http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n1p118

Abordagem cognitiva de problemas de geometria em termos de congruência[1]

Raymond Duval

Professor Emérito da *Université du Littoral Côte d'Opale/França*

Tradução: Méricles Thadeu Moretti

PPGECT/MTM/UFSC

mericles@mtm.ufsc.br

Resumo

As atividades de construção de figura foram desenvolvidas com base em um duplo objetivo: reintroduzir as figuras após a reforma iconoclástica das matemáticas modernas, que havia proibido de ver para compreender, e justificar didaticamente a necessidade de um vocabulário preciso para descrever, raciocinar e demonstrar. Mas, ver uma figura em geometria é uma atividade cognitiva mais complexa do que o simples reconhecimento daquilo que uma imagem mostra. Isto depende do papel que a figura tem na atividade matemática. Neste artigo, serão evidenciadas três maneiras diferentes de ver as figuras segundo o seu papel: a apreensão perceptiva, a apreensão operatória e a apreensão discursiva. Elas são totalmente independentes umas das outras. A apreensão perceptiva é o reconhecimento visual imediato da forma. Preconizar-se-á o motivo pelo qual este reconhecimento impõe a não modificação apenas para certas formas, ao contrário de uma dada figura onde é possível ocorrer alguma mudança. A utilização de figuras para encontrar a solução de um problema exige, ao contrário, que se possa transformar uma figura em outra. O presente trabalho mostra que diferentes tipos de operações visuais dão às figuras potencialidades heurísticas. A apreensão discursiva depende das hipóteses que a figura representa. Ela implica uma utilização de um vocabulário que é a condensação das definições. A separação destas três apreensões é fundamental para analisar a atividade geométrica e as dificuldades dos alunos. Por um lado, a resolução de problemas exige que os alunos possam passar de um tipo a outro de apreensão. Por outro lado, a dificuldade dos problemas propostos depende dos fenômenos de congruência entre os enunciados e a apreensão operatória, assim como entre os enunciados e a apreensão discursiva.

Résumé

Les tâches de construction de figure ont été développées dans un double objectif. Réintroduire les figures après la réforme iconoclaste des mathématiques modernes qui avait interdit de voir pour comprendre, et justifier didactiquement la nécessité d'un vocabulaire mathématique précis pour décrire, raisonner et prouver. Mais voir une figure en géométrie est une activité cognitive plus complexe que la simple reconnaissance de ce que montre une image. Cela dépend du rôle qu'elle doit joue dans l'activité géométrique. Dans cet article nous mettrons en évidence trois manières différentes de voir les figures selon le rôle de la figure: l'appréhension perceptive,

[1] Este texto é uma tradução do artigo: DUVAL, R. Approche cognitive des problèmes de geométrie en termes de congruence. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, v.1, p. 57-74, IREM de Strasbourg, 1988. Algumas adaptações de forma no texto original foram produzidas para adequar as normas da ABNT além do resumo reformulado e algumas precisões acrescentadas pelo autor.

l'appréhension opératoire et l'appréhension discursive. Elles sont totalement indépendantes l'une de l'autre. L'appréhension perceptive est la reconnaissance visuelle immédiate de formes. Nous indiquerons pourquoi cette reconnaissance impose seulement certaines formes qui ne peuvent être changées en d'autres cependant possibles dans une figure donnée. L'utilisation de figures pour trouver la solution d'un problème exige au contraire que l'on puisse transformer une figure donnée en une autre. Nous montrerons les différents types d'opérations purement visuelles qui donnent aux figures leur potentialité heuristique. L'appréhension discursive dépend d'hypothèses qui déterminent ce que la figure représente. Elle implique l'utilisation d'un vocabulaire qui est la condensation de définitions. La séparation de ces trois types d'appréhension est fondamentale pour analyser l'activité géométrique et les difficultés des élèves. D'une part la résolution de problèmes exige que les élèves puissent sauter d'un type d'appréhension à l'autre. D'autre part la difficulté des problèmes donnés dépend des phénomènes de congruence et de non congruence entre les énoncés et l'appréhension opératoire comme entre les énoncés et l'appréhension discursive.

Abstract

Tasks of figure construction were developed for two purposes. Reintroduce the figures after the iconoclastic reform of modern mathematics, which had forbidden from seeing figures for understanding, and didactically justify the need for an accurate mathematical vocabulary to describe, to deduce and to prove. But seeing a figure in geometry is a cognitive activity more complex than recognizing what an image shows. It depends on the role it should play in the geometric activity. In this paper we highlight three different ways to see figures according to the role of the figure: perceptual apprehension, operative apprehension and discursive apprehension. They are completely independent from each other. Perceptual apprehension is the instantaneous visual recognition of shapes. We indicate why this recognition emphasizes only some shapes, which cannot be switched to others however possible in a given figure. Using figures to find out how to solve a problem requires on the contrary that we can transform any given figure into another. We show that different kinds of operations purely visual give heuristic potentialities to figures. Discursive apprehension depends on hypotheses that set what the given figure represents. It involves using a vocabulary, which is the condensation of definitions. The separation of these three kinds of apprehension is crucial for analyzing any geometric activity and difficulties in geometry learning. On the one hand problem solving requires students to be able to jump from one kind of apprehension to another. On the other hand, the difficulty of problems given to students depends on phenomena of congruence and non-congruence the perceptive apprehension, the operative apprehension and the discursive apprehension of figures.

1. Introdução

Os problemas em geometria apresentam grande originalidade em relação a muitos outros problemas em matemática que podem ser propostos aos alunos:

> - por um lado, a sua resolução exige uma forma de raciocínio que implica referência a uma axiomática local, mas que se desenvolve no registro da língua natural. Esta forma de raciocínio conduz o desenvolvimento de um tipo de discurso que funciona por substituição, como se tratasse de uma língua formalizada, ainda que situado em um registro em que o discurso é construído de modo natural por associação e por acumulação. Ora, nestes dois modos de funcionamento, a coerência não repousa sobre as mesmas regras de organização do discurso. Os problemas de geometria exigem, deste modo, uma forma de expressão que não repousa na oposição geralmente feita entre a língua natural e as línguas formalizadas. R. Thom já havia chamado a atenção para esta característica da geometria: ela é um intermediário natural e talvez insubstituível entre a língua usual e a língua formalizada. (THOM, 1972, p. 232).

- por outro lado, a heurística de problemas de geometria refere-se a um registro de representações espaciais que originam formas de interpretações autônomas. Entre estas interpretações distinguiremos: as apreensões perceptiva, operatória, discursiva e sequencial das figuras. A apreensão sequencial é explicitamente solicitada em atividades de construção ou em atividades de descrição, tendo por objetivo a reprodução de uma dada figura.

As orientações didáticas destes últimos anos concederam certa importância a estas atividades, na esperança de melhor preparar os alunos para a forma de desenvolvimento do raciocínio que os problemas em geometria exigem. Em compensação, as três primeiras formas de apreensão nem sempre são claramente distinguidas. Elas mesmas são confundidas quando se afirma que as figuras constituem “um dado subjacente intuitivo” ou “um suporte à intuição no percurso da pesquisa”. (THOM, p. 228) e (BESSOT, p. 35).

Portanto, a resolução de problemas em geometria e a entrada nesta forma de desenvolvimento do raciocínio que esta resolução exige, depende da **conscientização da distinção, quer dizer, da conscientização da oposição entre as três primeiras formas de apreensão das figuras.** No entanto, isto constitui não mais do que um aspecto do modo de raciocinar geométrico. Existe outro aspecto que diz respeito ao estatuto de “intermediário natural” do modo de raciocinar em geometria: **raciocínio que não funciona como a argumentação do pensamento natural, se bem que utiliza os recursos da linguagem natural**. Então, uma análise das funções cognitivas subjacentes às atividades de demonstração em geometria aparece realmente necessária para orientar o ensino. Nas páginas que seguem, será apresentada não mais do que uma primeira abordagem.

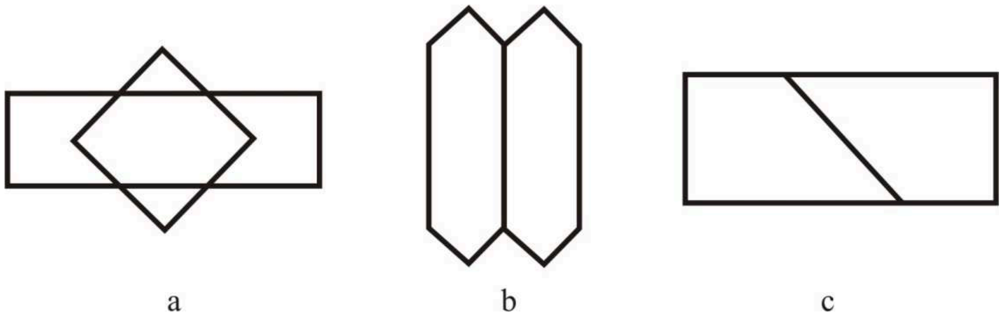
2. Apreensão perceptiva de formas e interpretação figural de uma situação geométrica

Não importa qual figura desenhada no contexto de uma atividade matemática, ela é objeto de duas atitudes geralmente contrárias: uma imediata e automática, a apreensão perceptiva de formas; e outra controlada, que torna possível a aprendizagem, a interpretação discursiva dos elementos figurais. Estas duas atitudes encontram-se, geralmente, em conflito, porque **a figura mostra objetos que se destacam independentemente do enunciado, assim como os objetos nomeados no enunciado das hipóteses não são necessariamente aqueles que aparecem espontaneamente.** O problema das figuras geométricas está inteiramente ligado à diferença entre a apreensão perceptiva e uma interpretação necessariamente comandada pelas hipóteses.

2.1. Uma lei de tratamento que rege a organização perceptiva das figuras

Uma figura é uma organização de elementos de um campo perceptivo, não homogêneo, que constitui um objeto que se destaca deste campo. Segundo a sua dimensão, estes elementos podem ser pontos, traços ou zonas. Os pontos e os traços caracterizam-se, respectivamente, pelo aspecto discreto e contínuo. As zonas caracterizam-se pela sua forma, quer dizer, pelo seu contorno: um traço fechado ou uma sequência de pontos suficientes para destacar uma zona de um campo homogêneo. Restringindo ao caso em que os elementos figurais são traços, a organização perceptiva de uma figura segue a lei do fechamento e da continuidade: quando diferentes traços formam um contorno simples e fechado, eles se destacam como uma figura sobre um fundo:

Figura 1 – exemplos de diferentes organizações perceptivas de figuras



As três figuras (Figura 1a, 1b e 1c) acima aparecem prioritariamente como:

- em (1a), a superposição de duas formas, um quadrado e um retângulo;

- em (1b), uma montagem de duas formas idênticas em que lados de cada uma se tocam;

- em (1c), a repartição de uma forma, um retângulo, em duas partes.

Esta lei de fechamento ou de continuidade tem uma grande importância em figuras habitualmente usadas pelos alunos. Por um lado, ela provoca certa resistência ao esquecimento, devido a forma em que aparece, em proveito dos traços organizados em uma forma percebida (ou somente de certos traços). Por outro lado, ela exclui organizações mais simples e impede, desta maneira, de ver outras formas. A diferença entre a interpretação discursiva de uma figura exigida por uma situação geométrica e a apreensão perceptiva, encontra sua origem, em grande parte, nas leis de organização perceptiva.

2.2. Dois exemplos de primazia exclusiva da apreensão discursiva

2.2.1. Considerando as três figuras seguintes:

Figura 2a

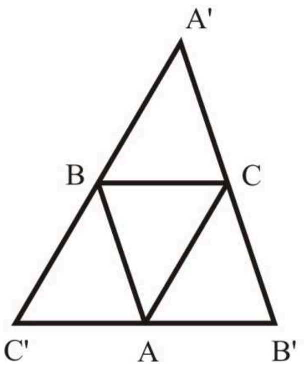


Figura 2b

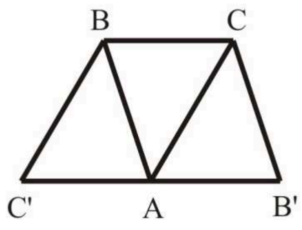
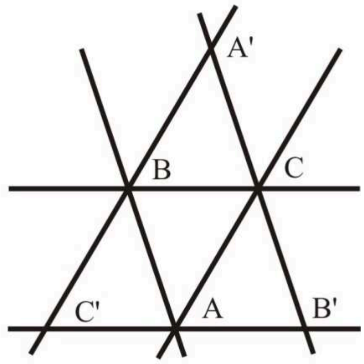


Figura 2c



A Figura 2a aparece como um simples triângulo inscrito em outro triângulo, ou como um pequeno triângulo colocado sobre um triângulo maior. A Figura 2b lembra dois paralelogramos que se dobram (sob certas condições que serão descritas mais adiante), ou um livro aberto visto de soslaio. A Figura 2c aparece como uma superposição de bandas ou como um feixe de retas paralelas.

Consideremos os enunciados seguintes:

Enunciado 1

A'C' e AC são paralelas;
A'B' e AB são paralelas;
B’C’ e BC são paralelas;
Provar que A é meio geométrico de C'B'.

Enunciado 2

ACBC’ e AB’CB são paralelogramos.
Provar que A é meio geométrico de C’B’.

Pode-se elaborar problemas diferentes que combinem os enunciados com essas três figuras. Para as figuras, é possível ainda introduzir uma outra variação visual e matematicamente não significativa, variação na orientação vertical em relação ao suporte material da folha de papel. Nas figuras acima, o vértice de A’ das configurações parece estar “acima” e a base “abaixo”. Assim, é possível virá-los de modo que elas pareçam estar colocadas sobre o vértice. A mesma mudança pode ser feita também com o paralelogramo com o lado BC como a base da figura.

Algumas combinações entre figura e enunciados foram propostas a três grupos de alunos do *troisième*[2] (14 ou 15 anos de idade) com a intenção de permitir um tratamento estatístico pela análise fatorial de correspondência. A Figura 2a foi proposta a dois desses grupos de alunos em um problema com o Enunciado 1. Anteriormente a esta questão, o mesmo havia sido colocado com a Figura 2b e o Enunciado 2: neste caso, a apreensão perceptiva da figura mostrava os objetos que estão designados no enunciado, quer dizer, os paralelogramos. Mas, para um desses grupos de alunos, a Figura 2a não possuía a mesma orientação dada no problema precedente. Isto acrescentava, portanto, uma ligeira não congruência visual a não congruência semântica.

Para o Enunciado 1, a Figura 2c é a figura semanticamente mais congruente, pois menciona retas paralelas e a figura também mostra retas paralelas.

A passagem da apresentação semanticamente congruente do problema (Figura 2b e Enunciado 2), para a apresentação não semanticamente congruente (Figura 2a e Enunciado 1), provocou uma queda muita clara na taxa de acertos (DUPUIS, DUVAL, PLUVINAGE, 1978, p. 75 - 78):

- de 42% a 18%, quando a Figura 2b tinha a mesma orientação vertical que a Figura 2a;

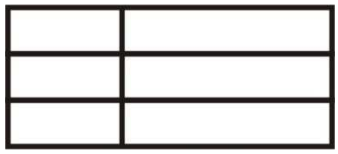
- de 34% a 11%, quando a Figura 2b não tinha a mesma orientação vertical que a Figura 2a.

Em outras palavras, **mais da metade do número de alunos da turma que acertaram o problema com a versão semanticamente congruente não reconheciam mais o problema apresentado em uma versão semanticamente não congruente**.

[2] N. T. A série *troisième* (9º ano) corresponde a última série do ensino fundamental no Brasil.

2.2.2. O segundo exemplo, ao contrário, é um caso no qual há congruência semântica entre a figura e o enunciado, mas esta congruência que privilegia a apreensão discursiva, quase impõe um tratamento matemático do problema, em detrimento de outros tratamentos possíveis. Balacheff (1982) propôs a seguinte questão:

Quantos retângulos têm nesta figura?



Na apresentação, ele observa que: "a resolução deste problema depende essencialmente das concepções que se tem dos objetos à demonstrar <u>e da análise feita da figura</u>" (sublinhado pelo autor).

Em relação a esta figura, os retângulos podem ser considerados como elementos de uma pavimentação, como interseção de duas bandas, como um conjunto de quatro pontos ou como um conjunto de segmentos. Balacheff constata:

> De fato, é o primeiro tipo de solução que domina as observações clínicas que nós fizemos, tanto antes quanto durante a experiência. Provavelmente, porque esta solução corresponde a uma abordagem perceptiva da figura... (BALACHEFF, 1982, p. 280, 281).

A escolha deste tipo de solução era de todo previsível: a lei de fechamento e de continuidade impunha a apreensão perceptiva de um grande retângulo repartido em retângulos menores. Além disso, a formulação da questão reforçava esta apreensão perceptiva da figura.

Esses dois exemplos mostram que uma figura guarda uma estrutura perceptiva autônoma: os objetos que aparecem podem, deste modo, ser diferentes dos tipos de objetos que a situação exige ver. Lembram, também, que os alunos se apegam, na grande maioria, à apreensão perceptiva: **estes não se dão conta de que uma figura deve ser olhada não mais do que através ou em função das propriedades, ou das condições formuladas como hipóteses.** Isto pode ser observado pelas suas atitudes diante de um problema: eles leem o enunciado, constroem a figura e, em seguida, concentram-se na figura sem retornar ao enunciado. Este esquecimento ou abandono do enunciado marca a ausência da atitude que chamamos de interpretação discursiva da figura. É por isso que os problemas que são acessíveis a estes alunos são aqueles cujos enunciados são semanticamente congruentes à figura construída ou a construir. No entanto, isto não é mais do que uma condição necessária. A congruência semântica abre ou fecha a porta de entrada na resolução de um problema; ela não é suficiente para a sua busca. Para elucidar este aspecto mais essencial, é preciso considerar não mais a apreensão perceptiva da figura, mas a sua apreensão operatória.

3. Apreensão operatória das figuras e heurística

Toda figura pode ser modificada de muitas formas. Podemos dividi-la em partes que sejam como várias subfiguras, incluí-la em outra figura de modo que ela se torne uma subfigura: esta modificação é uma **modificação mereológica**, ela se faz em função da relação parte e todo. Pode-se também aumentá-la, diminuí-la ou deformá-la: esta modificação é uma **modificação ótica**, ela transforma uma figura em outra, chamada sua imagem. Esta transformação, que é realizada através de um jogo de lentes e espelhos, pode conservar a forma inicial ou alterá-la. Pode-se, enfim, deslocá-la ou rotacioná-la em relação às referências do campo onde ela se destaca: esta modificação é uma **modificação posicional** de orientação e do lugar da figura dentro do seu ambiente (em geral o plano fronto paralelo). Cada uma dessas modificações é realizável graficamente ou mentalmente. Mas, diferentemente da construção geométrica, o modo escolhido para a modificação da figura é neutro: ele não muda a apreensão, nem mesmo a análise que pode ser feita. **Em compensação, dependendo do tipo de modificação escolhida, podem surgir possibilidades de tratamento sem relação uns com os outros.** Repartir uma figura em subfiguras permite, por exemplo, evidenciar a igualdade de áreas, ao passo que, o fato de considerar uma figura como o aumento de outra permite ver um centro de homotetia.

A apreensão operatória de figuras é uma apreensão centrada nas modificações possíveis de uma figura inicial e nas reorganizações possíveis destas modificações. Para cada tipo de modificação, são diversas as operações possíveis (ver a Tabela 1 a seguir). **A produtividade heurística de uma figura,** em um problema de geometria, **está ligada a existência da congruência entre uma destas operações e um dos tratamentos matemáticos possíveis para o problema proposto.**

Se for possível sempre associar uma figura a uma situação geométrica descrita, as figuras não têm necessariamente, em cada situação, uma produtividade heurística. Isto se dá por razões muito distintas:

- a primeira, sobre a qual não discutiremos aqui, é a não-congruência entre o tratamento matemático e a apreensão operatória. Quase todos os problemas que usam propriedades de homotetia apresentam esta dificuldade. De fato, a apreensão operatória apropriada neste tipo de problema seria aquela ligada às modificações óticas: duas figuras congruentes podem parecer uma menor do que a outra segundo o sistema de referência escolhido e, inversamente, duas figuras de grandezas diferentes podem apresentar-se como duas figuras congruentes, quando colocadas a uma distância diferente do centro de visão. (COREN, PORAC, WARD, p. 250, 254). Neste caso, a apreensão operatória se faz segundo a dimensão de profundidade, exatamente como quando olhamos uma fotografia. No entanto, as resoluções matemáticas de problemas de homotetia, exigem que nos limitemos às operações no plano, como por exemplo as translações, além de que se faça abstração da perspectiva segundo a dimensão de profundidade. Em compensação, na construção do centro de homotetia, a operação operatória permite antecipar e organizar, sem os percalços próprios de um tratamento matemático. Não é de se espantar, então, que a construção de um centro de homotetia por duas figuras seja uma atividade trivial, enquanto problemas que exigem mais do que um reconhecimento ou uma construção mostram-se difíceis. Os obstáculos encontrados por alunos na utilização de transformações em geometria plana são consequências da não congruência entre o tratamento matemático do problema e a apreensão operatória da figura. (BURGAUD, p. 52, 53).

- a segunda razão diz respeito aos casos em que há congruência entre a apreensão operatória e um tratamento matemático do problema. Diferentes fatores podem estar presentes para facilitar ou, o contrário, para ocultar a apreensão operatória da figura que conduz à solução do problema colocado. Destes fatores depende o fato de que os alunos "veem" rapidamente ou não veem a operação figural que sugere um tratamento matemático. Indica-se, mais adiante, no exemplo de operação de reconfiguração intermediária, alguns destes fatores. Naturalmente, quando o objetivo é iniciar a grande maioria dos alunos em geometria, este tipo de problema e o jogo de fatores de visibilidade devem inteiramente tomar a nossa atenção.

A tabela 1, seguinte, dá uma ideia da riqueza e da complexidade da apreensão operatória das figuras:

Tabela 1 – tipos de apreensão operatória de figuras.

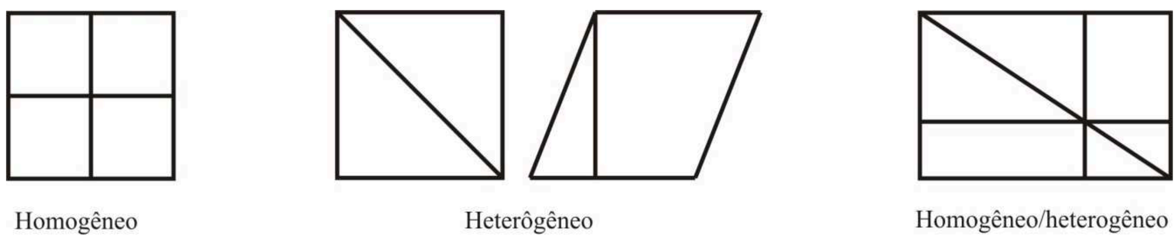
Tipo de modificação figural	Operações que constituem a produtividade heurística	Fatores que interferem na visibilidade
Modificações mereológicas	- Reconfiguração intermediária - Mergulhamento	- Característica convexa ou não convexa das partes elementares
Modificações óticas	- Superposibilidade - Anamorfose	- Recobrimento parcial - Orientação
Modificações posicionais	- Rotação - Translação	- Estabilidade das referências do campo perceptivo para o suporte das figuras.

Não é possível analisar, no âmbito deste artigo, todo o campo de apreensão operatória. Por isso, este trabalho limita-se ao estudo da operação de reconfiguração intermediária. Elas intervêm nos problemas iniciais de geometria que podem ser propostos aos alunos, cujas resoluções não requerem a utilização de um *corpus* de definições e de teoremas.

3.1. A operação de reconfiguração intermediária

Uma modificação mereológica é uma modificação que faz surgir uma forma como um todo fracionado em partes homogêneas ou em partes heterogêneas. Em um fracionamento homogêneo, as partes obtidas têm a mesma forma que o todo: o quadriculado constitui uma modificação mereológica a mais familiar. Em um fracionamento heterogêneo, as partes obtidas não têm a mesma forma do que o todo: por exemplo, repartir um quadrilátero em dois, três ou quatro triângulos. Estas modificações se traduzem graficamente pela adjunção de um ou mais traços à figura inicial. Elas podem ser realizadas por recortes ou dobramentos.

Figura 3: quadriláteros fracionados de diferentes maneiras

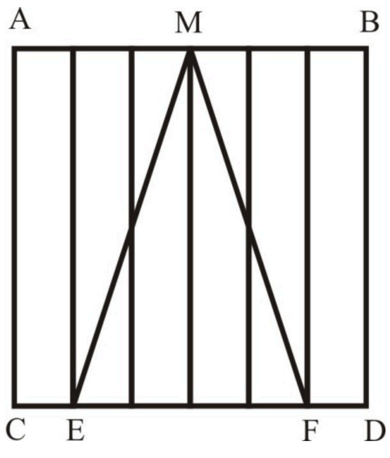


O interesse do fracionamento de uma figura (ou de seu exame, a partir das partes elementares que surgem) é que ela origina a operação de reconfiguração intermediária. **De fato, as partes elementares obtidas por fracionamento, podem ser reagrupadas em várias subfiguras, todas pertencentes à figura inicial.** Esta operação permite engajar, de imediato, tratamentos, tais como, a medida de área através da soma das partes elementares ou do reconhecimento da equivalência de dois reagrupamentos intermediários.

3.2. Três exemplos de resolução por reconfiguração intermediária

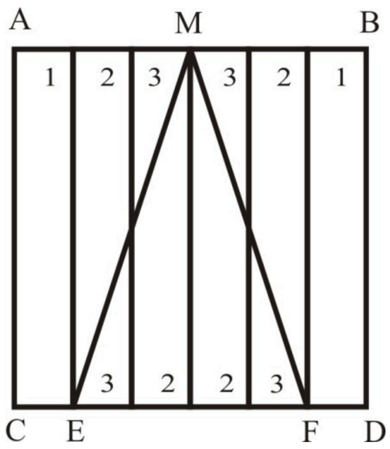
Nas três situações seguintes, o recurso à operação de reconfiguração intermediária constitui uma abordagem natural do problema proposto.

Situação 1 – Fazer a partição de um quadrado em três partes iguais, a partir do ponto médio do lado AB:



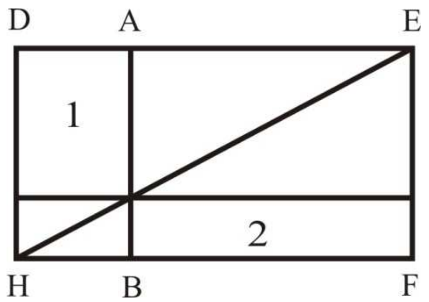
Um aluno do *cinquième*[3] efetuou a partição do quadrado em seis bandas iguais, conforme mostra a figura a seguir:

[3] N. T. A série *cinquième* (7º ano), alunos com idade com 12 ou 13 anos, corresponde ao segundo ano das séries finais do ensino fundamental no Brasil.

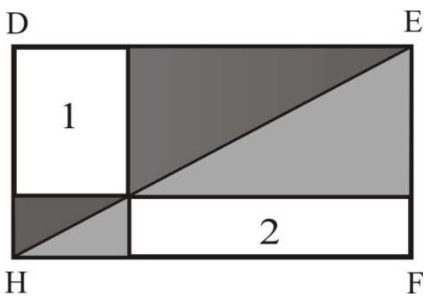


Em seguida, ele explicou a igualdade das reconfigurações intermediárias (AMEC, MFE, MBFD), indicando com o dedo as partes elementares iguais entre elas, conforme mostra a numeração nesta figura. Com os mesmos números são indicadas as unidades figurais que este aluno havia apontado com o dedo sobre a figura. As dificuldades começaram a aparecer quando ele teve que apresentar por escrito a solução explicada verbalmente. (DUVAL, 1983, p. 409).

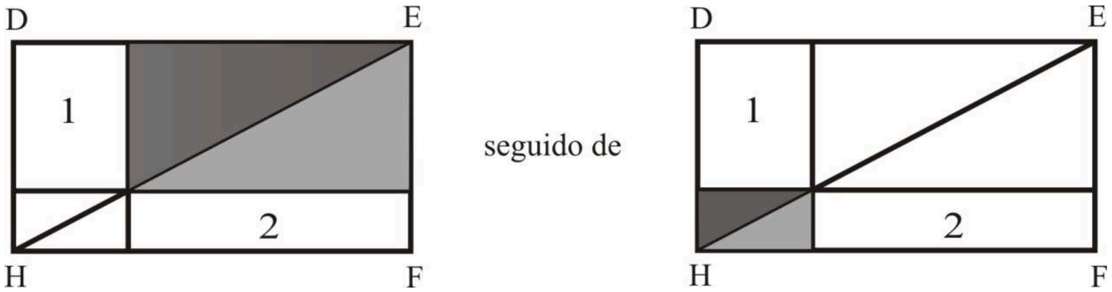
Situação 2 – O problema de Euclides: mostrar a igualdade das partes 1 e 2, qualquer que seja a posição do segmento AB.



Este problema pode ser resolvido por supressão nos triângulos DEH e EHF de duas configurações intermediárias não convexas:

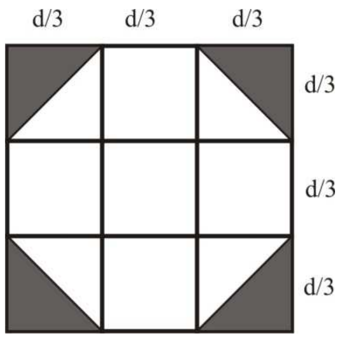


ou pela supressão sucessiva de duas partes elementares iguais:



Estes dois métodos foram observados em alunos do CM2[4] (10 ou 11 anos) e da cinquième[5] (12 ou 13 anos). (MESQUITA, 1989).

Situação 3 – A primeira aproximação da área, conhecida historicamente (período babilônico), repousa, também, sobre a operação de reconfiguração intermediária. (EDWARDS, 1979):



Calcula-se a área do reagrupamento das partes hachuradas ($7(\frac{d}{3})^2$) e, em seguida, efetua-se a aproximação, conforme mostra a sequência de cálculo seguinte:

$$7(\frac{d}{3})^2 = \frac{7}{9}d^2 \times \frac{9}{9} = \frac{63}{81}d^2 \cong (\frac{8}{9}d)^2$$

Nestes problemas, a operação de reconfiguração intermediária constitui a produtividade heurística da figura.

É possível reagrupar todos os problemas nos quais esta operação é congruente a um tratamento matemático possível em uma classe de problemas diretamente acessíveis aos alunos, porque não requerem de maneira explícita o emprego de alguma definição ou teorema.

A reconfiguração intermediária não é a única apreensão operatória ligada às modificações mereológicas. Há também o "mergulhamento". Esta operação apoia-se sobre uma modificação mereológica, inversa daquela implicada a uma reconfiguração intermediária: um triângulo, por exemplo, torna-se um pedaço de um paralelogramo. A figura é, de certa maneira, mergulhada e dobrada no plano. Betenelli (1984) a descreve assim: "prolonga-se o

[4] N. T. A série CM2 (5º ano) corresponde a última série das séries iniciais do ensino fundamental no Brasil.
[5] Ver nota de rodapé 3.

que pode ser, quer dizer, os lados das peças desenhadas”, e ele apresenta esta visão operatória como uma “visão mais profunda” do que a simples apreensão perceptiva.

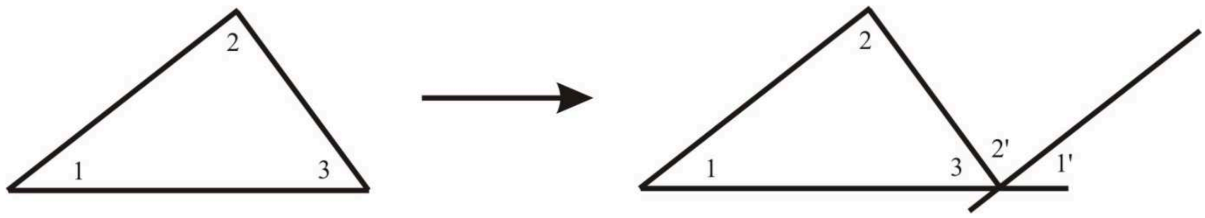
3.2.3. Fatores que dizem respeito à visibilidade da operação

Sobre uma figura dada, a operação de reconfiguração intermediária pode ser efetuada de várias maneiras. Diferentes fatores influem sobre o discernimento da aplicação pertinente desta operação. São distinguidos quatro deles:

Fator 1 - O fato de que o fracionamento da figura em partes elementares seja dado inicialmente ou que ele deva ser encontrado. Assim, no primeiro exemplo, o fracionamento do quadrado em bandas iguais poderia ser indicado: não haveria, deste modo, nenhuma pesquisa prévia a ser empregada, neste caso, de operação de reconfiguração intermediária.

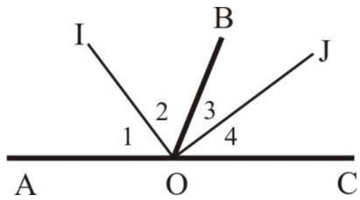
Fator 2 - O reagrupamento pertinente das partes intermediárias forma uma sub-figura que é **convexa** ou **não convexa**. Uma subfigura não convexa é mais difícil de destacar do que uma figura uma subfigura que é convexa, uma vez que a lei perceptiva da unidade de contorno não é mais respeitada. (MESQUITA, 1989).

Fator 3 - O reagrupamento pode exigir que se substitua as partes elementares auxiliares por àquelas as quais o enunciado do problema faz referência. Para mostrar, por exemplo, que a soma dos ângulos de um triângulo é 180°, reconfigura-se os ângulos do triângulo em um ângulo plano:



Esta reconfiguração exige **a substituição das partes elementares** 1' e 2', respectivamente, por 1 e 2. Mas, para haver esta substituição, é preciso construir a reta paralela a um dos lados. Como se pode chegar a esta transformação do triângulo inicial dado sem que isto seja dito? É necessário substituir a expressão “ângulo reto” e, em seguida, um dos semiplanos de maneira que corresponda aos três ângulos do triângulo.

Fator 4 - O fato de que uma parte elementar deva entrar, simultaneamente, em dois reagrupamentos intermediários a comparar, é o que chamamos de obstáculo da "duplicidade de objetos". (DUVAL, 1983). Este fato não pode ser desprezado no problema seguinte:



Nesta figura, IO e JO são, respectivamente, as bissetrizes dos ângulos AOB e BOC, qual é a medida do ângulo IOJ? Porquê?

As partes elementares 2 e 3 entram simultaneamente em dois dos reagrupamentos intermediários: IOJ e AOB para a parte elementar 2; IOJ e BOC para a parte elementar 3. Com isso, foi possível observar em alguns alunos, a constituição de um verdadeiro obstáculo: eles não podiam ver e compreender que um mesmo objeto pudesse estar, ao mesmo tempo, em dois reagrupamentos colocados como distintos, uma vez que procurava compará-los.

O caráter não convexo de um reagrupamento intermediário, a necessidade de recorrer às partes intermediárias auxiliares ou a duplicação de uma mesma parte, são alguns dos fatores que diminuem a visibilidade da operação de reconfiguração intermediária. A ocultação que resulta da presença destes fatores traduz-se pelo fato de que se vai permanecer mais ou menos tempo sem avançar na solução do problema. Parece que, em problemas deste tipo (problemas nos quais a operação de reconfiguração intermediária é congruente com o tratamento matemático), a diferença entre os alunos acontece, inicialmente, na resistência à ocultação da apreensão operatória e não sobre a apreensão figural. Algumas observações parecem mostrar que o aluno que procura muito tempo sem nada ver o que empregar, no instante em que ele vê, utiliza os mesmos procedimentos daquele aluno que viu e encontrou de imediato, **e isto também rapidamente.** (MESQUITA, 1989).

É importante não confundir, na análise cognitiva de um problema em geometria, **a produtividade heurística da figura e a visibilidade das operações ligadas a esta produtividade.** A produtividade heurística depende da congruência entre uma operação e um tratamento matemático possível. Em compensação, a visibilidade da figura é intrínseca aos tratamentos matemáticos: o fato de perceber ou não perceber, em uma figura, a reconfiguração intermediária pertinente, não significa nada quanto à possibilidade de aplicar esta reconfiguração quando ela é percebida. No estágio atual das observações, parece que o principal obstáculo dos problemas de geometria que apresenta congruência entre a apreensão operatória e o tratamento matemático possível, está ligado à visibilidade aparente aleatória em cada indivíduo. Isto nos remete a um fator de atitude espacial? Parece, por um instante, difícil de avançar mais: pois todos os testes que procuram a determinação de tal fator são, essencialmente, atividades do tipo puzzle ou de representação plana de um objeto tridimensional submetido à rotações. (PELEGRINO e KAIL, 1982, p. 314 – 317 e 348, 349). Mesmo quando implica translações ou rotações, a apreensão operatória das figuras é de outra natureza, uma vez que ela não se limita a uma manipulação perceptiva das formas.

4. Apreensão discursiva de uma figura e demonstração

Examinando, por um lado, o problema de congruência entre figura e enunciado e, por outro lado, entre figura e tratamento matemático, a questão do estatuto das figuras geométricas que não se constituem como um registro de tratamento autônomo análogo, por exemplo, como o das representações gráficas cartesianas não foram abordadas. De fato, as propriedades pertinentes e as únicas aceitáveis dependem cada vez do que é dito no enunciado como hipótese. Isto implica subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva e, como consequência, uma restrição da apreensão perceptiva: uma figura geométrica não mostra a primeira vista a partir de seu traçado e de suas formas, mas a partir do que é dito. Esta subordinação da apreensão perceptiva à apreensão discursiva pode ser considerada como uma teorização da representação figural: a figura geométrica torna-se, de certa maneira, um fragmento do discurso teórico. Os elementos e as propriedades que aparecem sobre a figura não têm mais do que o estatuto e a certeza das asserções correspondentes no discurso geométrico, o qual é comandado por definições, axiomas e teoremas já estabelecidos. A mesma figura, do ponto perceptivo, pode, deste modo, ser uma figura geométrica diferente, se modificamos o enunciado das hipóteses.

A compreensão desta teorização das figuras geométricas, na qual sua apreensão perceptiva deve estar subordinada a sua apreensão discursiva, constitui um dos vieses de acesso à demonstração. É bastante conhecido que os alunos consideram inútil e, às vezes, absurdo demonstrar uma propriedade que “se vê” sobre a figura. Da mesma maneira, muitos alunos têm dificuldade em não confundir as hipóteses e o que é para ser demonstrado. Menos do que um círculo vicioso, trata-se de uma instabilidade análoga àquela de certas figuras que se vê alternativamente em cruz ou em alto relevo sem poder fixar uma interpretação. Pensa-se, geralmente, que para contornar esta resistência ou esta instabilidade, seria necessário propor problemas nos quais o resultado aparecesse incerto. Mas, procedendo desta forma, deixa-se subsistir o obstáculo sem dar aos alunos a ocasião de tomar consciência e de superá-lo: aquele da teorização a qual introduz, na evidência e homogeneidade sinóptica da apreensão perceptiva das figuras, uma diferenciação de natureza discursiva e axiomática. O estatuto específico de uma figura geométrica permanece ainda inteiramente ignorado.

É esta apreensão discursiva das figuras que diferencia radicalmente as atividades de demonstração das atividades de construção. **E esta apreensão discursiva é de outra natureza, diferente daquela que descreve o procedimento de construção que é exigido dos alunos em atividades de jogo de mensagem.**

Em uma atividade de construção, a figura é, de certa maneira, independente de todo enunciado. A apreensão perceptiva pode servir de registro de controle para julgar uma execução aceitável ou não da atividade. Seu estatuto não é, portanto, o mesmo de uma atividade de demonstração. É certo que a execução impõe embaraços que não é sempre possível contornar por aproximações sucessivas de um traçado. Mas, estes embaraços não são nada comparáveis às hipóteses, porque eles são próprios a cada figura e mudam apenas em função do registro de execução: régua e compasso por uma realização sobre papel ou lista de instrução de base para realização no computador. Por um registro de execução dado, os embaraços próprios a uma figura não mudam: isto constitui a autonomia das figuras em relação ao discurso geométrico. Em compensação, é exatamente o contrário que se passa com as hipóteses. Uma mesma figura pode ilustrar situações geométricas diferentes, quer dizer, situações nas quais as hipóteses iniciais não são as mesmas.

A formulação das instruções, que permite a um terceiro construir uma figura, é ela mesma estranha a uma apreensão discursiva das figuras. Exige, sobretudo, três coisas comuns a toda redação de um texto:

- não dar, na medida do possível, não mais do que uma instrução por frase;
- evitar toda ambiguidade no enunciado de cada instrução;
- definir um quadro de referência autônoma, que permita uma descrição de tudo que, em uma interação, é simplesmente mostrado.

Destas três exigências, a segunda é naturalmente aquela que mais chama a atenção: Toda imprecisão, toda análise insuficiente das possibilidades de sentido da formulação dadas, são sancionadas ou são sancionáveis para uma realização diferente daquela esperada.

Mas, na atividade de construção, é o reconhecimento perceptivo da figura a ser reproduzida que serve de guia e de controle pela formulação das instruções, e não pelo que é sucessivamente obtido como traçado em função dos instrumentos utilizados. Instrumentos, pelos quais faz-se a hipótese didática de que eles transformam as propriedades matemáticas em dificuldades físicas e que os alunos vão reconhecer as propriedades matemáticas nas dificuldades instrumentais próprios de cada instrumento.

No plano do discurso, permanece-se no modo de descrição perceptiva simultânea da figura e das ações instrumentais. O vocabulário matemático não é mais empregado ou, caso ele seja, é feito de modo impreciso e errôneo. A apreensão discursiva de uma figura, exigida em uma atividade de demonstração, privilegia, ao contrário, a articulação dos enunciados, seu estatuto e sua compatibilidade interna. **De fato, a verdadeira representação correspondente a uma atividade de demonstração em geometria, não será uma figura, mas uma rede semântica de propriedades e objetos.** É relativamente à representação de tal rede, que a distinção do estatuto dos enunciados (hipóteses, proposições a demonstrar, proposições utilizáveis) e a importância da ordem dos enunciados podem tomar todo o seu sentido para os alunos. Naturalmente, a elaboração de tais representações é complexa, e poucas tentativas foram feitas até o presente momento para desenvolver este tipo de representação. Mas, sem o recurso implícito ou explícito deste tipo de representação, não pode haver a apreensão discursiva das figuras. **A apreensão discursiva de uma figura equivale a mergulhar, segundo as indicações de um enunciado, uma figura geométrica particular em uma rede semântica, que é, ao mesmo tempo, mais complexa e mais estável**.

Vê-se, portanto, aparecer, de um ponto de vista cognitivo, uma diferença importante entre a redação de uma lista de instruções para a construção de uma figura e a redação de uma demonstração. Em um caso, a linearidade do discurso reflete simplesmente a sequência dos passos sucessivos de execução: a formulação pode ser inutilmente explícita, insuficientemente explícita ou não adaptada, ela não pode ser contraditória. Os enunciados são ordens e não são asserções. No outro caso, a linearidade do discurso não é inicialmente dada, precisa ser organizada a partir de uma rede de relações conceituais: a formulação pode, então, não ser coerente ou explicitamente contraditória.

Conclusões

A existência de uma **tríplice apreensão** do que é, do ponto de vista da representação, **a mesma figura,** mostra a complexidade dos problemas de geometria, aparentemente os mais simples.

Seja ela ou não congruente ao enunciado do problema, a apreensão perceptiva das figuras podem ter um papel facilitador ou inibidor sobre a compreensão do problema colocado.

Se ela é congruente a um tratamento matemático possível do problema colocado, a apreensão operatória tem um papel heurístico importante na resolução do problema.

Há, finalmente, uma apreensão discursiva das figuras: naquilo que é específico, ela provoca neutralização da apreensão perceptiva. **Quando existe congruência entre a apreensão operatória e um tratamento matemático possível do problema, a apreensão discursiva pode ser negligenciada**: a redação do problema toma a forma de uma demonstração, mas do ponto de vista cognitivo, esta redação não difere de uma formulação de instruções exigidas em uma atividade do tipo de jogos de mensagens. **Mas, quando não há mais congruência semântica entre a apreensão operatória e um tratamento matemático possível, a apreensão discursiva torna-se necessária**. Os alunos encontram-se, então, confrontados com uma verdadeira atividade de demonstração.

Vê-se que existe, portanto, uma grande heterogeneidade cognitiva entre os problemas de geometria matematicamente muito próximos ou que solicitam os mesmos conhecimentos. Uma categorização cognitiva dos problemas é indispensável não somente para poder interpretar as performances e as produções observadas sobre um problema, mas também para abordar aquilo que é chamado "uma aprendizagem da demonstração". Parece necessário distinguir três níveis de problemas em geometria:

Nível 1: aqueles problemas para os quais há congruência entre uma apreensão operatória da figura e um tratamento matemático possível. Neste nível, uma apreensão discursiva explícita não é necessária.

Nível 2: aqueles problemas para os quais a apreensão discursiva é, ao contrário, necessária ou porque não há congruência ou porque ela é explicitamente solicitada como justificação teórica.

Nível 3: aqueles problemas que exigem mais do que uma apreensão discursiva, o recurso aos esquemas formais lógicos específicos tais como a demonstração por absurdo, o dilema ou raciocínio disjuntivo, a demonstração por contraposição. (GLAESER, 1971, p. 103, 104). Naturalmente, para cada um destes níveis, outras distinções devem ser levadas em conta. Mais isto diz respeito a uma classificação de problemas que ultrapassa o objetivo deste artigo.

A aprendizagem da demonstração foi projetada no ensino com problemas de Nível 2. Sem retomar uma análise desenvolvida por Mesquita e Rauscher (1988), este estudo contenta-se em mencionar várias condições que aparecem para tornar os problemas de Nível 2 mais acessíveis para a maioria dos alunos:

- uma prática sistemática de problemas de nível 1;

- tornar consciente a oposição existente entre a apreensão perceptiva e discursiva;

- a constituição, em uma rede semântica, de todos os conhecimentos que podem estar solicitados em uma dada demonstração. Deste ponto de vista, a representação de uma rede de propriedades constitui um registro talvez mais indispensável que o traçado ou que a construção de figura;

- a conscientização da diferença entre uma dedução e uma argumentação, desenvolvida no quadro da prática natural do discurso. Porque os conectores argumentativos da língua natural têm sentido e um emprego que não correspondem, em geral, à articulação dedutiva de dois enunciados em um quadro dado de definições e axiomas.

Tudo isto significa dizer que a atividade cognitiva de demonstração é menos simples e menos homogênea do que o seu produto - a demonstração pronta e lida por outro. Pode-se assimilar a atividade de demonstração ao raciocínio, na medida em que para este termo designa-se a produção de argumentos, a inferência constantemente solicitada na compreensão de qualquer que seja o discurso, ou ainda, a interpretação que permite encontrar uma mudança de registro. A atividade de demonstração só pode surgir se for a partir de um ponto de convergência de numerosas funções cognitivas. Favorecer o desenvolvimento de todas estas funções poderá ser uma via mais rápida e mais frutuosa para o ensino, do que aquela que propõe procedimentos de imitação para simular ou reproduzir uma demonstração. Talvez não possa existir uma transição progressiva e graduada, no sentido da exigência e da prática da demonstração, uma vez que sempre haverá um passo a superar de uma descrição, de uma argumentação ou de uma construção para uma demonstração. Mas, a compreensão do que é uma demonstração, está ligada à conscientização da diferença entre estas múltiplas atividades discursivas e representativas.

Referências

BALACHEFF, N. **Preuve et démonstration en mathématique au collège**, in RDM, 3.3, p. 262 - 306, 1982.

BESSOT, D. **Problèmes de représentation de l'espace**. Enseignement de la géométrie, Bulletin Inter-Irem, 23, p.33 - 40, 1982.

BETINELLI, B. **Jeux de forme, forme de jeux**. Irem de Besançon,1984.

BURGAUD, B. **Quelques exemples d'utilization des transformations en géométrie plane**: obstacles rencontrés chez les élèves. Enseignement de la géométrie. Bulletin Inter-Irem, 23, p. 52 - 56, 1983.

COREN, S.; PRAC, C.; WARD, L. M. **Sensation and perception**. New York: Academic Press, 1979

DUPUIS, C., DUVAL, R., PLUVINAGE, F. Étude sur la stabilité de la géométrie en fin de troisième, in **Géométrie au premier cycle**. Tome II, APMEP, p. 65 - 99, 1978.

DUVAL, R. L'obstacle du dédoublement des objets mathématiques, in **Educational Studies in mathematics**, 4, p. 385 - 414, 1983.

EDWARDS, C. H. **The historical development of calculus**, Springer, 1979.

GLAESER, G. **Mathématiques pour l'élève professeur**. Paris: Hermann, 1971.

MESQUITA, A. L. Sur une situation d'éveil à la déduction en géométrie. **Educationnal Studies in Mathematics**, 20, p. 55 – 77, 1989.

MESQUITA, A. L.; RAUSCHER, J.-C. Sur une approche d'apprentissage de la demonstration. **Annales de Didactique et de Sciences Cognitives**. v.1, p. 95 – 109, IREM de Strasbourg, 1988.

PELLEGRINO, J, W.; KAIL Jr., A. **Process Analyses of Spatial Aptitude, in Advances in the Psychology of human intelligence**, Ed. by J. Sternberg, Hillsdale, Lawrence Erlbaum, 1982.

THOM, R. Les **Mathématiques "Modernes**": une erreur pédagogique et philosophique. L'âge de la science. III, 3, p. 225 - 242, 1972.