O Teorema de Pitágoras segundo a dialética ferramenta-objeto

Ana Paula Jahn
anapjahn@gmail.com
UNIBAN/SP

Vincenzo Bongiovanni
vincenzo.bongiovanni@uol.com.br
UNIBAN/SP

Resumo: neste artigo, descrevem-se sinteticamente as fases de organização para a construção de conceitos matemáticos segundo a dialética ferramenta-objeto introduzida por R. Douady. Esse tipo de organização enfatiza a importância de se alternar, no ensino, os aspectos ferramenta e objeto de uma dada noção matemática, fornecendo ainda princípios metodológicos interessantes para o professor. Um exemplo de tal organização é apresentado no campo da Geometria, e mais precisamente, relativo ao Teorema de Pitágoras.

Palavras-chave: Didática da Matemática; Dialética ferramenta-objeto; Teorema de Pitágoras.

Le théorème de Pythagore selon la dialectique outil-objet

Résumé : dans cet article, les phases d'organisation pour la construction de concepts mathématiques selon la dialectique outil-objet, introduite par R. Douady, sont décrites de manière synthétique. Ce type d'organisation souligne l'importance, dans l'enseignement, de présenter les aspects outil et objet d'une notion mathémtiques visée, en fournissant quelques principes méthodologiques pour l'enseignant. Un exemple de telle organisation est présenté dans le cadre de la Géométrie et plus précisément concernant le théorème de Pythagore.

Mots clés : Didactique des Mathématiques; Dialectique outil-objet ; Théorème de Pythagore.

Régine Douady, pesquisadora francesa, na sua tese de doutorado intitulada *Jogo de quadros e dialética ferramenta-objeto*[1] (Douady, 1986) apresenta uma organização para a construção de conceitos em Matemática. Podemos resumir esta organização da seguinte maneira: uma seqüência de atividades fazendo alternar os aspectos ferramenta e objeto da noção visada, uma fase de institucionalização, seguida de exercícios variados de familiarização que necessitam das noções recentemente institucionalizadas e sua reutilização em uma nova situação. De acordo com a autora, essa organização pode ajudar na construção de conhecimentos matemáticos pelos alunos. Nessa perspectiva, descrevemos abaixo as fases para a construção de um conceito:

- <u>Fase 1</u>: Inicialmente, o problema apresentado deve mobilizar conhecimentos **antigos** dos alunos. Mas, tais conhecimentos se mostram **insuficientes** para resolver completamente o problema. Em outras palavras, os alunos devem usar conceitos e ferramentas explícitas (já conhecidas) para resolver parte do problema.

- <u>Fase 2</u>: O problema proposto necessita de um **novo conceito** para ser resolvido. O novo conceito é a ferramenta adequada para resolver o problema. Uma mudança de quadro nessa fase desempenha um papel importante no desenvolvimento da dialética e pode favorecer a ampliação dos conhecimentos antigos dos alunos para produzir o conceito novo.

- <u>Fase 3</u>: Institucionalização do objeto a ser ensinado a partir das soluções e das produções dos alunos em situação. Esta fase é chamada de **institucionalização local** e é baseada na discussão das resoluções dos alunos, devidamente explicitadas e registradas.

- <u>Fase 4</u>: É a fase na qual o professor identifica os conhecimentos que podem constituir novos saberes. **Institucionaliza-se** o objeto a ser ensinado dando-lhe status de objeto matemático. Com isso, o que era ferramenta (implícita) passa a ser objeto. Nessa fase, o conceito é descontextualizado.

- <u>Fase 5</u>: Utilizam-se as noções institucionalizadas como ferramentas para resolver novas situações.

[1] Traduzido por nós do original em Francês.

- Fase 6: Reutiliza-se o conceito como ferramenta numa situação mais complexa. Essas duas últimas fases correspondem à **familiarização** e **re-utilização** das ferramentas, bem como à complexificação da tarefa ou a proposição de um novo problema.

Neste artigo, pretendemos apresentar uma organização dessa natureza no quadro da Geometria. O assunto a ser ensinado refere-se ao **teorema de Pitágoras** e uma situação inicial é proposta a seguir.

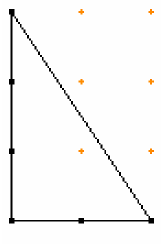
a) Construir um triângulo retângulo de catetos 2 cm e 3 cm. A seguir, obter um valor aproximado da hipotenusa.

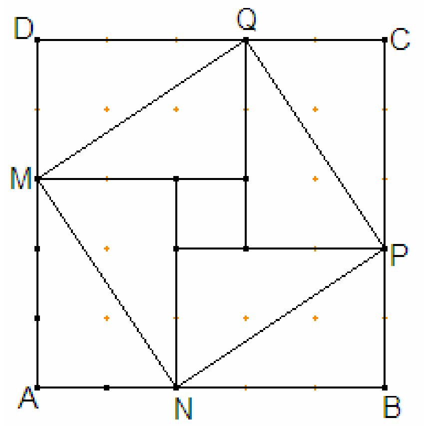
b) Obter o valor exato da hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos 2 cm e 3 cm.

A partir daí, é possível analisar diferentes fases que podem ser desenvolvidas segundo a dialética citada.

Fase 1: O problema apresentado mobiliza alguns conhecimentos **antigos** dos alunos, supondo que estes saibam construir um triângulo retângulo de catetos 2 cm e 3 cm e utilizar uma régua para obter um valor aproximado (via medida) da hipotenusa. Mas, tais conhecimentos mostram-se **insuficientes** para resolver completamente o problema, pois a estratégia para o primeiro item, não permite obter o valor exato da hipotenusa no segundo.

Fase 2: O problema proposto necessita de um novo objeto para ser resolvido, no caso, uma nova propriedade. Essa propriedade é o teorema de Pitágoras que se supõe ainda não conhecido dos alunos. Uma mudança do quadro numérico para o quadro geométrico é desejável, pois pode favorecer a ampliação dos conhecimentos antigos dos alunos para produzir o novo. O professor pode provocar essa mudança de quadro propondo a atividade a seguir.

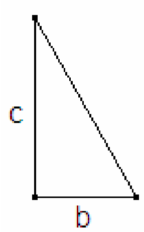


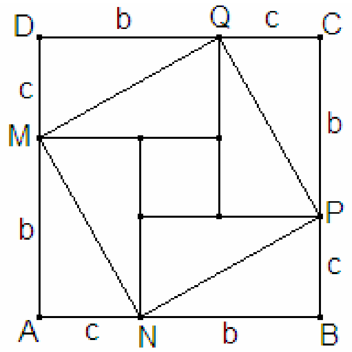


Calcular a hipotenusa de um triângulo retângulo de catetos 2 cm e 3 cm utilizando a figura ao lado que foi construída justapondo 8 triângulos retângulos de catetos 2 cm e 3 cm e um quadrado de lado 1 cm conforme.

A solução esperada envolve a determinação de áreas de sub-figuras. A área do quadrado ABCD é 25 cm² e a área do triângulo retângulo é 3 cm². A área do quadrado MNPQ é 25cm²-12cm²=13cm². Portanto, o lado do quadrado é $\sqrt{13}$ cm.

<u>Fase 3</u>: Nesta fase de institucionalização local, pode-se enfocar o desenvolvimento abaixo, introduzindo um registro algébrico das relações e cálculos efetuados na fase anterior.



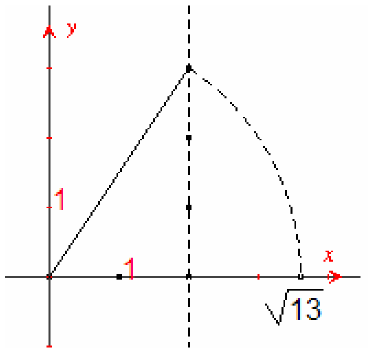


A área do quadrado ABCD é (c+b)² cm². A área do triângulo retângulo é $\frac{bc}{2}$ cm². A área do quadrado MNPQ é (c+b)²- 4. $\frac{bc}{2}$, isto é, b²+c². Portanto, o lado do quadrado será $\sqrt{b^2+c^2}$.

<u>Fase 4</u>: Institucionaliza-se para um triângulo retângulo qualquer. Sendo *a* a medida da hipotenusa e *b* e *c* as medidas dos catetos de um triângulo retângulo, numa mesma unidade de medida, temos

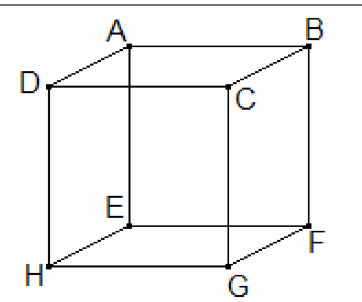
que a=$\sqrt{b^2+c^2}$ ou que $a^2=b^2+c^2$. Portanto, em qualquer triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas
dos catetos. Aqui, o trabalho deve focar a propriedade como objeto de estudo.

<u>Fase 5</u>: Uma vez introduzida e formulada a "nova" propriedade, essa deve ser usada como ferramenta na resolução de um novo problema. Por exemplo, num sistema de coordenadas cartesianas, construir um ponto de abscissa $\sqrt{13}$.

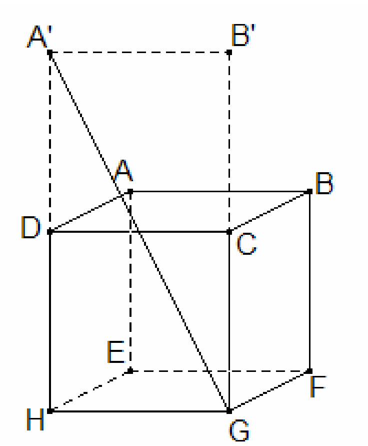


Nessa situação, as áreas desaparecem para dar importância ao comprimento da hipotenusa, em um quadro analítico (sistemas de eixos e coordenadas de pontos).

<u>Fase 6</u>: Nesta etapa, objetiva-se a reutilização da propriedade em uma situação mais complexa. Uma possibilidade pode ser implementada em relação ao problema citado abaixo.

	*Uma formiga mora na superfície interna de um cubo de aresta 1 m. Qual é a menor distância a ser percorrida pela formiga para ir do vértice A ao vértice oposto G?*

Uma estratégia para determinar o caminho mais curto é rebater a face ABCD no plano frontal e aplicar o teorema de Pitágoras no triângulo A'GH. Os cálculos mostram que A'G=$\sqrt{5}$ cm, pois se tem $A'G^2=A'H^2 + HG^2=2^2 + 1^2$.



Temos apresentado e discutido o interesse ou potencial desse tipo de organização em algumas experiências de formação continuada de professores de Matemática, visando à concepção colaborativa de seqüências de ensino. Com este tipo de proposta – simplificando o modelo para torná-lo mais funcional - é possível focar o papel do professor, em particular na fase de institucionalização, normalmente interpretada de forma equivocada pelos professores. Além disso, na concepção das atividades das diferentes fases, o professor é incentivado a refletir sobre a articulação de diferentes quadros e representações, bem como sobre diferentes aplicações dos conceitos e das propriedades em estudo. Em termos metodológicos, julgamos este aspecto bastante favorável para o desenvolvimento profissional docente.

Referências bibliográficas

REGINE, D. (1986) Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques* (RDM), Vol. 7.2, pp. 5-31.

MARANHÃO, M. C. S. A. (1999) Dialética Ferramenta Objeto. In Machado, S. A. D. (org.) *Educação Matemática: uma introdução*. 1ª Ed. São Paulo: EDUC, pp. 115-134.