

O Teorema de Tales: uma ligação entre o geométrico e o numérico

Vincenzo Bongiovanni
e-mail: Vincenzo.bongiovanni@uol.com.br
UNIBAN-SP

Resumo

O texto trata de um estudo do teorema de Tales: quando surgiu o nome teorema de Tales no ensino, como esse teorema é enunciado em diversos países, como Euclides o demonstra evitando a árdua análise do caso de segmentos incomensuráveis e como os alunos se comportam diante de sua apresentação.

Palavras-chave: Geometria euclidiana, Teorema de Tales, Prova.

Abstract

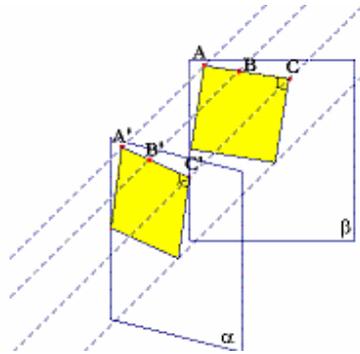
The text refers to the study of Tales theorem: when the name of this theorem came out in teaching, how this theorem is expressed in various countries, how Euclid shows it avoiding the laborious case analysis of the incommensurable segments and how students behave before its presentation.

Key-words: Euclidean geometry, Tales theorem, proof

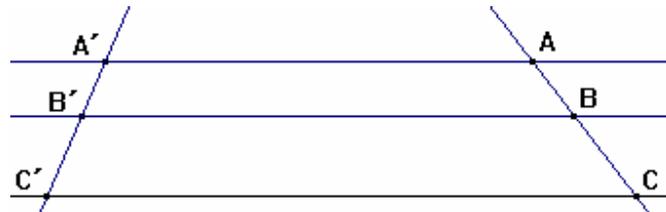
1. Introdução

Um dos teoremas centrais no estudo da geometria plana é o chamado “Teorema de Tales”, cujo enunciado clássico é: “Se um feixe de retas paralelas é interceptado por duas retas transversais então os segmentos determinados pelas paralelas sobre as transversais são proporcionais”. Esse teorema que encontra a sua origem na resolução de problemas práticos envolvendo paralelismo e proporcionalidade está no cerne da relação entre o geométrico e o numérico. Ele tem um papel fundamental na teoria da semelhança e conseqüentemente na trigonometria onde justifica as definições de seno, co-seno e tangente de um ângulo. Na geometria espacial ele aparece no tratamento das secções de um sólido por um plano paralelo à base. Na perspectiva, ele surge quando se estudam as propriedades das figuras geométricas que se conservam quando traçadas em um plano e projetadas em outro plano a partir de uma fonte no infinito; dessas propriedades (conservação do ponto médio, conservação do baricentro, conservação do alinhamento, etc.), a fundamental, é a conservação das razões das distâncias entre pontos alinhados. Na figura abaixo temos duas representações de um quadrado em dois planos distintos. Os pontos A, B e C alinhados do

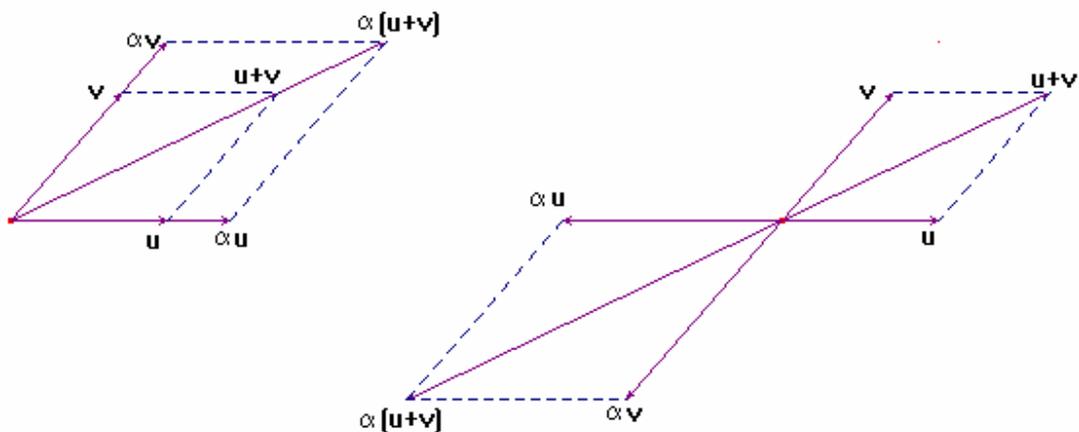
primeiro quadrado e os pontos correspondentes A' , B' e C' no outro plano têm como invariante fundamental a conservação das razões: $AC/AB=A'C'/A'B'$



Assim, a configuração abaixo, associada ao Teorema de Tales, pode também ser interpretada como três pontos de uma reta contida num plano e as suas projeções cilíndricas contidas num outro plano.



No estudo da geometria vetorial, o teorema de Tales está “escondido” na propriedade: $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha.\vec{u} + \alpha.\vec{v}$ com $\alpha \in \mathfrak{R}$. As duas configurações abaixo correspondem aos casos em que $\alpha > 0$ e $\alpha < 0$. O teorema de Tales faz-se necessário para justificar esta propriedade se não quisermos considerá-la como axioma.



Uma outra ligação importante do Teorema de Tales com outros saberes está relacionada com as representações gráficas das funções lineares e afins. Ele justifica que tais representações são retas.

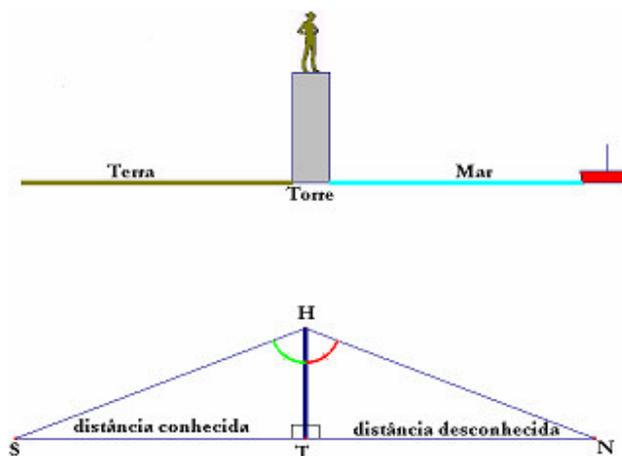
Observamos pelos exemplos dados que o Teorema de Tales corresponde a uma situação didática bastante rica em conseqüências.

2. Quem foi Tales de Mileto?

Tales de Mileto foi um filósofo grego que viveu por volta de 630 a.C. Sabe-se muito pouco a respeito de sua vida e de sua obra. “*Conjectura-se ter sido ele o criador da geometria demonstrativa. Por isto, ele é saudado como o primeiro matemático a dar uma contribuição à organização da geometria.*” (Boyer). A primeira referência que temos de Tales como iniciador do método dedutivo na matemática nos é dada pelo filósofo Proclus (420-485 D.C) no seu livro *Comentário sobre o primeiro livro dos Elementos de Euclides*. Proclus nos diz: “*Tales primeiro foi ao Egito e de lá introduziu esse estudo na Grécia. Descobriu muitas proposições ele próprio, e instruiu seus sucessores nos princípios que regem muitas outras, seu método de ataque sendo em certos casos mais geral, em outros mais empíricos.*” Proclus atribui a Tales haver afirmado ou demonstrado pela primeira vez que *um ângulo inscrito numa semicircunferência é reto; que os ângulos opostos pelo vértice são iguais; que os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais; que um círculo é dividido igualmente pelo seu diâmetro; que se dois triângulos são tais que dois ângulos e um lado de um são iguais respectivamente a dois ângulos e um lado do outro, então os triângulos são congruentes.*

Cada um desses resultados certamente deveria ser necessário para justificar ou resolver alguma situação prática. Encontramos em Proclus um provável motivo pelo qual Tales cita a última proposição (conhecido hoje como o caso ALA de congruência de triângulos). Proclus diz que “*Eudemo (320a.C)*, no seu livro *História da Geometria* atribui a Tales esse teorema para determinar a distância que um barco se encontra da costa.”

Podemos supor como Tales teria feito para medir a distância terra-barco. A partir de um instrumento (quadrante, duas hastes articuladas,...) Tales poderia ter medido o ângulo (Homem, barco, pé da torre). A seguir, sem mudar o ângulo, poderia ter girado o instrumento de meia-volta, pedindo a alguém que marcasse no chão do outro lado o ponto para o qual o instrumento estaria apontado. A igualdade de visões implicaria na igualdade das distâncias. Michel Serres comenta: “*A geometria resulta de um artifício, de um desvio, cujo caminho indireto permite o acesso àquilo que ultrapassa uma prática imediata.*” O artifício, aqui, consiste em produzir um modelo reduzido. Desenham-se os triângulos HTN e HTS para explicar e interpretar a realidade. O teorema ALA é utilizado para justificar que os triângulos são congruentes, e concluir que a medida TS conhecida é igual à medida TN desconhecida. Diz Serres “*medir o inacessível consiste em reproduzi-lo ou imitá-lo no acessível.*”

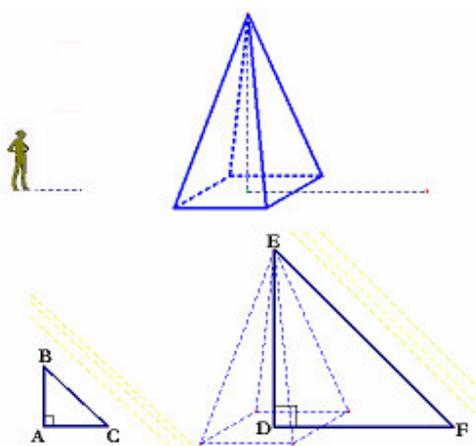


Auguste Comte por sua vez escreve “*---devemos considerar como suficientemente verificada a impossibilidade de determinar, pela medição direta, a maioria das grandezas que desejamos conhecer. É este fato de caráter geral que necessita da formação da ciência matemática. Pois ao renunciar, em quase todos os casos, à medição imediata das*

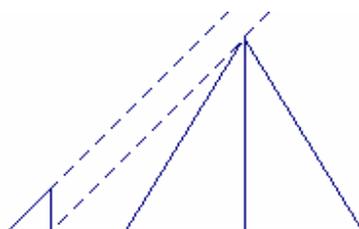
grandezas, o espírito humano teve de procurar determiná-las indiretamente, e foi assim que foi levado à criação das matemáticas.”

Citamos outras fontes que falam da atividade matemática realizada por Tales.

O historiador Diógenes Laércio (século III D.C) nos informa que: “Hierônimos (discípulo de Aristóteles) diz que Tales mediu as pirâmides pela sombra, depois de observar o tempo que a nossa própria sombra demora a ficar igual à nossa altura.” Nesse caso, a astúcia a qual se refere Michel Serres estaria em construir uma pirâmide reduzida em suas demensões: “*Para alcançar uma altura inacessível, Tales inventa a escala.*”



O historiador Plutarco (Século I D.C) dá um outro relato a respeito da medição da altura da pirâmide feita por Tales. Ele diz que “...limitando-te a colocar o bastão no limite da sombra lançada pela pirâmide, gerando o raio de sol tangente aos dois triângulos, demonstraste que a relação entre a primeira sombra e a segunda era a mesma que entre a pirâmide e o bastão.” Baseado nesse relato pode-se representar a situação da seguinte maneira:



Percebe-se que este relato é mais geral que o outro.

A pergunta que paira no ar é se esses textos que tratam da sombra da pirâmide descrevem apenas uma aplicação do teorema de Tales ou, pelo contrário, a sua origem?

3. O surgimento do nome “Teorema de Tales”

A questão da proporcionalidade era de grande importância para os gregos, principalmente na arquitetura e agrimensura. Por isso, conjectura-se que a primeira sistematização da geometria pode ter sido em torno da questão da proporcionalidade de segmentos determinados por um feixe de retas paralelas e outro de retas transversais. Essa questão durante muitos séculos foi denominada de teorema dos segmentos proporcionais. No final do século XIX, na França, alguns autores denominaram esse resultado de teorema de Tales, denominação que persiste até hoje.

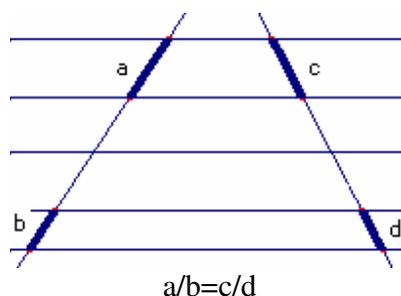
A primeira publicação de que se tem notícia e que substituiu o nome de “teorema dos segmentos proporcionais” pelo “Teorema de Tales” é o livro francês *Éléments de géométrie* de Rouche e Comberousse (reedição de 1883).

Em alguns países como por exemplo a Alemanha, o nome Teorema de Tales é dado a um outro enunciado: “todo triângulo inscrito numa semicircunferência é retângulo”.

4. Outros enunciados do teorema de Tales

Na Itália ele é chamado de *Teorema de Talete* e é apresentado da seguinte maneira :
“*I segmenti staccati da un fascio di rette parallele su due trasversali sono direttamente proporzionali.*” (Os segmentos determinados por um feixe de retas paralelas sobre duas transversais são diretamente proporcionais.)

Obs: o enunciado destaca a razão é entre dois segmentos de uma mesma transversal.

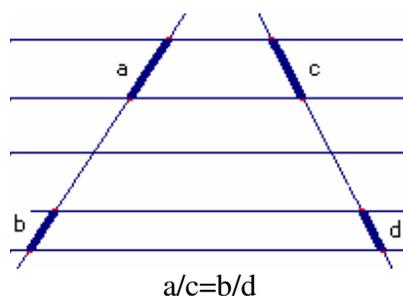


Na Espanha temos um outro enunciado para o *Teorema de Tales* :

“Si cortamos dos rectas cualesquiera, por varias retas paralelas, los segmentos correspondientes determinados en ambas, son proporcionales.”

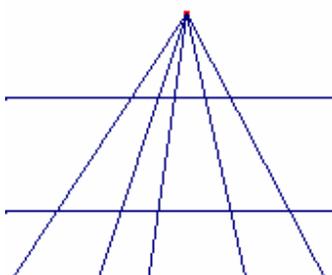
(Se cortamos duas retas quaisquer por várias retas paralelas, os segmentos correspondentes determinados em ambas são proporcionais.)

Obs: O enunciado destaca que a razão é entre dois segmentos correspondentes de duas retas transversais.

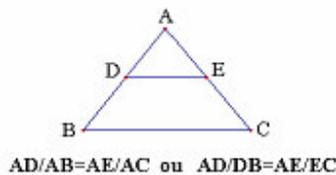


Na Alemanha o *Teorema de Tales* é chamado teorema dos feixes de retas concorrentes : “se um feixe de retas concorrentes é cortado por duas retas paralelas então a razão entre as medidas dos segmentos determinados por uma reta do feixe é igual à razão entre as medidas dos segmentos correspondentes determinados sobre qualquer outra reta do feixe.”

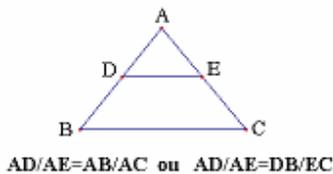
Obs: O enunciado destaca, como na Itália, que a razão é entre dois segmentos de uma mesma transversal. Contudo, enquanto na Itália são duas retas transversais e um feixe de retas paralelas, na Alemanha são duas retas paralelas e um feixe de retas concorrentes.



Na França, é comum a apresentação do *Teorema de Tales* a partir de um triângulo e três pontos de vista são considerados. No primeiro ponto de vista, a razão é considerada apenas entre segmentos da mesma transversal



No segundo ponto de vista (razão entre as projeções), a razão é considerada entre um segmento e a sua projeção na outra transversal



No terceiro ponto de vista, a razão é considerada como a razão de homotetia entre os dois triângulos.



Obs: Chama-se homotetia de centro O e razão k (k real diferente de zero) a uma transformação do plano em si mesmo que associa a cada ponto P do plano um ponto P' do plano tal que $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$

(Dizer que $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$ implica dizer que O , P e P' são alinhados)

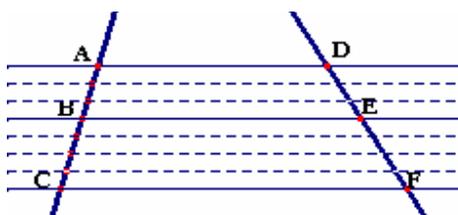
5. A demonstração do Teorema de Tales

Em nível do Ensino Fundamental ou Médio, uma opção para demonstrar o teorema de Tales seria a prova incompleta dos pitagóricos que supõe todos os segmentos comensuráveis. (Dois segmentos AB e CD são comensuráveis se existem um segmento u e dois inteiros m e n tais que $AB=m.u$ e $CD=n.v$). Em geral, os textos didáticos apresentam essa demonstração “escondendo” o caso dos segmentos serem incomensuráveis visto que nesse caso haveria necessidade da construção da reta real e dos números reais. O Exame Nacional de Cursos realizado em 1999 apresentou uma questão específica, relacionada com o Teorema de Tales, para os formandos de licenciatura em matemática. Segue a questão:

Questão do Exame Nacional de cursos de 1999

Teorema de Tales

“Se três retas paralelas r, s e t cortam duas transversais m e n nos pontos A, B, C, D, E, F , respectivamente, então as razões AB/BC e DE/EF são iguais.” (ver figura)



A demonstração do Teorema de Tales usualmente encontrada nos textos para o ensino fundamental segue duas etapas

I- Prova-se que, se $AB=BC$, então $DE=EF$.

II- Supondo que $AB \neq BC$, considera-se um segmento de comprimento u tal que:

$AB=p \cdot u$ e $BC=q \cdot u$, sendo $p, q \in \mathbb{N}$, $p \neq q$.

Utiliza-se, então, o resultado da etapa I para concluir que as paralelas pelos pontos de subdivisão de AB e BC dividirão também DE e EF em partes iguais (de comprimento u). Daí, conclui-se que: $AB/BC = p/q = DE/EF$

a) Este tipo de demonstração abrange os casos nos quais AB/BC é natural ? racional ? real qualquer ? Justifique.

b) Cite dois exemplos de conteúdos da geometria elementar cujo ensino utilize o Teorema de Tales

O padrão de resposta esperado pela banca examinadora era:

a) Abrange o caso em que a razão AB/BC é racional que é, exatamente, o caso tratado na segunda parte da demonstração apresentada. Os casos em que AB/BC é natural são casos particulares dos racionais, quando p é múltiplo de q . No entanto, se AB/BC não é racional, não existirá nenhum segmento que esteja contido um número inteiro p de vezes em AB e um número inteiro q de vezes em BC (AB e BC são incomensuráveis). Assim, a demonstração dada não se aplica.

b) Exemplos:

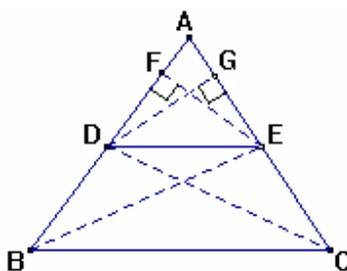
-Estudo de semelhança de figuras: demonstração dos casos de semelhança de triângulos, teorema da base média do triângulo, etc...

-Construções com régua e compasso: divisão de segmentos em partes iguais ou numa razão dada, obtenção da quarta proporcional, etc...

-Demonstrações dos teoremas das bissetrizes interna e externa de um triângulo, etc...

A primeira demonstração conhecida do Teorema de Tales, aparece três séculos após Tales, na proposição 2 do livro VI dos *Elementos de Euclides* (300 a.C) e se apóia na teoria das proporções de Eudoxo apresentada no livro V de Euclides. O livro *Geometria Moderna* de Moise Downs (vol 1, capítulo 12, página 307) apresenta uma demonstração do teorema de Tales, a nível elementar, pelo método das áreas. A passagem por “objetos de dimensão 2” (áreas) para estabelecer uma propriedade relacionada com “objetos de dimensão 1” (segmentos) evita o problema da natureza dos números. A demonstração pelo método das áreas não segue um caminho natural mas é uma prova completa e convincente. Vale lembrar que essa demonstração necessita apenas do conhecimento que a área de um retângulo é igual ao produto das medidas dos dois lados tomados na mesma unidade. No entanto, deve-se ressaltar que esse resultado costuma ser postulado pois que a sua demonstração é tão difícil quanto a análise do caso dos segmentos incomensuráveis.

Segue a prova do teorema de Tales pelo método das áreas. Sejam ABC um triângulo e D um ponto entre A e B. Tracemos pelo ponto D uma reta r paralela ao lado BC com $r \cap AC = \{E\}$. Provemos que $AD/DB=AE/EC$.



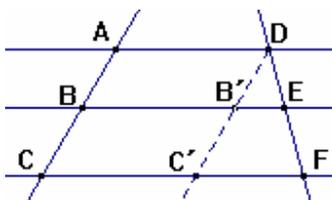
A área do triângulo ADE pode ser calculada de duas maneiras $AD.EF/2$ ou $AE.DG/2$

Da igualdade das duas expressões conclui-se que $AD.EF=AE.DG$ (1)

Os triângulos BDE e CED têm áreas iguais (mesma base DE e mesma altura). Logo $DB.EF/2=EC.DG/2$ (2)

De (1) e (2) vem: $AD/AE=DB/EC$ ou $AD/DB=AE/EC$

O caso em que os segmentos AC e DF (vide figura abaixo) formam um trapézio, recai-se no caso anterior mediante a construção de uma reta paralela a AC pelo ponto D.



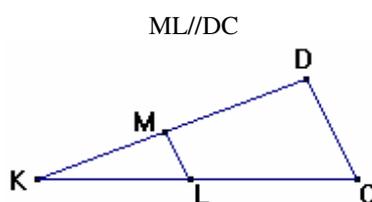
Nesse caso teremos $DB'/B'C'=DE/EF$ e como $AB=DB'$ e $BC=B'C'$ tem-se $AB/BC=DE/EF$.

6. O ensino do teorema de Tales

Charalambos Lemonidis, no artigo “Diferentes apresentações matemáticas e o comportamento dos alunos face ao Teorema de Tales” analisa a solução de duas questões propostas a 112 alunos no início primeira série do Ensino Médio para examinar como o Teorema de Tales foi ensinado no ano anterior (8ª série).

Primeira questão

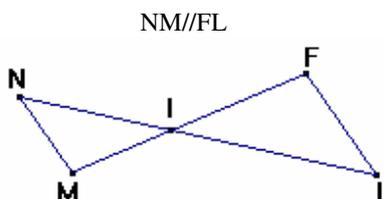
O croqui abaixo serve para desenhar uma figura para a qual teremos as seguintes dimensões: $KM=3\text{cm}$, $KD=7\text{cm}$, $KC=5,5\text{cm}$ e $ML=2\text{cm}$.



- Achar as medidas KL e DC sem desenhar a figura.
- O perímetro do triângulo KDC é vezes o perímetro do triângulo KML
- Com a condição dada $ML//DC$ achar todas as relações que vocês conhecem entre os segmentos da figura acima.

Segunda questão

O croqui abaixo serve para desenhar uma figura para a qual teremos as seguintes dimensões: $NM=2\text{cm}$, $IM=3\text{cm}$, $IF=5\text{cm}$ e $IL=4\text{cm}$.



- d) Achar as medidas IN e FL sem desenhar a figura.
- e) O perímetro do triângulo IFL é ... vezes o perímetro do triângulo IMN
- f) Com a condição dada $NM//FL$ achar todas as relações que vocês conhecem entre os segmentos da figura acima

Os alunos pesquisados relacionaram quatro tipos de razões. Apresentamos o percentual de alunos que escreveram corretamente cada uma das razões

	$KM/KD=KL/KC=ML/DC$	$KM/ML=KD/DC$	$KM/KL=MD/LC=KD/EC$	$KM/MD=KL/LC$
Configuração tipo cone	53,5%	4,5%	13,5%	10,5%

	$IN/IL=IM/IF=NM/FL$	$IM/MN=IF/FL$	$IN/IM=IL/IF=NL/MF$	$NI/NL=MI/MF$
Configuração tipo borboleta	43,5%	5,5%	9%	13,5%

Para a configuração do tipo cone o erro mais freqüente é escrever $KD/KC=ML/DC$ ou $ML/DC=LC/MD$. A pesquisa mostra que há mais erros para as fórmulas da configuração tipo borboleta do que da configuração tipo cone. Para a configuração do tipo borboleta os erros mais comuns são escrever as falsas relações: $IN/IF=IM/IL$ ou $FL/NM=IM/IF$ ou $IN/IL=IF/IM$ ou $NL/NI=MF/MI=FL/NM$ ou $FL/NM=IF/IL$ ou $FL/NM=MF/NL$

Lemonidis conclui a pesquisa sugerindo que os professores levem em consideração os seguintes fatores para o ensino o Teorema de Tales:

- o Teorema de Tales deve ser tratado simultaneamente nos três registros: figurativo (as diferentes configurações), simbólico (fórmulas de igualdade de razões) e numérico (substituição das letras por números).

-Fazer variar o registro figurativo durante a aprendizagem do teorema de Tales (configuração tipo cone e configuração tipo borboleta).

-as configurações apresentadas acima são uma forma rica figurativamente pois contém vários tipos de razões e isto permite fazer a distinção entre elas, utilizando o registro numérico dessas razões. Ao contrário, isto não seria possível com a configuração de duas retas que cortam várias retas paralelas.

7. Bibliografia

POLCINO, F.C. A geometria na Antiguidade Clássica. São Paulo: FTD,1999

MOISE DOWNS, geometria moderna, Editora Edgard Blucher Ltda, 1971

SERRES M. As origens da geometria, Terramar,1997

BOYER, C. B. *História da Matemática*. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1996.

EUCLIDES, Les Éléments, volume 2, PUF,1994 Tradução Bernard Vitrac

LIMA, E. L. *Medida e Forma em Geometria*. Coleção do Professor de Matemática, Sociedade de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA/VITAE, 1991.

AVILA, G. RPM 7 pg 5 a 10

PROCLUS de Lycie, les Commentaires sur le premier livre des Éléments d'Euclides, IREM de Lille, 1948.

Nobre, S. Introdução à História da História da Matemática. Revista Brasileira de História da Matemática, vol 2 N°3

Lecture Didactique des nouveaux programmes de Math, IREM de Grenoble,1999

Autour de Thales, Commission Inter-IREM Premier Cycle

Site: www.inep.gov.br (Provão 1999)