações, os estudantes utilizaram diferentes estratégias com compreensão dos processos envolvidos. O sinal de igual foi utilizado atribuindo a ele diferentes significados durantes as tarefas, incluindo maneiras corretas e incorretas.

Palavras-chave: Educação Matemática, Tarefas Exploratórias, Equações De Primeiro Grau

ABSTRACT

This work aimed to investigate evidence of algebraic thinking related to first-degree polynomial equations, mobilized by seventh-year students in the Final Years of Elementary School based on practices based on Exploratory Mathematics Teaching (EEM in Portuguese acronym). Fundamental dimensions of EEM are inquiry, reflection, communication and collaboration. Analyses are supported by transcription of audio recordings during classes, the students' written records and the teacher/researcher's field notebook. The practice based on EEM helped students negotiate meanings, both for the idea of the unknown and for representation of situations involved in the tasks using first-degree polynomial equations. When solving equations, students used different strategies with an understanding of the processes involved. The equal sign was used to give different meanings during the tasks, including correct and incorrect ways.

Keywords: Mathematics Education, Exploratory Tasks, First-Degree Equations

1 INTRODUÇÃO

A partir dos anos finais de 1980 e início de 1990, o foco principal do ensino da Álgebra passou a ser o desenvolvimento do pensamento algébrico (Almeida, 2016; Kaput, 2008; Ponte, Branco & Matos, 2009). Canavarro (2007) afirma que, “no cerne do pensamento algébrico estão os significados, está o uso dos símbolos como recurso para representar ideias gerais resultantes do raciocínio com compreensão” (p. 88).

Assim, o estudante deve lidar com as equações com atribuição de significados para que possa utilizá-las para a resolução de problemas, bem como estabelecer relações entre esse e outros objetos da Álgebra, na Matemática e em outros contextos. Essa forma de trabalhar com as equações polinomiais do primeiro grau pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico. Alguns autores, como Barbeiro (2012), Fernandes (2011), Freitas (2002), e Ponte, Branco e Matos (2009), apontam dificuldades dos estudantes com esse tipo de equações, sendo uma delas a não atribuição de significado aos símbolos utilizados para expressar uma equação polinomial do primeiro grau. Isso inclui a interpretação do sinal de igual enquanto relação de equivalência entre os membros da equação que representam um mesmo valor, a compreensão da ideia de incógnita e dos procedimentos utilizados na resolução de uma equação polinomial do primeiro grau.

O objetivo deste trabalho é investigar indícios do pensamento algébrico relacionados às equações polinomiais do primeiro grau, manifestados por estudantes do sétimo ano dos Anos Finais do Ensino Fundamental a partir de práticas assentes no EEM. No Ensino Exploratório de Matemática (EEM), os estudantes aprendem por meio da realização de tarefas desafiadoras (Canavarro, 2011), em que possuem papel ativo no processo de aprendizagem, pois o ambiente de aprendizagem envolve a construção do conhecimento matemático de forma colaborativa e reflexiva, com negociação de significados (Basniak & Estevam, 2019; Canavarro, 2011; Oliveira; Menezes & Canavarro, 2013). Assim, no EEM, a realização de tarefas matemáticas de natureza exploratória possibilita, aos estudantes, tanto utilizar conhecimentos prévios quanto construir novos conhecimentos com a atribuição de significado. Dessa forma, considera-se a perspectiva do EEM uma alternativa para o ensino de equações polinomiais do primeiro grau, o qual está associado a mobilização do pensamento algébrico, como discutimos brevemente na seção que segue.

2 ENSINO DE EQUAÇÕES POLINOMIAIS DO PRIMEIRO GRAU E MOBILIZAÇÃO DO PENSAMENTO ALGÉBRICO

O trabalho com as equações polinomiais do primeiro grau pode favorecer a mobilização do pensamento algébrico (Almeida 2016), assim como o desenvolvimento do pensamento algébrico pode contribuir para o ensino e aprendizagem das equações polinomiais do primeiro grau. Segundo Fernandes (2011), a compreensão do conceito de equação pelos estudantes envolve a compreensão *do sinal de igual* como igualdade entre os membros de uma equação, um entendimento além do que é entendido na Aritmética e, ii) *de incógnita*, como ideia de número desconhecido.

Em relação ao sinal de igualdade, Fernandes (2011, p. 13) salienta que:

> Em Álgebra este símbolo tem um significado completamente diferente. Define uma condição onde x satisfaz um valor para a igualdade. É fundamental que os alunos se apropriem da mudança que este símbolo traz ao estudo das equações para que deste modo, se minimizem as dificuldades e os erros inerentes à resolução de equações (Fernandes, 2011, p. 13)

Para Ponte, Branco e Matos (2009), o sinal de igual pode assumir até quatro significados diferentes. O primeiro e mais comum, na Aritmética, como indicador do resultado da operação realizada, como por exemplo, 10+2=12, ou até mesmo na simplificação de expressões algébricas, como em 4x+3-2x=2x+3. Na perspectiva da equivalência entre dois objetos, o sinal de igual, pode ser utilizado para relação de equivalência entre expressões numéricas e algébricas, por exemplo, 8+3=5+6 e $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ (Ponte, Branco & Matos, 2009). Em um terceiro caso, nas equações, representa a equivalência entre duas expressões, “por exemplo 8 + x =18. Aqui, este sinal identifica uma possível equivalência entre expressões para certos casos, ou seja, coloca a pergunta se as expressões dadas nos dois membros podem ser equivalentes, para algum valor de x” (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 23). Como quarta atribuição, o sinal de igual pode ser empregado “para definir uma relação funcional, como, por exemplo, em y = 2x + 7, sendo x um número natural entre 1 e 10. O sinal de igual assinala aqui a relação de dependência entre duas variáveis” (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 22).

Além disso, no estudo das equações polinomiais do primeiro grau, é necessária a compreensão da ideia de incógnita como um valor desconhecido que satisfaz a igualdade, o qual pode ser representado por uma letra. Ao compreender essa ideia de incógnita, o estudante atribuirá significado aos símbolos utilizados para representá-la, o que favorece a passagem da linguagem natural para a algébrica, pois é necessário compreender o

significado atribuído aos símbolos utilizados para expressar relações algébricas e realizar operações ou manipulações algébricas. Segundo Fernandes (2011), o "[...] sentido do símbolo refere-se, essencialmente, à capacidade de dar significado a símbolos, a expressões e a fórmulas e a ter uma compreensão da sua estrutura" (p. 22).

As características fundamentais do pensamento algébrico incluem atribuir significados aos símbolos e aos objetos da Álgebra, e o processo de generalização (Kaput, 1999, 2008; Radford, 2006, 2009, Lins, 1992).

Kaput (1999, 2008) enfatiza que a simbolização algébrica utilizada para expressar relações algébricas, a qual o autor se refere como uma linguagem convencional, evolui de acordo com as experiências em Álgebra dos estudantes. Nos primeiros anos de escolaridade, a forma de representar e raciocinar algebricamente pode incluir palavras, gestos e desenhos, até chegar a utilizar um sistema de símbolos convencionais.

O trabalho com grandezas desconhecidas, as incógnitas, no caso das equações, também envolve a analiticidade, que trata o desconhecido como se fosse conhecido, ao operar com essas grandezas (Radford, 2006, 2009, 2021). De igual modo, no pensar analiticamente, "[...] 'incógnitas' são tratadas exatamente como se fossem 'dados'" (Lins, 1994, p. 30). Para Lins (1992; 1994), o pensar analiticamente é umas das formas do pensamento algébrico, assim como o pensar aritmeticamente e o pensar internamente.

O fato de que, ao pensar algebricamente, o estudante inclui em seu raciocínio tantas grandezas determinadas e indeterminadas, significa que ele estabelece relações entre esses dois tipos de grandezas. Isso também significa que ele trata grandezas desconhecidas como se fossem conhecidas. Então, as equações polinomiais do primeiro grau mobilizam caraterísticas do pensamento algébrico, o que contribui para o desenvolvimento desse tipo de pensamento. Reciprocamente, o desenvolvimento do pensamento algébrico contribui para o estudo desse objeto da Álgebra, as equações polinomiais do primeiro grau.

3 CONTEXTO E PRESSUPOSTOS TEÓRICOS E METODOLÓGICOS

A produção dos dados da pesquisa se deu por aulas assentes na perspectiva do EEM em uma turma de sétimo ano dos Anos Finais do Ensino Fundamental, de uma escola pública. O EEM é uma perspectiva de ensino em que os estudantes desempenham participação ativa durante as aulas, pois são provocados a formular hipóteses, discutir ideias, testar diferentes estratégias, justificar seus raciocínios e estabelecer conexões com

conhecimentos anteriores diante de tarefas desafiadoras. Assim, o professor tem papel de mediador, orientando-os e questionando-os para que, em um processo colaborativo, haja a construção de novos conhecimentos matemáticos (Canavarro, 2011; Cyrino & Oliveira, 2016; Basniak & Estevam, 2019).

A professora/pesquisadora faz parte do quadro docente dessa escola desde o ano de 2019 e já conhecia a turma e havia trabalhado com a maioria desses estudantes no ano anterior à pesquisa com tarefas de natureza exploratória que envolveu fases do EEM, (introdução e desenvolvimento da tarefa) com pouca atenção à discussão e sistematização. Durante a realização das intervenções, na turma, estudavam 26 estudantes com idade entre 12 e 16 anos. As aulas tinham 45 minutos cada, durante três semanas, totalizando nove aulas. Como a professora/pesquisadora já conhecia a turma, foram pré-estabelecidos os integrantes de cada grupo, a fim de agilizar a organização para a aula seguinte. Nesse dia, estavam presentes 22 estudantes e foram formados seis grupos, sendo cinco grupos com quatro integrantes e uma dupla. As aulas ocorreram em torno da realização, discussão e sistematização de duas tarefas, intituladas *Escada de Números* e *Escada de Números II*. As duas tarefas foram analisadas por se tratar de uma sequência de tarefas sobre equações polinomiais do primeiro grau.

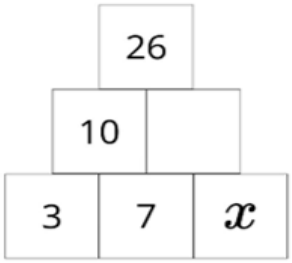
A primeira tarefa (Figura 1), *Escada de Números*, tinha como objetivos: (i) reconhecer que uma equação representa uma igualdade entre duas expressões, na qual alguns valores são desconhecidos; e (ii) identificar a incógnita como a única solução de uma equação polinomial do primeiro grau.

Figura 1

Tarefa 1 Escada de Números

TAREFA 1- ESCADA DE NÚMEROS

Na figura abaixo, o número 10 foi obtido somando diretamente os dois números das casas abaixo dele. Fazendo o mesmo para preencher a casa que está em branco, obtém-se o 26 no topo da escada.



Observe a figura acima e em seguida responda as questões a seguir:
a) Escreva uma expressão que representa o 10 obtido na escada de números.
b) Escreva uma expressão que representa como obter o 26 na escada de números.
c) O que o x representa nessa escada de números? Determine o valor de x. Explique como você pensou.
d) Qual ou quais outros valores o x pode assumir nessa escada de números? Justifique sua resposta.

A etapa de *Introdução da Tarefa* teve duração de 12 minutos, contando o tempo de organização dos grupos, entrega dos materiais e proposição da tarefa. A *Realização da tarefa* pelos estudantes demorou cerca 30 minutos, e os minutos finais da aula foram destinados para que os estudantes reorganizassem a sala de aula e guardassem os materiais utilizados. Depois, a professora/pesquisadora selecionou e sequenciou as tarefas para as apresentações, conforme as observações durante a fase de *Realização da tarefa*. Diante disso, foram estabelecidos alguns critérios para selecionar as resoluções de cada questão da tarefa: resoluções de todos os grupos em pelo menos um item da tarefa, selecionando as diferentes estratégias de resolução utilizadas, conforme apresentado no quadro (Quadro 1). Algumas resoluções dos itens *a* e *d* foram somente discutidas, sendo o registro realizado pela própria professora/pesquisadora no quadro. Os seis grupos são identificados por letras de A a F.

Quadro 1

Organização das apresentações e discussões, tarefa Escada de Números

Questão	Grupos selecionados	Resolução discutida
a)	Todos os grupos chegaram na mesma solução.	$7 + 3 = 10$
b)	D	$10 + 16 = 26$
	B	$7 + x = 7 + 9 = 16 + 10 = 26$
	E	$7 + x + 10 = 26$
	C	$17 + x = 26$
c)	A	$16 - 7 = 9 \qquad x = 9$
	B	$9 + 7 = 16 \qquad x = 9$
	E	$26 - 10 - 7 = 9$ $x = 9$
	F	$x = 6$
d)	A, B, C, D e E.	Chegaram à conclusão de que *x* só poderia assumir o valor 9, poque nenhum outro valor iria satisfazer a igualdade $17 + x = 26$.

A *Discussão da tarefa* aconteceu na aula do dia seguinte, quando foi solicitado que alguns grupos explicassem suas resoluções para a turma. A *Sistematização das aprendizagens* da tarefa *Escada de Números* ocorreu no terceiro dia, quando a professora/pesquisadora buscou relacionar as ideias e conceitos matemáticos discutidos na fase da *Discussão da tarefa*, a fim de formalizar a definição de equação e de incógnita.

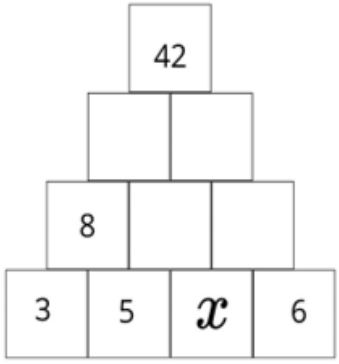
A segunda tarefa, *Escada de Números II* (Figura 2), tinha como objetivos: (i) reconhecer que uma equação representa uma igualdade entre duas expressões, na qual alguns valores são desconhecidos; e (ii) identificar a incógnita como a única solução de uma equação do primeiro grau.

Figura 2

Tarefa 2 Escada de Números II

TAREFA 2- ESCADA DE NÚMEROS II

Na figura, o número 8 foi obtido somando-se os diretamente os dois números das casas abaixo dele. Fazendo-se o mesmo para preencher as casas que estão em branco, obtém-se o 42 no topo da escada.



Complete as casas que estão em branco na figura acima e em seguida responda as questões a seguir:

1) Escreva uma expressão matemática que representa o 8 obtido nessa escada.
2) Como é obtido o 42 nessa escada de números? Escreva uma expressão matemática que representa esse valor.
3) Qual é o valor de x para que se obtenha 42 no topo da escada? Explique como você encontrou esse valor.
4) E se no lugar do 42 fosse 120.
a) Escreva uma expressão matemática que representa esse valor.
b) O valor de x seria o mesmo? Qual seria o valor de x para que essa expressão que você escreveu no item anterior seja verdadeira?
5) Qual seria o valor de x se no topo da escada fosse -36?

Durante a *Introdução da tarefa,* a professora/pesquisadora explicou aos estudantes que as aulas novamente teriam a mesma organização. Foram necessárias três aulas para a *Realização da tarefa*. A *Discussão da tarefa* durou uma aula. A organização dos grupos selecionados para apresentar suas resoluções seguiu o apresentado no Quadro 2.

Quadro 2

Organização das apresentações e discussões, tarefa Escada de Números II

Questão	Grupos selecionados	Resolução discutida
1)	Todos os grupos chegaram na mesma solução.	$3+5=8$ ou $5+3=8$
2)	C	$x+6=12$ $x+5=11$ $11+12=23$ $11+8=19$ $19+23=42$ $24+3x=42$
	A	$11+13+x+x+x=42$ $24+3x=42$

	B	$5+x=11$ $6+x=12$ $12+11=23$ $11+8=19$ $19+23=42$
3)	C	$x=6$ Somando cada número até chegar mais perto
	A	$3x=18$ $42-24=18\div 3=6$ $x=6$
	B	$13+x+11+x=24+x$ $42-24=18$ $18\div 3=6$ $x=6$
	F	$3x=18$ $x=6$
4)	D	a) $3x+24=120$ b) $x=32$
	G	a) $24+3x=120$ b) $x=32$
	F	a) $8+5+x+x+6+x=120$ $24+3x=120$ $b)\ x=32$
5)	B	$13+x+11+2x=-36$ $x=-20$
	D	$3x+24=-36$ $x=-20$
	E	$24+3x=-36$ $3x=-60$ $x=-20$
	G	$24+3x=-36$ $x=20$

A *Sistematização das aprendizagens* durou uma aula. Nessa aula, foram retomadas algumas ideias discutidas na aula anterior: a definição de equação, de incógnita e a definição de equação polinomial de primeiro grau. Além disso, também foi discutido o significado do símbolo de igual em uma equação, representando igualdade entre duas expressões. Portanto, o material das aulas que foi analisado é composto por trechos de transcrições que ocorreram durante as aulas, de registros escritos dos estudantes e anotações da professora/pesquisadora. A análise está organizada de forma não linear, no sentido de que sua apresentação não está na sequência em que as aulas ocorreram, mas buscando indícios do pensamento algébrico a partir da prática do EEM.

Para facilitar a organização e leitura do texto, desta vez os grupos foram identificados pelas letras de A a G, e em cada grupo, os estudantes foram identificados com a letra que representa o grupo acompanhada de um número, de modo sequencial (Quadro 3). Para a primeira tarefa, foram formados 6 grupos, pois havia 22 estudantes para realização da

tarefa *Escada de Números*. Para a realização da tarefa *Escada de Números II*, os 26 estudantes foram divididos em 7 grupos.

Quadro 3

Siglas dos grupos e integrantes

Identificação do grupo	Sigla do integrante
A	A1, A2, A3, A4
B	B1, B2, B3, B4,
C	C1, C2, C3, C4, C5
D	D1, D2, D3, D4
E	E1, E2, E3, E4
F	F1, F2
G	G1, G2, G3

Nas transcrições, as linhas de cada diálogo estão simbolizadas à esquerda por L_n, sendo *L* de linha e índice *n* o número da linha, para que o leitor se localize mais facilmente durante a leitura das análises, principalmente em trechos mais longos. Para suprimir alguns excertos dos diálogos, os quais não alteram as análises, foi utilizado o símbolo de supressão "[...]", a fim de reduzir o espaço ocupado pelas transcrições.

Buscou-se analisar os dados produzidos durante as intervenções, procurando investigar indícios do pensamento algébrico relacionados às equações polinomiais do primeiro grau manifestados pelos estudantes a partir de práticas do EEM. Assim, foram selecionados para análise os excertos de diálogos e registros escritos que apresentem elementos a respeito das diferentes atribuições de significados ao sinal de igual, ideias a respeito da incógnita, e a representação e resolução de equações polinomiais do primeiro grau durante as fases de *Realização da Tarefa* e *Discussão da Tarefa*.

4 RESULTADO DAS ANÁLISES

Quando a professora/pesquisadora questionou os estudantes (L_2, L_4, L_6 e L_{10}) sobre a resolução do item *a* da tarefa *Escada de Números,* os estudantes foram levados a *refletir* sobre como poderiam estabelecer uma relação entre $3+7$ com o 10 na escada de números, de modo a escrever uma expressão. Assim, os estudantes estabeleceram a igualdade $3+7=10$, fazendo o uso do sinal de igual, como pode ser observado no trecho a seguir.

L_1 A2: É... 3 mais 7 que deu 10.
L_2 Professora: Então escreva 3 mais 7.
L_3 A2: 3 mais 7. Tá.
L_4 Professora: Tem mais alguma coisa que eu possa escrever? Como eu identifico o 10 aqui? [*aponta para a figura que representa a escada de números*]
L_5 A1: Que 3 mais 7 dá 10. E o 10 está aqui em cima.
L_6 Professora: Sim. Será que tem mais alguma coisa que eu possa incrementar aqui, nessa expressão, para relacionar com o 10?
L_7 [*Estudantes em silêncio*]
$L8$ Professora: O que mais que falta para dizer, então, que dá 10?
L_9 A3: Um sinalzinho no 10.
L_{10} Professora: Que sinal?
L_{11} A4: Igual.

No trecho acima, os estudantes foram direcionados a utilizar o símbolo de igual para que estabelecessem uma relação de igualdade entre duas expressões, conceito importante para a resolução dos próximos itens da tarefa e para a construção da noção de equações.

O grupo B apresentou dúvidas durante o processo de resolução, quando discutiram e tentaram negociar significados para escrever uma *expressão* que representasse o 10, na escada de números, conforme apresentado no diálogo a seguir.

L_1 B1: Observe e escreva uma expressão que representa o 10 obtido na escada de números. O que é expressão?
L_2 B4: A professora acabou de falar.
L_3 B3: Sete x *[referindo-se à incógnita* x*]* mais dois.
[...]
L_5 B1: Como?
L_6 B3: Uma expressão que representa o 10.
L_7 B1: Não é sete *x [referindo-se à incógnita]* mais três?
L_8 B3: É!
L_9 B2: É?
L_{10} B4: É, isso é uma expressão.
L_{11} B4: Deixa eu ler a pergunta.
L_{12} B1: Sete mais três.
L_{13} B3: Ou sete mais *x*.
L_{14} B1: Mas como que vai ser sete mais *x*?
L_{15} B3: Não, o valor desse *x*.
L_{16} [*Conta do sete ao 16*]
L_{17} B3: Seria nove o valor do *x*, dezesseis mais 10, 26.
L_{18} B4: Mas tem que dar 10!
L_{19} B2: Sim!
L_{20} B3: Não tem que dar 10.
L_{21} B2: Olha ali.
L_{22} B4: Na pergunta fala.
L_{23} B3: Que representa o 10!
L_{24} B3: Então é $7x + 9$.
L_{25} B1: Não.
L_{26} B1: Porque se fosse *x,* o nove ia ficar pra fora. Não ia somar?
L_{27} B4: Não.
L_{28} B1: Ia ter que ser $7x + 9x$.

L_{29} B4: É. Então é.
L_{30} B2: Como que é?
L_{31} B4: $7x + 9x$, porque se você colocar só $7x + 9$, o nove ia ficar de fora.

Esse diálogo evidencia que os questionamentos entre os estudantes (L_5, L_7, L_{14}, L_{26}), criaram hipóteses para determinar a primeira expressão (L_3, L_7, L_{10}, L_{12}, L_{13}, L_{24}, L_{27}). Nesse primeiro momento, os estudantes concordaram que a expressão deve ser algébrica, pois manifestam conhecimentos de aulas anteriores sobre esse tipo de expressão, assim como se referem à soma de termos semelhantes (L_{28} e L_{31}). Porém, não conseguem escrever uma expressão que represente o número 10 corretamente.

Mesmo com a conclusão equivocada de que precisariam escrever uma expressão usando a incógnita x, eles encontraram o valor da incógnita x (L_{17}), por meio de operações aritméticas. Quando o grupo B foi responder o segundo item da tarefa, perceberam que havia algum equívoco na resposta do primeiro item, mas optaram por manter a resposta e solicitar o auxílio da professora/pesquisadora.

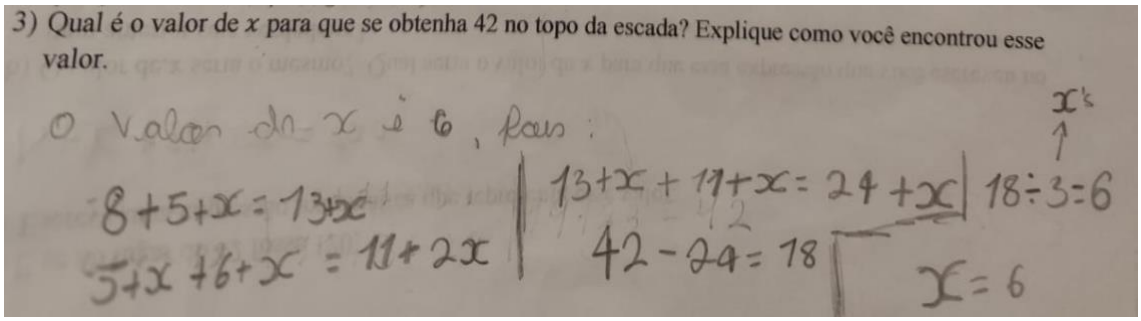
L_1 Professora: Como foi obtido esse 10 aqui? [*aponta para o 10 na folha*].
L_2 B1: 3 mais 7? Então é 3 mais 7?!
L_3 B3: Eu falei.
L_4 [*Escrevem na folha* $3 + 7$]
L_5 Professora: Falta mais alguma coisa, será, nessa expressão, que relacione com o 10?
L_6 B3: Igual?
L_7 Professora: Será que dá para usar o sinal de igual? Se usar o sinal de igual falta mais o quê?
L_8 B1: o 10.

Outra atribuição ao sinal de igual é observada quando o grupo B utilizou esse sinal de maneira incorreta no item *b* da primeira tarefa, para se referir à ordem das operações realizadas para encontrar uma expressão que representasse o 26 na escada de números, representando a expressão por 7+x=7+9=16+10=26, o que revela falta de compreensão do sentido geral do sinal de igual: a equivalência. Essa resolução foi utilizada durante o momento de *Discussão da tarefa,* quando a professora/pesquisadora chamou a atenção dos estudantes à maneira como utilizaram o sinal de igual, para que pudessem compreender que, ao utilizar o sinal de igual dessa maneira, como o grupo B, estavam afirmando que $7 + 9 = 26$. Assim, foi aproveitado o momento de discussão coletiva para que, com a colaboração de outros colegas, pudessem encontrar uma maneira de corrigir o erro. A professora/pesquisadora também aproveitou para questionar os estudantes a respeito da diferença entre $17 + x$ e $17x$.

Ao analisar a resolução da questão 3 (Figura 3) do grupo B, da tarefa *Escada de Números II*, verifica-se que o sinal de igual foi utilizado em dois contextos diferentes, conforme apontado por Ponte, Branco e Matos (2009), tanto para representar simplificações de expressões algébricas quanto como indicador de resultado de operações.

Figura 3

Resolução das questões 3, grupo B



Fonte: Acervo da pesquisadora

Na Figura 3, acima, os estudantes utilizaram o sinal de igual para simplificar as expressões algébricas, como $8 + 5 + \mathrm{x} = 13 + \mathrm{x}$ e $5 + x + 6 + x = 11 + 2x$, adicionando os termos semelhantes e simplificando as expressões, também como indicador do resultado das operações realizadas para obter o valor da incógnita x.

Apesar de não escreverem a equação $24 + 3x = 42$, pelo registro (Figura 3) também é possível concluir que dividiram 18 por 3, entendendo que a expressão continha o termo $3x$, que os estudantes se referem como $x's$. Assim, esse grupo desenvolveu uma estratégia de resolução para determinar a solução da equação, encontrando $x = 6$, o que evidencia pensamento algébrico empregado *analiticamente* (Lins, 1992; 1994; Radford, 2006; 2009), operando com o desconhecido, usando o valor da incógnita representado por x, como se fosse conhecido.

A respeito da ideia de incógnita compreendida pelos estudantes, observam-se, em momentos distintos, a compreensão desse elemento, as hipóteses levantadas e a negociação dos estudantes em relação ao valor que a incógnita assume em uma equação. No trecho a seguir, o grupo D analisou a possibilidade de a incógnita x assumir valores diferentes de 9 na tarefa *Escada de Números*. Em uma primeira hipótese, os estudantes acreditaram que, para a incógnita x assumir valor diferente da solução que já haviam encontrado, a escada de números teria que ser modificada, sendo uma escada de números

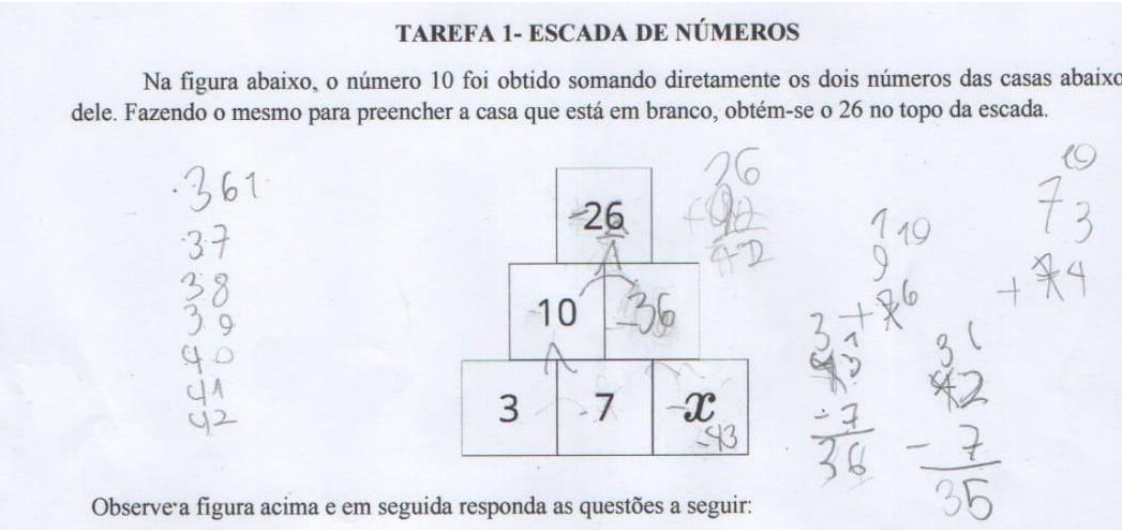
negativos, ou com o valor do topo sendo -26 (L_1, L_9, L_{10}, L_{11}). Porém, não poderiam realizar essa modificação por conta própria (L_{15}), conforme diálogo a seguir.

L_1 D2: Assim, o x tem o valor que nós descobrimos, 9, né? Mas ele pode ser...
L_2 D1: Tem que ser negativo, acho.
L_3 D2: Então, estou pensando nisso.
[...]
L_5 D2: Ele pode assumir qualquer valor.
L_6 D2: A gente já descobriu 9. Ele pode ter mais 1 ou mais 8. Ele pode ter 1 ou mais valores para poder assumir na escada.
L_7 D3: Acho que está errado, porque eu não consigo imaginar o x com outro valor.
L_8 D2: Eu também não consigo.
L_9 D2: Porque aqui, olha, ia ter que ser, talvez, um negativo x.
L_{10} D1: Então, deve ser negativo. Não vai ficar 26 negativo?
L_{11} D2: É, ia ficar 26 negativo.
L_{12} D1: Não faz mal.
L_{13} D2: Faz sim.
L_{14} D1: Então, não vira escada de número negativo? Tem que virar.
L_{15} D2: Aí que tá, ia ter que ficar negativo por padrão, não a gente fazer a escada virar negativa sozinha.
L_{16} D1: Então, não faz.

Esse grupo continuou fazendo outras tentativas, pois acreditaram que estavam pensando algo errado. Não chegando a outra solução, o grupo optou por deixar o topo da escada com um número negativo, conforme ilustra a Figura 4.

Figura 4

Cálculos realizados pelo grupo D para responder à questão d



Fonte: Acervo da pesquisadora

Analisando a Figura 4, é possível concluir que o grupo D encontrou um valor para x que, somado com 7, resultasse em -36, assumindo o valor de x como um número negativo, -43. O trecho a seguir expressa o momento em que os estudantes solicitaram auxílio da professora/pesquisadora para poder concluir esse item da tarefa.

L_1 D2: O que nós pensamos foi colocar o 43 negativo. Certo, porque 43 menos sete daria 36.
L_2 Professora: Mas se for só para o 26 positivo, teria outra possibilidade?
L_3 Professora: Isso que vocês fizeram é para o 26 negativo, mas para esse 26 positivo, tem como ser outro valor o x?
L_4 D2: Estou pensando.
L_5 Professora: Por exemplo, se o x for 10 aqui, vai dar certo?
L_6 D2: Não!
L_7 Professora: Se o x for 8?
L_8 D2: Não!
L_9 Professora: Então, qual ou quais valores x pode assumir? Pode assumir outro ou não?
L_{10} D1: Não.

Após o diálogo entre a professora/pesquisadora e os estudantes, o grupo D compreendeu que, para aquela escada de valores, a incógnita *x* não poderia assumir outros valores, conforme eles haviam suposto no início da resolução.

Referente às equações, esse grupo não formulou uma equação na primeira tarefa, mas compreendeu que, nesse tipo de situação, que mais tarde seria formalizada como equação do primeiro grau, x assume um único valor.

Para a resolução da última questão da tarefa *Escada de Números II*, que solicitava determinar o valor da incógnita *x,* se no topo da escada de números fosse o valor -36, o grupo B partiu da equação $13 + x + 11 + 2x = -36$, mas realizaram $36 - 24 = 12$, e então dividiram 24 por 3, a fim de determinar o valor para a incógnita *x,* conforme diálogo abaixo.

L_1 B3: 12 dividido por 3.
L_2 B3: É 3? É 4!
L_3 B1: 4.
L_4 B1: Aparentemente o valor de *x* é menos 4. Eu vou ver ainda. Eu não sei.
L_5 B1: Não é!
L_6 B3: Não é?
L_7 B1: Não sei!
L_8 B1: Eu fiz 36 menos 24. Daí depois eu fiz 12 dividido por 3.
L_9 B3: Está certo!

Pelo trecho de diálogo acima (L_4, L_8), B1 resolveu a equação como se fosse 36 positivo, acrescentando o sinal de menos no resultado, o que demonstra que o estudante não diferenciou a operação $-36 - 24$ de $36 - 24$, acreditando que bastava mudar o sinal do resultado. Esse grupo acreditou que trocar o sinal da solução encontrada era suficiente, quando igualaram a expressão $24 + 3x$ a 36. Assim, para -36, bastaria trocar o sinal da

solução encontrada. Ao continuarem tentando solucionar a questão, não chegaram a um acordo, pois não estavam convencidos da resposta. Então, optaram por deixar a solução como 12 positivo, já que $36 - 24 = 12$, pois não encontraram uma solução correta, e perceberam que -12 também não seria solução, até solicitarem a intervenção da professora/pesquisadora. Inicialmente, a professora/pesquisadora solicitou que o grupo testasse a solução encontrada, substituindo a incógnita x por 12 na escada de números. Percebendo que 12 não era solução da equação, o grupo B solicitou novamente auxílio.

L_1 Professora: Como que vocês acharam o 32 na questão anterior?
L_2 B1: A gente somou o 13 mais 11, que deu 24, 120 menos 24 deu 96 e dividimos 96 por 3, que deu 32.
L_3 Professora: E se você fizer a mesma coisa nessa, agora, com o 36 negativo? [*Silêncio*].
L_4 Professora: O 13 com o 11 dá quem?
L_5 B1: 24.
L_6 Professora: Tem que diminuir, então, do 36?
L_7 B1: Isso.
L_8 Professora: Escreve isso aqui [aponta para folha].
L_9 Professora: Negativo 36 com negativo 24 dá quanto? E depois dividam por três.
L_{10} Professora: Só que aqui, cuidado, é negativo 36 com negativo 24, como se vocês estivessem com duas dívidas, devo 36 e devo 24, dá quanto?
L_{11} B3: Negativo 60.
L_{12} Professora: Então agora, terminem!

Após o diálogo com a professora/pesquisadora, o grupo B conseguiu finalizar a questão, chegando na solução $x = -20$. Foi necessário a professora/pesquisadora chamar a atenção para o fato de estarem operando com dois números negativos. Talvez a analogia com a dívida não seja o mais adequado para se referir à adição de dois números negativos, mas foi a estratégia adotada pela professora/pesquisadora para que os estudantes notassem o erro que estavam cometendo.

Não identificamos em nenhum dos grupos o uso explícito de relação de equivalência entre os dois lados da igualdade. Essa discussão, de que para manter a equivalência, o que é acrescentado de um lado, deve ser acrescentado do outro, se dividimos de um lado, dividimos do outro, enfim, de que a equivalência precisa se manter, foi realizada pela professora/pesquisadora na discussão coletiva e sistematização da tarefa.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os estudantes mostraram-se comprometidos com as tarefas, que tomaram como desafiadoras, de modo que participaram ativamente das aulas, tanto nas fases de *Realização da tarefa* quanto nas fases de *Discussão da tarefa* de maneira coletiva.

A primeira tarefa, apesar de apresentar um nível de dificuldade inferior ao da segunda, oportunizou que os estudantes se engajassem a resolver a situação proposta, fazendo uso de conhecimentos prévios para que fosse possível sistematizar a ideia de equações e de incógnita.

Em vários momentos os estudantes referiram-se ao segundo membro da equação como resultado das operações realizadas no primeiro membro. Isso pode ser atribuído ao fato de que a própria tarefa fazia referência à adição dos valores dos degraus da escada de números para igualar ao valor no topo da escada.

Contudo, conforme afirmado por Ponte, Branco e Matos (2009), a interpretação do sinal de igual, a igualdade como relação de equivalência, é um conceito que não surge de maneira imediata. Assim, é necessário um trabalho prolongado e a proposição de diferentes tarefas que favoreçam que os estudantes atribuam o significado de equivalência ao sinal de igual. Ainda sobre o uso do sinal de igual, é possível observar vários significados diferentes atribuídos pelos estudantes durante a realização das tarefas, pois em determinados momentos, utilizaram o sinal de igual para simplificar expressões algébricas. Por exemplo, $11 + x + 13 + 2x = 24 + 3x$, e em outros para indicar o resultado de operações, como $18 \div 3 = 6$, o que se encaixa nos diferentes contextos do uso do sinal de igual apontado por Ponte, Branco e Matos (2009). Nesses contextos a equivalência também está presente, pois é o sentido geral do sinal de igual.

A utilização do sinal de igual de forma incorreta ocorreu nas duas tarefas, por dois grupos diferentes, a primeira vez no grupo B, na tarefa *Escada de Números*, e a segunda pelo grupo A na tarefa *Escada de Números II*. Ambas as vezes o sinal de igual foi utilizado para apresentar uma sequência de operações realizadas para resolver as equações. Os estudantes justificaram que usaram o sinal para explicar como chegaram ao resultado. Isso também remete ao fato de não ser a maneira de escrever as justificativas para as resoluções por meio de palavras, então esse foi o meio que encontraram. Isso indica que a questão de justificar, explicar as estratégias e ideias matemáticas empregadas nas tarefas é algo a ser trabalhado com os estudantes.

Em relação à ideia de incógnita, os estudantes demonstraram compreender que a letra *x* representa um valor desconhecido, assim como não monstraram dificuldades em trabalhar com a simplificação de termos semelhantes nas equações. Também evidenciaram compreender que a incógnita representa somente um valor que é a solução de uma equação polinomial do primeiro grau, e que se mudar a equação, muda a solução, independentemente da letra utilizada para representar a incógnita. Dessa forma, os

estudantes atribuíram significado ao símbolo utilizado para representar uma grandeza desconhecida, manifestando indícios de pensamento algébrico.

Ao determinar e resolver equações, os estudantes criaram modelos matemáticos, para resolver a situação proposta, assim como desenvolveram estratégias de resolução. Os estudantes manifestaram estratégias aritméticas para resolução das equações, tanto de tentativa e erro quanto utilizando operações aritméticas inversas. No segundo caso, estenderam ou generalizaram essas operações aritméticas para operar algebricamente, compreendendo os processos utilizados, o que pode ser entendido como indício de pensamento algébrico.

Alguns erros cometidos pelos estudantes indicaram incompreensões em operações aritméticas, como operações com números inteiros, que necessitam ser trabalhadas para favorecer o desenvolvimento do pensamento aritmético e do algébrico.

Desse modo, os indícios do pensamento algébrico manifestados pelos estudantes, durante as intervenções ao trabalharem com as equações polinomiais do primeiro grau, foram: (i) o uso de operações aritméticas estendidas, generalizadas para as algébricas, como operações inversas, ao manifestarem, por exemplo, que se $3x = 18$, então $x = 6$, pois 18 foi dividido por 3, também a estratégia de tentativa e erro, na qual era preciso verificar valores para satisfazer a igualdade; (ii) a construção de equações a partir das situações contextualizadas nas equações como $17 + x = 26$, $24 + 3x = 42$, $24 + 3x = 120$ e $24 + 3x = -36$, de forma a modelar e resolver problemas; (iii) a atribuição de significados aos símbolos algébricos, representando a incógnita por meio de letras, compreendendo-a como um valor desconhecido que pode ser representado por qualquer letra, como no caso das tarefas *Escada de Números* e *Escada de Números II,* em que a incógnita estava representada pela letra x; (iv) compreensão sobre a solução de uma equação, pois os estudantes manifestaram que, mantendo o valor constante em uma mesma equação, as letras poderiam ser outras. Assim, questões como *x pode ser qualquer valor?* são respondidas identificando que, em cada equação, *x* assume um valor específico, *nas contas específicas só vale um valor*; (v) o reconhecimento de que alterações na estrutura da equação resultam em alterações na solução *só mudaria se houvesse um x e um w na mesma conta,* e *ou um número*, por exemplo, ao compararem equações como $17 + x = 26$ com *17 + x = 50*; (vi) na segunda tarefa, reconheceram que, se alterado o valor do topo da escada, no segundo membro da equação, o valor da incógnita *x* seria diferente, mas podem substituir apenas o segundo membro e utilizar a mesma estratégia de resolução. Isso fica evidente quando, por exemplo, um estudante afirma que o primeiro membro da

equação é *a fórmula* para resolvê-la, mas que precisam igualar a outro valor; (vii) ao resolverem as equações, operaram de maneira analítica, pois trabalharam com o desconhecido como se fosse conhecido, já que operaram com as equações para determinar o valor de x nas escadas de números, e relacionaram esse valor com a solução de cada equação trabalhada nas tarefas; e (viii) diferenciação entre expressões, como $17x$ e $17 + x$, por exemplo, compreendendo o significado de cada expressão.

REFERÊNCIAS

Almeida, J. R. (2016). *Níveis de desenvolvimento do pensamento algébrico*: um modelo para os problemas de partilha de quantidade. Tese (Doutorado) Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática - UFRPE. Recife.

Araújo, A. J. (2009). *O ensino de álgebra no Brasil e na França*: estudo sobre o ensino de equações do 1º grau à luz da teoria antropológica do didático. Tese (Doutorado). Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de Pernambuco, Recife.

Barbeiro, E. C. C. (2012). *A aprendizagem das Equações do 1º grau a uma incógnita:* uma análise dos erros e das dificuldades de alunos do 7º ano de escolaridade. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática no 3º ciclo do Ensino Básico e Secundário) - Universidade de Lisboa, Lisboa.

Basniak, M. I, & Estevam, E. J. G. (2019). Uma lente teórica para analisar o potencial das tecnologias digitais no Ensino Exploratório de Matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*, *32*(2), 738-747.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante***,** *16*(2), 81-119.

Canavarro, A. P. (2011). Ensino Exploratório de Matemática: Práticas e desafios. *Revista Educação e Matemática*, Lisboa. 115, 11-17.

Cyrino, M. C. C. T.., & Oliveira, H. (2016). Ensino Exploratório e os Casos Multimídia na Formação de Professores que Ensinam Matemática. In: Cyrino, M. C. C. T. (Ed.) *Recurso Multimídia para a Formação de Professores que Ensinam Matemática*: elaboração e perspectivas. Londrina: EDUEL, pp. 19-32.

Fernandes, F. C. (2011). *Equações de 1º grau: Estratégias e erros na resolução e simplificação de equações de 1º grau*. Dissertação. Mestrado em Ensino da Matemática - Universidade de Lisboa, Portugal.

Freitas, M. A. (2002)**.** *Equação do primeiro grau: métodos de resolução e análise de erros no ensino médio*. Dissertação. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-PUC/SP. São Paulo.

Kaput, J. J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra 1. In Fennema, E., & Romberg, T. A. (Eds.) *Mathematics classrooms that promote understanding*. Routledge, pp. 133-155.

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In Kaput, J. J., Carraher, D., & Blanton, M. (Eds.), *Algebra in the Early Grades*. New York, pp. 5-17.

Lins, R. C. (1994). O modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico. *Dynamis*. *1*(7), Blumenau.

Lins, R. C. (1992). *A framework for understanding what algebraic thinking is*. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education. University of Nothingam, Nothingam.

Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2013). Conceptualizando o ensino exploratório da Matemática: contributos da prática de uma professora do 3.º ciclo para a elaboração de um quadro de referência. *Quadrante*, *22*(2), 29–54.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos. (2009). A. *Álgebra no Ensino Básico***.** Lisboa: DGIDC.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In *North America Conference of the International Group of Psychology of Mathematics Education – PME*. Bergen University College. v. 1.

Radford, L. (2009). Signs, gestures, meanings: Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. In *Anais Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Lyon, França.

Radford, L. (2021). O ensino-aprendizagem da álgebra na teoria da objetivação. In Moretti, V., & Radford, L. (Eds.). *Pensamento algébrico nos anos iniciais: Diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural.* Livraria da Física, pp. 171-195.

NOTAS DA OBRA

TÍTULO DA OBRA
Características do pensamento algébrico mobilizadas no trabalho com equações do primeiro grau em aulas na perspectiva do ensino exploratório de matemática

Patrícia Andressa Maieski
Mestra em Educação Matemática. Universidade Estadual do Paraná, programa de Pós-Graduação em Educação Matemática- PRPGEM, União da Vitória, Brasil.
patriciaamaiesk@gmail.com
https://orcid.org/0009-0005-2091-5712

Maria Ivete Basniak
Doutora em Educação. Universidade Estadual do Paraná, Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática, União da Vitória, Brasil
maria.basniak@unespar.edu.br
https://orcid.org/0000-0001-5172-981X

ENDEREÇO DE CORRESPONDÊNCIA DO PRINCIPAL AUTOR

Rua Expedicionário Eugênio Alves de Almeida, 196, CEP 89400-000, Porto União, SC, Brasil.
AGRADECIMENTOS
Não se aplica.

CONTRIBUIÇÃO DE AUTORIA
Concepção e elaboração do manuscrito: P. A. Maieski, M. I. Basniak
Coleta de dados: P. A. Maieski
Análise de dados: P. A. Maieski
Discussão dos resultados: P. A. Maieski, M. I. Basniak
Revisão e aprovação: M. I. Basniak

CONJUNTO DE DADOS DE PESQUISA
Todo o conjunto de dados que dá suporte aos resultados deste estudo foi publicado no próprio artigo.

FINANCIAMENTO
O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação e Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001 e do Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática – PRPGEM.

CONSENTIMENTO DE USO DE IMAGEM
Não se aplica.

APROVAÇÃO DE COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA
Não se aplica.

CONFLITO DE INTERESSES
Não se aplica.

LICENÇA DE USO – uso exclusivo da revista. Os autores cedem à **Revemat** os direitos exclusivos de primeira publicação, com o trabalho simultaneamente licenciado sob a Licença Creative Commons Attribution (CC BY) 4.0 International. Estra licença permite que **terceiros** remixem, adaptem e criem a partir do trabalho publicado, atribuindo o devido crédito de autoria e publicação inicial neste periódico. Os **autores** têm autorização para assumir contratos adicionais separadamente, para distribuição não exclusiva da versão do trabalho publicada neste periódico (ex.: publicar em repositório institucional, em site pessoal, publicar uma tradução, ou como capítulo de livro), com reconhecimento de autoria e publicação inicial neste periódico.

PUBLISHER – uso exclusivo da revista. Universidade Federal de Santa Catarina. Grupo de Pesquisa em Epistemologia e Ensino de Matemática (GPEEM). Publicação no Portal de Periódicos UFSC. As ideias expressadas neste artigo são de responsabilidade de seus autores, não representando, necessariamente, a opinião dos editores ou da universidade.

EQUIPE EDITORIAL – uso exclusivo da revista
Dr. Méricles Thadeu Moretti
Dra. Rosilene Beatriz Machado
Dra. Bárbara Cristina Basa
Dr. Eduardo Sabel
Dra. Karina Zolia Jacomelli Alves

HISTÓRICO – uso exclusivo da revista
Recebido em: 04-05-2026 – Aprovado em: 18-09-2026