Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento[1]

Raymond Duval
Professor Emérito da Université du Littoral Côte d'Opale/França

Tradução:Méricles Thadeu Moretti
PPGECT/MTM/UFSC

Resumo

As transformações de representações em outras transformações semióticas estão no coração da atividade matemática. As dificuldades dos alunos para compreender matemática surgem por conta da diversidade e complexidade dessas transformações. Para estudar esta complexidade, as representações semióticas devem ser analisadas, não a partir dos objetos ou dos conceitos matemáticos que representam, mas a partir do funcionamento representacional que é próprio do registro no qual são produzidas. Neste artigo, mostra-se que um registro é um campo de variação de representação semiótica em função de fatores cognitivos que lhe são próprios. Tomam-se dois exemplos de registro, o registro das representações gráficas e o registro das figuras geométricas, descrevem-se todas as variações que são visualmente pertinentes para que se perceba, respectivamente, uma função afim e uma relação de homotetia. Toda resolução de problema que mobiliza um ou outro desses objetos exige duas coisas: (1) Capacidade para produzir ou reconhecer, espontaneamente, não importa qual a representação produzida nesses dois campos de variação; (2) Coordenação, em cada um desses campos de variação, em outro campo de variação: o registro da expressão algébrica das relações para visualizar as funções ou o registro de uma fração para a relação das configurações geométricas. Neste artigo, limita-se à primeira exigência. Analisar, em termos de registro a ser utilizado, nas atividades matemáticas e no funcionamento cognitivo requerido para que o aluno seja capaz de fazer tais atividades por si mesmo, apresenta um triplo interesse para pesquisa e para o ensino. Isto permite distinguir e classificar todos os sistemas semióticos que são utilizados em matemática para fim de cálculo, de raciocínio e de exploração heurística intuitiva. Na sequência, permite separar, na análise da resolução de um problema, dois tipos de transformação de representação semiótica que são radicalmente diferentes: as conversões e os tratamentos. Enfim, permite ainda compreender por que o entendimento dos objetos e dos conceitos em matemática começa, somente, no momento em que o aluno é capaz de mobilizar e de coordenar espontaneamente dois registros de representação para um mesmo objeto. Obtêm-se, assim, as bases de um modelo cognitivo de funcionamento do pensamento que leva em conta todos os problemas suscitados no ensino de matemática.

Esta tradução é uma versão revista e atualizada da publicação original de 2012. Disponível em: periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266/23465

[1] Este texto é uma tradução do artigo: Duval, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. p. 37- 64. Strasbourg: IREM - ULP, 1993. Algumas adaptações de forma no texto original foram produzidas para adequar as normas da ABNT além de novas precisões feitas pelo autor.

Résumé

Les transformations de représentations en d’autres représentations sémiotiques sont au cœur de toute activité mathématique. Les difficultés des élèves pour comprendre en mathématiques viennent de la diversité et de la complexité de ces transformations. Pour étudier cette complexité, les représentations sémiotiques doivent être analysées non pas à partir des objets ou des concepts mathématiques qu’elles représentent, mais à partir du fonctionnement représentationnel qui est propre au registre dans lequel elles sont produites. Dans cet article, nous montrons qu’un registre est un champ de variation de représentation sémiotique en fonction des facteurs cognitifs qui lui sont propres. En prenant deux exemples de registre, celui des représentations graphiques et celui des figures géométriques, nous décrivons toutes les variations qui sont visuellement pertinentes pour visualiser respectivement une fonction affine et un rapport d’homothétie. Toute résolution de problème qui mobilise l’un ou l’autre de ces deux objets mathématiques exige deux choses (1) Etre capable de produire ou reconnaître spontanément n’importe quelle représentation produites dans ces deux champs de variation. (2) Avoir coordonné chacun de ces champs de variation à un autre champ de variation : le registre de l’écriture symbolique des relations pour la visualisation des fonctions, ou celui de l’écriture fractionnaire de rapports pour les configurations géométriques. Dans cet article nous nous limitons à la première exigence. Analyser en termes de registres à mobiliser les activités mathématiques et le fonctionnement cognitif requis pour être capable de faire ces activités par soi-même, présente un triple intérêt pour la recherche et pour l’enseignement. Cela permet de distinguer et de classer tous les systèmes sémiotiques qui sont utilisés en mathématiques à des fins de calcul, de raisonnement ou d’une exploration heuristique intuitive. Ensuite cela permet de séparer, dans l’analyse de la résolution d’un problème, deux types de transformations de représentations sémiotiques qui sont radicalement différents : les conversions et les traitements. Enfin cela permet de comprendre pourquoi la compréhension des objets et des concepts en mathématique commence seulement lorsqu’un élève est capable de mobiliser et de coordonner spontanément deux registres de représentation pour un même objet. Nous obtenons ainsi les bases d'un modèle cognitif du fonctionnement de la pensée qui prend en compte tous les problèmes que l’enseignement général des mathématiques soulève.

Abstract

The transformations of semiotic representations into other semiotic representations make up the central processes of mathematical activity and thinking. The difficulties of comprehension in the learning of mathematics stem from the diversity and complexity of these transformations. In order to analyze this complexity, semiotic representations have to be considered not from the mathematical objects or concepts they represent, but from the representational functioning specific to the register in which they are produced. In this paper, we show that a register is a field of semiotic representation variation according to the cognitive factors that are specific to it. Using two examples of registers, the Cartesian graphs and the geometrical configurations we describe all the variations that are visually relevant respectively to visualize any affine function and any homothetic ratio. Any problem solving that mobilizes one or the other of these two mathematical objects requires two things. (1) Being able to spontaneously produce or recognize any representation in these two fields of variation. (2) To have connected each of these variation fields to another variation field: the register of symbolic notation of algebraic relations for the

visualization of functions, and the register of fractional notations of ratios for geometric configurations. This paper will be confined to the first requirement. The analysis of mathematical activity and cognitive functioning required to be able to achieve it one' self in terms of registers to be mobilized has three advantages for educational research and teaching. First it helps to distinguish and classify all semiotic systems used in mathematics for the purposes of calculation, reasoning or intuitive heuristic exploration. Then it allows to separate in the analysis of the solving process and solution to a problem two kinds of transformations of semiotic that are radically different: conversions and treatments. Finally it explains why the understanding of objects and concepts in mathematics begins only when a student is able to mobilize and coordinate spontaneously two registers of representation for the same object. This gives us the basis for a cognitive model of the functioning of thinking that takes into account all the problems raised by the teaching of mathematics.

INTRODUÇÃO

Há uma palavra importante e marginal em matemática, é a palavra "representação". Ela é, na maioria das vezes, empregada sob a forma verbal "representar". Uma escrita, uma notação, um símbolo representam um objeto matemático: um número, uma função, um vetor... Do mesmo modo, os traçados e figuras representam objetos matemáticos: um segmento, um ponto, um círculo. Isto quer dizer que os objetos matemáticos não devem ser jamais confundidos com a representação que se faz dele. De fato, toda confusão acarreta, em mais ou menos a longo termo, uma perda de compreensão e os conhecimentos adquiridos tornam-se rapidamente inutilizáveis ao longo de seu contexto de aprendizagem: seja por não lembrar ou porque permanecem como representações "inertes" que não sugerem nenhum tratamento. A distinção entre um objeto e sua representação é, portanto, um ponto estratégico para a compreensão da matemática. Este ponto é tão importante que um dos autores de manual escolar mais sério não tem hesitado em fazer desta distinção o tema recorrente de sua obra para os alunos de *quatrième*[2]: é o objeto representado que importa e não as suas diversas representações semióticas possíveis (DELEDIEQ & LASSAVEL, 1979).

Não obstante, as diversas representações semióticas de um objeto matemático são absolutamente necessárias. De fato, os objetos matemáticos não estão diretamente acessíveis à percepção ou à experiência intuitiva imediata, como são os objetos comumente ditos "reais" ou "físicos". É preciso, portanto, dar representantes. E por outro lado, a possibilidade de efetuar tratamentos sobre os objetos matemáticos depende diretamente do sistema de representação semiótico

[2] N. T. As séries *sixième*, *cinquième*, *quatrième* e *troisième* do sistema de ensino francês correspondem, nesta ordem, aproximadamente às quatro séries finais do ensino fundamental no Brasil, alunos com idade de 11 a 14 anos.

utilizado. Basta considerar o caso do cálculo numérico para se convencer disso: os procedimentos, o seu custo, dependem do sistema de escrita escolhido. As representações semióticas desempenham um papel fundamental na atividade matemática.

Estamos, portanto, na presença do que poderia ser chamado de paradoxo cognitivo do pensamento matemático: de um lado, a apreensão dos objetos matemáticos que não pode ser mais do que uma apreensão conceitual e, por outro lado, é somente por meio de representações semióticas que a atividade sobre objetos matemáticos se torna possível. Este paradoxo pode constituir-se num grande círculo para a aprendizagem. Como os sujeitos em aprendizagem poderiam não confundir os objetos matemáticos com as suas representações semióticas, se eles podem tratar apenas com as representações semióticas? A impossibilidade de um acesso direto aos objetos matemáticos, fora de toda representação semiótica, torna a confusão quase inevitável. E, de modo inverso, como os sujeitos podem adquirir o domínio de tratamentos matemáticos, necessariamente ligados às representações semióticas, se eles não têm uma apreensão conceitual dos objetos representados? Este paradoxo é tão mais forte quando se identifica atividade matemática e atividade conceitual, e que se considera as representações semióticas como secundárias ou extrínsecas.

A este paradoxo cognitivo do pensamento matemático no ensino não é dado muita atenção, simplesmente porque se confere muito mais importância às representações mentais do que às representações semióticas. As representações **mentais** recobrem o conjunto de imagens e, mais globalmente, as conceitualizações que um indivíduo pode ter sobre um objeto, sobre uma situação e sobre o que lhe é associado. As representações **semióticas** são produções constituídas pelo emprego de signos pertencentes a um sistema de representações que têm inconvenientes próprios de significação e de funcionamento. Uma figura geométrica, um enunciado em língua natural, uma fórmula algébrica, um gráfico são representações semióticas que exibem sistemas semióticos diferentes. Consideram-se, geralmente, as representações semióticas como um simples meio de exteriorização de representações mentais para fins de comunicação, quer dizer para torná-las visíveis ou acessíveis a outrem. Ora, este ponto de vista é ardiloso: as representações não são somente necessárias para fins de comunicação, elas são igualmente essenciais à atividade cognitiva do pensamento. De fato, elas desempenham um papel primordial:

- No desenvolvimento das representações mentais: estas dependem de uma interiorização de representações semióticas, do mesmo modo que as representações mentais são uma interiorização daquilo que é percebido (VYGOTSKY, 1962; PIAGET, 1968);
- Na realização de diferentes funções cognitivas: a função de objetivação (expressão particular) que é independente da função de comunicação (expressão para outrem), e a função de tratamento que não pode ser preenchida pelas representações mentais (algumas atividades de tratamento são diretamente ligadas à utilização de sistemas semióticos, por exemplo, o cálculo);
- A produção de conhecimentos: as representações semióticas permitem representações radicalmente diferentes de um mesmo objeto, na medida em que elas podem atender sistemas semióticos totalmente diferentes (BENVENISTE, 1979; BRESSON, 1978). Assim, o desenvolvimento das ciências está ligado a um desenvolvimento de sistemas semióticos cada vez mais específicos e independentes da língua natural (GRANGER, 1979).

Não é possível, portanto, fingir como se as representações semióticas fossem simplesmente subordinadas às representações mentais, pois o desenvolvimento da segunda depende de uma interiorização da primeira e somente as representações semióticas permitem preencher algumas funções cognitivas essenciais como a de tratamento. O funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação. Se é chamada "**semiose**"[3] a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e "**noesis**"[4] a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a **noesis** é inseparável da **semiose**.

---

[3] σημειον: signo, marca distintiva. σημειωσις: ação de marcar um signo. Kristeva emprega este termo para designar as produções ligadas a práticas significantes (art. Semiologia na Enciclopédia Universalis). Assim como U. Eco em Semiologia e Filosofia da linguagem, 1988.

[4] νοησις: intelecção. Platão emprega este termo para evocar as coisas que são próprias em despertar **o ato de conceber pelo pensamento**. Não deve ser confundido com διανοια, traduzido por "pensamento" (República, VII 524 d5, 523 d9 – e9, 523 b1). Aristóteles o emprega igualmente para designar o ato de compreensão conceitual. (ψυχηςIII, 427 b17, 430 a26: "a intelecção dos indivisíveis (noções simples e primeiras) relaciona-se com tudo o que exclui o risco de errar". Foi transcrito em "noesis" por Husserl para designar os pensamentos e os vividos intencionais (Idéias diretrizes para uma Fenomenologia).

Evitamos, aqui, a intenção ao termo "compreensão" porque pode cobrir uma ou outra das duas formas de apreensão (σημειωσις, νσησις) ou mesmo a sua fusão. Evita-se, também o termo "abstração", porque toda semiose pode ser considerada como uma abstração do mesmo modo que a *noesis*. Em alguns aspectos, relacionados à "conceitualização" poderia ser aceito. Mas, a sua aceitação dominante é mais ligada à formação e à aquisição de um conceito do que a sua mobilização ativa em um passo do pensamento.

O paradoxo cognitivo do pensamento matemático e as dificuldades que resultam para sua aprendizagem se dá pelo fato de que não há **noesis** sem **semiose** enquanto houver vontade de ensinar matemática, como se a **semiose** fosse uma operação desprezível em relação a **noesis**. No entanto, é essencial, na atividade matemática, poder mobilizar muitos registros de representação semiótica (figuras, gráficos, escrituras simbólicas, língua natural etc...) no decorrer de um mesmo passo, poder escolher um registro no lugar de outro. E, independentemente de toda comodidade de tratamento, **o recurso a muitos registros parece mesmo uma condição necessária para que os objetos matemáticos não sejam confundidos com suas representações e que possam também ser reconhecidos em cada uma de suas representações.** A coordenação de muitos registros de representação semiótica aparece, fundamentalmente, para uma apreensão conceitual de objetos: é preciso que o objeto não seja confundido com suas representações e que seja reconhecido em cada uma de suas representações possíveis. É nestas duas condições que uma representação funciona verdadeiramente como representação, quer dizer, ela dá acesso ao objeto representado.

É esta forte ligação entre **semiose** e **noesis,** no funcionamento cognitivo do pensamento, que se tenta evidenciar no presente trabalho. A aprendizagem da matemática constitui-se de um campo privilegiado de estudo.

Por isto, sucessivas análises serão apresentadas: as diferentes atividades cognitivas constitutivas da **semiose**; as razões pelas quais a apreensão conceitual implica coordenação de muitos registros de representação; enfim, as condições requisitadas para favorecer esta coordenação e para organizar um ensino que leve em conta esta ligação forte entre **semiose** e **noesis**.

I SEMIOSE E REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

Para que um sistema semiótico possa ser um registro de representação, deve permitir **as três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiose**.

I.1. A formação de uma representação identificável como uma representação de um registro dado: enunciação de uma frase (compreensível em uma língua natural dada), composição de um texto, desenho de uma figura geométrica, elaboração de um esquema, expressão de uma fórmula etc.

Esta formação implica **seleção** de relações e de dados no conteúdo a representar. Esta seleção se faz em função de unidades e de regras de formação que são próprias do registro cognitivo no qual a representação é produto. Desta maneira, a formação de uma representação poderia ser comparada a realização de uma tarefa de descrição.

Esta formação deve respeitar regras (gramaticais para as línguas naturais, regras de formação num sistema formal, entraves de construção para as figuras...)[5]. A função destas regras é de assegurar, em primeiro lugar, as condições de identificação e de reconhecimento da representação e, em segundo lugar, a possibilidade de sua utilização para tratamentos. **São regras de conformidade, não são regras de produção efetiva por um sujeito**. Isto quer dizer que o conhecimento de regras de conformidade não está relacionado a competência para formar representações, mas somente para reconhecê-las.

I.2. O tratamento de uma representação é a transformação desta representação no mesmo registro onde ela foi formada. O tratamento é uma transformação interna a um registro.

A **paráfrase** e a **inferência** são formas de tratamento em língua natural. O **cálculo** é uma forma de tratamento próprio das expressões simbólicas (cálculo numérico, cálculo algébrico, cálculo proposicional...). A **reconfiguração** é um tipo de tratamento particular para as figuras geométricas: é uma das numerosas operações que dá ao registro das figuras o seu papel heurístico. A **anamorfose** é uma forma de tratamento que se aplica a toda representação figural.

Há, naturalmente, regras de tratamento próprio a cada registro. Sua natureza e seu número variam consideravelmente de um registro a outro: regras de derivação, de coerência temática, associativas de contiguidade e de similitude. No registro da língua natural há, paradoxalmente, um número elevado de regras de conformidade, e poucas regras de tratamento para a expansão discursiva de um enunciado completo.

I.3. A conversão de uma representação é a **transformação** desta representação em uma representação **em outro registro**, conservando a totalidade ou uma parte somente do conteúdo da representação inicial. A conservação é uma transformação externa ao registro de início (o

[5] As respostas requeridas por questionários do tipo QCM (questionário com questões de múltipla escolha) não exigem atividade de formação de representação, exceção feita às situações de alguma escolha binária diante da palavra (fazer uma cruz, escrever “sim” ou “não”, colocar “1” ou “0”). A interpretação dos acertos a um QCM depende da escolha das respostas que são propostas em cada questão. Para que um QCM forneça dados pertinentes, no quadro de uma pesquisa ou mesmo de uma avaliação, não somente as diferentes questões devem ser escolhidas em função das variaveis cognitivas, mas igualmente as respostas propostas em cada questao. Um QMC permite, assim, explorar sistematicamente o reconhecimento dos objetos matemáticos sob suas diferentes representações possiveis em função das situações, assim como, a capacidade do aluno mobilizar diferentes representações de um mesmo objeto. Toda resolução de problema em matematica pressupõe, implicitamente ou explicitamente, esta capacidade de mobilização.

registro da representação a converter). A *ilustração* é a conversão de uma representação linguística em uma representação figural. A *tradução* é a conversão de uma representação linguística numa língua dada, em uma representação linguística de uma outra língua ou de um outro tipo de linguagem. A *descrição* é a conversão de uma representação não verbal (esquema, figura, gráfico) em uma representação linguística. (Importa, neste propósito, não confundir esta situação com a descrição de um objeto ou de uma situação que não são ainda semioticamente representados: a seleção de traços não obedece aos mesmos entraves).

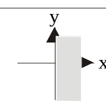
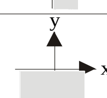
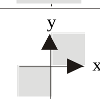
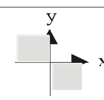
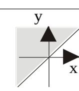
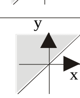
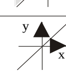
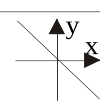
A conversão é uma atividade cognitiva diferente e independente do tratamento. Isto pode facilmente ser observado na seguinte situação muito simples: o cálculo numérico. Alunos podem, muito bem, efetuar a adição de dois números com sua expressão decimal e com sua expressão fracionária e podem não pensar em converter, se isto for necessário, a expressão decimal de um número em sua expressão fracionária (e reciprocamente), ou mesmo não conseguir efetuar a conversão. Muitas vezes é este tipo de exemplo que é colocado para explicar porque os alunos chegam ao ensino médio e não sabem calcular. É esquecer que a expressão decimal, a expressão fracionária e a expressão com expoente constituem três registros diferentes de representação de números. A conversão requer que se perceba a diferença entre o que Frege (1971) chamaria de sentido e referência dos símbolos ou dos signos. Para a expressão de um número é preciso, de fato, distinguir a significação operatória ligada ao significante, em virtude das regras do sistema de expressão escrita (esta significação operatória não é a mesma para 0,25, 1/4 e 25.10^{-2}: *não são os mesmos tratamentos que devem ser considerados para efetuar as adições* 0,25 + 0,25 = 0,5, 1/4 +1/4 = 1/2 e $25.10^{-2} + 25.10^{-2} = 50.10^{-2}$ e o **número representado que não é o significante 0,25, nem o significante 1/4 e nem o significante** $\mathbf{25.10^{-2}}$. Cada uma destas três expressões tem uma significação operatória, mas representa o mesmo número.

A conversão não deve ser confundida com duas atividades que estão, no entanto, próximas: a codificação e a interpretação.

O que é geralmente chamado de "*interpretação*" requer uma mudança de quadro teórico ou uma mudança de contexto. Esta mudança não implica mudança de registro. A "*codificação*" é a "transcrição" de uma representação em outro sistema semiótico diferente daquele em que é dado inicialmente. Esta transcrição é efetuada "em meio a uma série de substituições", aplicando regras de correspondência ou utilizando listas de substituições inicialmente estabelecidas (ECO, 1988, p. 249-252). Estas substituições são efetuadas diretamente sobre os significantes que compõem a representação, sem considerar a organização da representação, nem o que ela representa.

Bem que a atividade cognitiva de conversão de uma representação possa, muitas vezes, parecer ser estreitamente ligada a uma interpretação ou a um código, ela lhe é irredutível, porque, por um lado, ela não se funda sobre alguma analogia, como no caso da interpretação e, por outro lado, a conversão não pode ser obtida pela aplicação de regras de codificação. Não existe e não pode existir regras de conversão como existe regras de conformidade e regras de tratamento. Para ilustrar este ponto, é tomado o exemplo de conversão de representação, que pode parecer com um código: aquele entre a expressão algébrica de uma relação (coluna II da Tabela 1 a seguir) e sua representação gráfica cartesiana (coluna III da Tabela 1).

Tabela 1: conversão entre a expressão algébrica de uma relação (coluna II) e sua representação gráfica cartesiana (coluna III).

I	II	III	I ► III Hachurar	III ► II escolher a expressão
1......o conjunto de pontos que tem uma abscissa positiva	$x > 0$		67%	51%
2......que tem uma ordenada negativa	$y < 0$		67%	61%
3......cuja abscissa e ordenada tem o mesmo sinal	$xy \geq 0$		56%	25%
4	$xy \leq 0$			23%
5......cuja ordenada é superior a abscissa (a reta y = x sendo já traçada no gráfico) .	$y > x$		38%	38%
6......cuja ordenada é superior a abscissa (a reta y = x não sendo traçada no gráfico)	$y > x$		19%	25%
7......cuja ordenada é igual a abscissa	$y = x$		60%	75%
8......cuja ordenada é oposta a abscissa	$y = -x$		34%	58%

Fonte: Duval (2011, p. 108)[6].

[6] N. T. Esta referência é a tradução do artigo: DUVAL, R. Graphiques et équations: L'articulation de deux registres. Annalles de Didactiques et de Sciences Cognitives. v.1. Strasbourg: ULP – IREM, 1988.

Nesta tabela estão os resultados obtidos com 105 alunos. Para a conversão III→II, havia apenas uma escolha entre várias expressões que correspondia ao gráfico hachurado: $y = x$, $y > x$, $x > 0$, $y = - x$, $xy < 0$, etc. Para uma enquete feita em escala de todos os alunos do "seconde"[7] em um estabelecimento ver Leford & alii, 1990.

Este exemplo é interessante porque o sistema semiótico de representação gráfica permite definir uma regra de codificação: um ponto corresponde uma dupla de números. Portanto, não importa qual dupla de números, codifica um ponto do plano.

Ora esta regra de codificação não é suficiente para mudar de registro, para passar, por exemplo, da expressão algébrica de uma relação ($y = x$, $y = x^2$) à representação gráfica correspondente. Ela permite marcar tantos pontos quanto desejado, mas não de traçar o traço contínuo de uma reta ou uma parábola[8]. Por isso é preciso interpolar e aceitar a Lei da Gestalt de Continuidade.

A impossibilidade torna-se flagrante na conversão inversa da representação gráfica para a expressão algébrica (exceto o caso da simples leitura de pontos do gráfico). Esta conversão exige que as unidades significantes propostas para cada registro sejam bem descriminadas. Em outros termos, é preciso identificar bem as variáveis visuais pertinentes com seus diferentes valores no registro gráfico, e na expressão algébrica da relação as diferentes oposições paradigmáticas que dão uma significação, e não somente um objeto aos símbolos utilizados (ver Tabelas 2, 3 e 4 a seguir).

A regra de codificação permite não mais do que duas coisas: a leitura de uma dupla de números sobre o gráfico, a partir de um ponto designado, ou a designação de um ponto, a partir de uma dupla de números. A repetição dessas duas operações elementares não é suficiente para a conversão de representações entre os dois registros. Os resultados registrados em turmas de *seconde*[9], mesmo após um ensino de funções afins e um trabalho sobre diferentes registros, são impressionantes: menos de dois terços dos alunos têm êxito em reconhecer $y = x$ e $y = - x$ nas duas representações gráficas correspondentes e, menos de um terço têm êxito em reconhecer $y = 2x$ e $y = 2 + x$. (DUVAL, 2011; LEFORT & alii, 1990).

[7] N. T. No sistema de ensino francês, as séries de *seconde, premier* e *terminale* correspondem, nesta ordem, aproximadamente às três séries do ensino médio no Brasil, alunos com idade de 15 a 17 anos.

[8] Há alunos que aplicam perfeitamente a regra de codificação, mas que se recusam a ligar todos os pontos obtidos por um traço contínuo para fazer aparecer uma reta ou uma parábola.

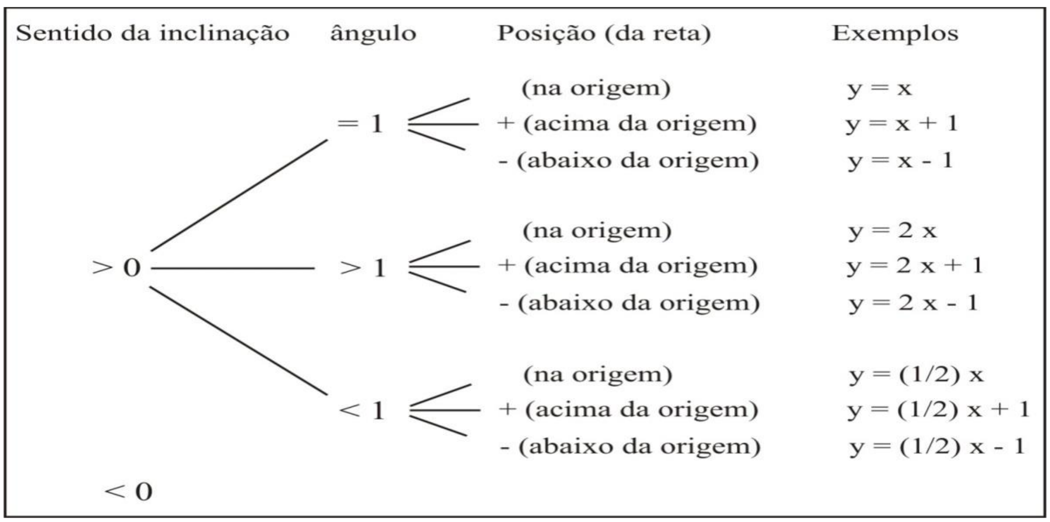
[9] Ver nota de rodapé 7.

Tabela 2: Valores e variáveis visuais para y = ax + b no plano cartesiano.

Variáveis visuais	**Valores**	**Unidades simbólicas correspondentes**	
Sentido da inclinação	ascendente descendente	coeficiente > 0 coeficiente < 0	ausência de sinal presença do sinal –
Ângulo com os eixos	partição simétrica ângulo menor ângulo maior	coefic. variável = 1 coefic. variável < 1 coefic. variável > 1	não há coefic. escrito há coefic. escrito há coefic. escrito
Posição sobre o eixo	corta acima corta abaixo corta na origem	acresc. constante subtrai-se constante sem correção aditiva	sinal + sinal – ausência de sinal

Fonte: Duval (2011, p. 101)

Tabela 3: Identificação e integração, com exemplos, de 18 representações de variáveis visuais.



Fonte: Duval (2011, p. 101)

Tabela 4: Características visuais de representação no plano cartesiano.

Variáveis visuais	Valores	Unidades simbólicas correspondentes
- **implantação** da tarefa (o que se destaca como figura sobre o fundo).	**- zona** **- linha**	>, <, ... =
- **forma** da tarefa (a linha traçada delimita ou não uma zona aberta ou fechada).	**- linha reta** **- linha curva**	**expoente da variável** = 1 **expoente da variável** > 1

Fonte: Duval (2011, p. 102)

Em Duval (2011), essas tabelas mostram as variações que comandaram a construção dos QCM (questionário com questões de múltipla escolha). Esses QMC, assim construídos, forneceram diferenças espetaculares que podem ser observadas em questões que tratam de um mesmo objeto matemático, no caso em tela, as funções afins. Mas, o resultado principal desta pesquisa não está nas observações que permitiram estudar as dificuldades da maioria dos alunos para compreender e utilizar as representações afins, está na escolha das variáveis que permitiram a construção do QMC e que levou a evidência de um fenômeno cuja característica crucial não havia sido remarcada: a conversão das representações semióticas é a primeira fonte de dificuldade à compreensão em matemática.

Neste artigo, essas tabelas são retomadas como verdadeiro resultado de pesquisa apresentado em Duval (2011, p. 101, 102), uma vez que elas constituem a primeira descrição do funcionamento de um registro de representação semiótica, o registro das representações gráficas cartesianas cuja utilização está longe de ser simples e evidente como se supõe no ensino. Essas tabelas estabelecem, deste modo, um exemplo de ajuda à compreensão, não somente do que é um registro de representação semiótica, mas de como aplicar um tipo de análise para todos os registros utilizados em matemática, incluindo-se aí, a língua natural. Tal análise fornece as variáveis semiocognitivas a serem levadas em conta para, não somente organizar as sequências de atividades em sala de aula, mas para tornar os alunos capazes de resolver problemas, quaisquer que sejam as situações e quaisquer que sejam os objetos matemáticos estudados.

A Tabela 2 apresenta as variações para um dos casos da figura da Tabela 4: o traço reto. A tabela 3 explicita os casos das figuras correspondentes às variações descritas na tabela 2 unicamente para o traço ascendente. Vê-se que, para as retas não paralelas aos eixos, há somente 18 representações gráficas que são visualmente diferentes de modo significativo. No caso do paralelismo a um dos eixos, desaparece a variável de referência a este eixo.

Das três atividades cognitivas ligadas à semiose, somente as duas primeiras - a formação e o tratamento são levados em conta no ensino, mesmo em se tratando da organização de sequências de aprendizagem ou da construção de questionários de validação.

Considera-se, geralmente, que:

- A conversão das representações acontece por si mesma desde que haja capacidade de formar representações nos registros diferentes e efetuar tratamentos sobre as representações, por exemplo, construir um gráfico ou uma expressão e substituir, na expressão, valores numéricos nas variáveis;

- A conversão não tem nenhuma importância real para a compreensão dos objetos ou dos conteúdos representados, pois o seu resultado se limita a uma mudança de registro.

Este ponto de vista é justificado desde que uma certa “autonomia” seja atingida no que concerne a atividade matemática. Mas, mascara a característica fundamental desta atividade para a *noesis* e, de maneira mais geral, para a compreensão. Além disso, negligencia o fato de que na aprendizagem a conversão desempenha um papel essencial na conceitualização e, para melhor percebê-la, examine-se o quanto a diversidade de registros de representação engloba.

II NOESIS E COORDENAÇÃO DE REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO

A que corresponde a existência de muitos registros de representação e qual é o interesse de sua coordenação para o funcionamento do pensamento humano?

Antes de examinar as diferentes respostas possíveis a esta questão, não será demasiado lembrar-se de duas situações que mostram o que é fundamental na ligação *noesis/semiose*:

- A utilização de muitos registros de representação parece ser característica do pensamento humano, se comparado com a inteligência animal ou com a inteligência artificial. O que caracteriza o funcionamento do pensamento humano em relação a inteligência animal não é tanto o recurso a um sistema semiótico para comunicar (uma língua), mas o recurso a muitos sistemas de representação: linguagem e imagem gráfica (desenho, pintura, ...). E, no que concerne a inteligência artificial, sublinha-se que um de seus limites é a dificuldade “em ultrapassar a rigidez funcional que impede a especialização do modo de representação” (LEISER, 1987, p. 1869). A especialização do modo de representação reduz-se a um só sistema semiótico: o da expressão booleana.
- O progresso dos conhecimentos é sempre acompanhado da criação e do desenvolvimento de sistemas semióticos novos e específicos que mais ou menos coexistem com o primeiro entre eles, o sistema da língua natural (GRANGER, 1979).

Duas respostas são geralmente propostas para explicar esta necessidade, tendo e vista a diversidade de registros no funcionamento do pensamento humano. Elas estão centradas nos custos de tratamento e nas limitações representativas específicas a cada registro. Propõe-se uma terceira, centrada na condição necessária de uma diferenciação entre representante e representado.

Estas repostas não se excluem, *mas é importante ver que elas se situam em níveis de descrição diferentes da atividade cognitiva.* A primeira resposta, centrada sobre os custos de tratamento, sustenta-se em uma situação de descrição superficial. Ela se refere ao funcionamento de cada registro tal como é conscientemente vivido no tratamento das representações. A segunda reposta, mais semiótica, supõe uma comparação de diferentes modos de representação de um mesmo objeto. Esta comparação requer uma análise de aspectos que são levados em conta e daqueles que não o são em cada registro. A terceira resposta é menos imediatamente acessível, ela supõe uma abordagem desenvolvimentista da atividade cognitiva nas disciplinas em que o recurso a uma pluralidade de registros é fundamental. Ela supõe, além disso, que se substituam, no estudo das aquisições, critérios de "maturidade" (rapidez de tratamento, espontaneidade das conversões, potência das transferências) no lugar de simples critérios de êxitos (obtenção da "boa" resposta):

- *Primeira resposta:* **a economia de tratamento**

A existência de muitos registros permite a mudança de um deles e a mudança de registro tem por objetivo permitir a realização de tratamentos de uma maneira mais econômica e mais potencializada. Parece que esta resposta foi explicitamente colocada pela primeira vez por Condillac em *A Linguagem dos Cálculos*, a propósito da expressão dos números e das notações algébricas. Esta resposta mostra, em termos de custo em memória, os limites muito rapidamente atingidos no registro da língua natural para os tratamentos do tipo cálculo. Tal reposta pode, evidentemente, ser estendida a outros tratamentos: as relações entre objetos podem ser representadas de maneira mais rápida e mais simples para compreender por fórmulas literais do que por frases, como é o caso, por exemplo, para os enunciados do Livro V dos *Elementos* sobre as proposições (Euclides). Em um manual renomado proposto para alunos de *quatrième*[10] é possível encontrar uma ilustração mais recente. Um quadro exposto de maneira sinóptica, três apresentações diferentes de uma mesma igualdade: uma frase, uma expressão literal e um esquema. Este quadro é fornecido com o comentário seguinte:

[10] N. T. As séries *sixième*, *cinquième*, *quatrième* e *troisième* do sistema de ensino francês correspondem, nesta ordem, aproximadamente às quatro séries finais do ensino fundamental no Brasil, alunos com idade entre 11 e 14 anos.

> Com um pouco de hábito (e tu começas a ter), é mais fácil "compreender" uma expressão literal do que uma frase descrevendo um cálculo em francês. Muitas vezes, um esquema descrevendo um cálculo é interessante, mas por outro lado, ele toma mais lugar do que uma expressão literal e, mais ainda, ele não se "transforma" facilmente. Qual linguagem tu preferes? (DELEDICQ & LASSAVEL, 1979, p. 80).

Em matemática, em geral, a economia de tratamento (perceptivo ou algorítmico) é mais avançada do que em língua natural. A desconfiança latente com respeito à língua natural na matemática encontra aí a sua verdadeira origem.

Segunda resposta: a complementaridade dos registros

Esta resposta, que é mais centrada sobre as possibilidades próprias de cada sistema semiótico, cresceu mais recentemente (BRESSON, 1987). Podendo ser formulada da seguinte forma: a natureza do registro semiótico que é escolhido para representar um conteúdo (objeto, conceito ou situação) impõe uma seleção de elementos significativos ou informacionais do conteúdo que representa. Esta escolha é feita em função das possibilidades e dos inconvenientes semióticos do registro escolhido. Uma linguagem não oferece as mesmas possibilidades de representação que uma figura ou um diagrama. Isto quer dizer que *toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa*, e que de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que estão representados.

Assim, as figuras e, de maneira geral, todas as representações analógicas, podem representar somente estados, configurações ou produtos de operações, não ações ou transformações (BRESSON, 1987, p. 943). Para representar operações é preciso um registro que tenha as propriedades de uma língua: língua natural ou álgebra (BRESSON, 1987, p. 939). Por outro lado, as figuras permitem representar a totalidade de relações entre os elementos que constituem o objeto ou a situação (LARKIN & SIMON, 1987).

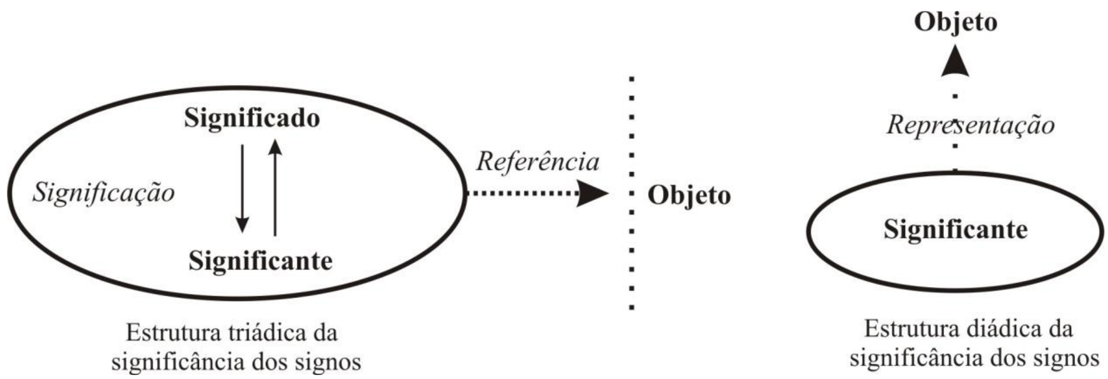
Terceira resposta: a conceitualização implica coordenação de registros de representação

Há uma ideia que é geralmente admitida, sendo possível formulá-la da maneira seguinte:

- **Hipótese 1**: se o registro de representação é bem escolhido, as representações destes registros são suficientes para permitir a compreensão do conteúdo conceitual representado.

Esta hipótese parece, aliás, justificada pela estrutura mesmo da representação tal como apresentada habitualmente, em função da estrutura da significação dos signos:

Figura 1: estrutura diádica e triádica das significâncias dos signos



Nesta figura, os diferentes elementos constitutivos da significação dos signos estão em negrito, e as relações entre eles estão em itálico.

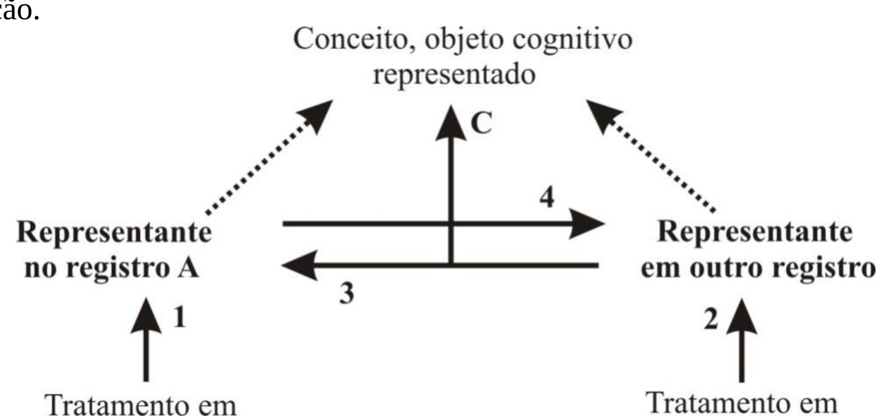
Com isso, é possível avaliar a oposição entre dois tipos de signos. Aqueles da estrutura triádica, como os signos linguísticos (ou mesmo as figuras). Para este tipo de signo, a relação de referência apresenta duas características: por um lado, a relação com um objeto depende de uma relação de significação, esta última sendo determinada pelo sistema da língua (SAUSSURE, 1973, p. 159, 163) (ou pelas leis da percepção visual). Por outro lado, a relação com o objeto "é uma possibilidade que só é assegurada no plano do discurso" (BENVENISTE, 1966, p. 129-131; 1979, p. 64-66) (ou no plano de interpretação para as figuras). Os signos de estrutura diádica, tais como algumas noções matemáticas (notações de funções, vetores, operadores...), não têm significação e são constituídos por uma relação instituída a um objeto. Geralmente estas duas estruturas de significação não são distinguidas. Mas, distinguidas ou não, *não se duvida que o emprego de signos ou de representações de apenas um registro seja suficiente para que a sua significação funcione cognitivamente nos sujeitos que aprendem.* Dito de outro modo, a significação é postulada como sendo de imediato trans registro, e como consequência as operações de conversão de representação de um registro a outro parecem evidentes e negligenciadas em relação às operações de formação ou de tratamento das representações.

A compreensão, segundo a qual a atividade de conversão não causa dificuldades maiores, decorre diretamente desta hipótese 1 e da concepção que se faz da estrutura de representação.

Esta hipótese parece suficiente se referida apenas aos sujeitos que têm um bom domínio da atividade matemática (os pesquisadores em matemática ou os professores, por exemplo), mas não é mais suficiente referida aos sujeitos em curso de aprendizagem, alunos do ensino fundamental e médio. Ela não permite imaginar que a conversão de representações de um registro a outro possa ser uma fonte importante de dificuldades ou de insucessos. No quadro de tal hipótese, muitas vezes admitida como uma evidência, as dificuldades e insucessos observados podem somente sugerir *noesis* e não *semiose.*

- Hipótese 2: A compreensão (integral) de um conteúdo conceitual repousa sobre a coordenação de ao menos dois registros de representação, e esta coordenação se manifesta pela rapidez e a espontaneidade da atividade cognitiva de conversão. Esta hipótese apela para outra descrição da estrutura de representações semióticas e de seu funcionamento:

Figura 2: hipótese fundamental de aprendizagem: estrutura da representação em função de conceitualização.



No esquema desta figura, as flechas 1 e 2 correspondem as transformações internas a um registro e as flechas 3 e 4 às transformações externas, quer dizer, mudança de registro por conversões. A flecha C corresponde a compreensão integral de uma representação: ela supõe uma coordenação de dois registros. As flechas pontilhadas marcam a distinção clássica entre representante e representado. Naturalmente, o esquema encara o caso mais simples de coordenação entre dois registros: em alguns domínios, como a álgebra linear, uma coordenação entre três registros, pelo menos, pode ser requisitada. Da mesma forma é possível ver uma das possibilidades importantes da estrutura da representação: **o representante de um registro pode ser considerado como o representante de outro registro**, como é o caso em uma relação entre texto e imagem. Enfim, não há aí flechas para os tratamentos próprios a cada registro. Isto não exclui os casos de congruência ou de “equivalência computacional”, mas o interesse de mudanças de registro depende do fato que cada registro tem tratamentos que lhes são próprios.

Esta coordenação está longe de ser natural. E ela não parece poder realizar-se no quadro de um ensino, principalmente determinado por conteúdos conceituais. Pode-se observar, em todos os níveis de ensino, na grande maioria dos alunos, um **enclausuramento de registros de representação**. Estes não reconhecem o mesmo objeto nas representações que são dadas em sistemas semióticos diferentes: a expressão algébrica de uma relação e sua representação gráfica (ver, por exemplo, a Tabela 1); a expressão numérica de uma relação e sua representação geométrica sobre uma reta ou no plano (LÉMONIDIS, 1990); o enunciado de uma fórmula em francês e a expressão desta fórmula na forma literal; a descrição de uma situação e a sua equação matemática correspondente; etc. Este isolamento subsiste, mesmo após um ensino de conteúdos matemáticos que tenha tido estes diferentes registros amplamente utilizados.

Naturalmente, a ausência de coordenação não impede toda compreensão. Mas esta compreensão, limitada ao contexto semiótico de um registro apenas, não favorece em nada as transferências e as aprendizagens ulteriores: torna os conhecimentos adquiridos pouco ou não utilizáveis em outras situações aonde deveriam realmente ser utilizados. Em definitivo, esta compreensão mono registro conduz a um trabalho às cegas, sem possibilidade de controle do “sentido” daquilo que é feito.

A coordenação das imagens (mentais) e da língua natural em seu emprego corrente, que é estudada por certos psicólogos (PAÏVO, 1986), não é mais suficiente para assegurar a coordenação dos múltiplos registros semióticos de representação mobilizados em matemática e em outras disciplinas.

Muitas razões podem explicar a amplitude e a profundidade deste fenômeno de enclausuramento de registros de representação. Mencionaremos, neste trabalho, não mais do que uma, inerente a variedade heterogênea de registros: a **não congruência**. Quando há congruência[11] entre a

[11] Os três critérios de congruência são:
- a possibilidade de uma correspondência “semântica” de elementos significantes: a cada unidade significante simples de uma das representações pode-se associar uma unidade elementar;
- A univocidade “semântica” terminal: a cada unidade significante elementar da representação de partida, corresponde a uma única unidade significante elementar no registro da representação de chegada;
- A organização das unidades significantes: as organizações respectivas das unidades significantes de duas representações comparadas, conduzem apreender as unidades em correspondência semântica,

representação de partida e a representação de chegada, a conversão é trivial e poderia quase ser considerada, intuitivamente, como um simples código. Quando não há congruência, não somente a conversão torna-se custosa em termos de tempo de tratamento, mas pode criar um problema diante do qual o sujeito se sente desarmado e a possibilidade de conversão não vem mais à mente.

Não existe regra alguma que possa determinar, *a priori*, todos os casos de não congruência entre as representações de dois registros determinados. As dificuldades ligadas ao fenômeno de não congruência não são dificuldades não conceituais.

A coordenação de muitos registros (Hipótese 2 e Figura 2) é, portanto, uma condição absolutamente necessária para que o esquema diádico de representação habitualmente admitido (Hipótese 1 e Figura 1) corresponda a um funcionamento cognitivo efetivo no sujeito e, para que, apenas superficialmente, o recurso a apenas um registro de representação parecesse suficiente. Ora, numerosas observações, nos diferentes níveis de escolaridade, mostram que a coordenação não se efetua espontaneamente para a maior parte dos sujeitos e que não se pode esperar a conscientização por parte de um professor que desconhece a forte ligação existente entre *noesis* e *semiose.*

III AS CONDIÇÕES DE UMA APRENDIZAGEM QUE LEVA EM CONTA A SEMIOSE

Se a conceitualização implica coordenação de registros de representação, o principal caminho das aprendizagens de base matemática não pode ser somente a automatização de certos tratamentos ou a compreensão de noções, mas deve ser a coordenação de diferentes registros de representação, necessariamente mobilizados por estes tratamentos ou para esta compreensão. A coordenação de registros aparece como condição fundamental para todas as aprendizagens de base, ao menos nos domínios em que os únicos dados que são utilizados são as representações semióticas, como em matemática e em francês.

De fato, o ensino de matemática é em geral organizado como se a coordenação de diferentes registros de representações introduzidas ou utilizadas fossem efetuadas rapidamente e

---

segundo a mesma ordem nas duas representações. Este critério de correspondência, na ordem do arranjamento das unidades que compõem cada uma das duas representações, é pertinente apenas quando estas apresentam o mesmo número de dimensão.

Estes três critérios permitem determinar o caráter congruente ou não congruente da conversão a ser efetuada entre duas representações semióticas diferentes, e que representam, ao menos parcialmente, o mesmo conteúdo. Permitem, igualmente, determinar um grau de não congruência. (Duval, 1993).

espontaneamente, como se os problemas e custos ligados a não congruência não existissem. Definitivamente, o que é importante não é a mudança de registro a ser efetuada, mas os tratamentos que poderão ser realizados na representação obtida após a mudança de registro. A coordenação de registro de representação não parece, portanto, se impor como um dos objetivos principais de ensino de *sixième*[12] ao *seconde*[13]. Basta olhar como são introduzidos os novos registros: representações gráficas, figuras geométricas, escrita simbólica do cálculo de predicados (quantificadores) para constatar a ausência de tal objetivo - prende-se a algumas correspondências locais, geralmente mais para o caso da congruência e regras de emprego ou de conformidade.

É evidente que esta ausência, que não leva em conta a coordenação de registros, não é por acaso ou por negligência. A falta quase completa de regras que pudessem contribuir para a atividade cognitiva de conversão, poderia ser suficiente para explicar.

Além disso, não é certo que propor exercícios locais de conversão favoreceria esta coordenação, a qual parece estar ligada a uma conscientização e objetivação mais globais do que o que permite o trabalho em cada representação em particular. Uma aprendizagem que leve em consideração a ligação estreita que existe entre a *noesis* e *semiose* deve, então, elevar os alunos a uma condição de tomada de conscientização mais global e, para tal, são necessárias atividades de ensino mais específicas. Nesta perspectiva, três tipos de atividade extremamente diferentes impõem-se (apresenta-se, aqui, uma caracterização bastante breve de cada uma delas): o primeiro tipo concerne a apreensão das representações semióticas; o segundo, a aprendizagem de tratamentos próprios de uma certa categoria de registros e; o terceiro tipo concerne o modo de produção de representações complexas.

III.1 ATIVIDADES DE VARIAÇÕES COMPARATIVAS RELATIVAS À SIGNIFICAÇÃO DAS REPRESENTAÇÕES

A apreensão das representações semióticas supõe a **discriminação das unidades significantes** no registro ou onde a representação é produzida. O único modo de discriminar as unidades significantes de uma representação é realizar **a observação**, por um lado, **variações de**

[12] N. T. As séries *sixième*, *cinquième*, *quatrième* e *troisième* do sistema de ensino francês correspondem, nesta ordem, aproximadamente às quatro séries finais do ensino fundamental no Brasil, alunos com idade entre 11 e 14 anos.
[13] N. T. No sistema de ensino francês, as séries de *seconde*, *premier* e *terminale* correspondem, nesta ordem, aproximadamente às três séries do ensino médio no Brasil, alunos com idade entre 15 e 17 anos.

representações sistematicamente efetuadas em um registro e, por outro lado, **as variações concomitantes de representação em outro registro**. Isto significa dizer que a discriminação das unidades significantes que constituem uma representação em um registro está estreitamente ligada a atividade de conversão. Isto quer dizer, ainda, que a conversão de uma representação não é separável da percepção das variações próprias ao registro de partida e de chegada. Naturalmente, fazendo variar uma representação, muda-se de conteúdo representado: a escolha, entre diversas representações possíveis em um registro de chegada, com aquela que corresponde a representação modificada no registro de partida permite, deste modo, identificar as variações das unidades significantes em cada registro de representação. Isto pressupõe que se tenha previamente identificado todos os fatores de variação pertinente de uma representação em um registro. Sem isso, não se pode propor uma situação de variação sistemática. Concretamente, para poder propor tais atividades de variação comparativa, é preciso, inicialmente, dispor de análises como aquelas apresentadas anteriormente nas Tabelas 2, 3 e 4. É somente tendo por base esses tipos de análises que se pode elaborar tais atividades, além de construir uma avaliação adequada das aquisições dos alunos.

III.2 ATIVIDADES DE ACOPLAMENTO OU DEESACOPLAMENTO ENTRE TRATAMENTOS NÃO SEMIÓTICOS E TRATAMENTOS SEMIÓTICOS

Tem-se a ideia de que o ensino de matemática trata, em grande parte, a aprendizagem de tratamentos que são específicos a cada registro de representação: cálculo numérico, resolução de equações, construção e leitura de gráficos, construção de figuras geométricas, etc. Ora, um exame atento mostra que não é nada disso. Uma aprendizagem dos tratamentos específicos em um registro de representação é proposta não mais do que para **os registros em que os tratamentos são unicamente do tipo de cálculo e não para o caso dos tratamentos que não são de cálculo.** O exemplo mais impressionante é o das figuras geométricas.

Em geral, prende-se ou ao tratamento perceptivo ou ao tratamento matemático (Tabela 5 a seguir).

A importância legítima dada as atividades de construção de figuras é, neste ponto de vista, reveladora. As atividades de construção de figura são atividades que privilegiam a formação de representação de um objeto matemático ou de uma situação matemática no registro figurativo: elas não respeitam a significação perceptiva das diferentes unidades figurais, mas a subordinam aos elementos conceituais presentes na definição dos objetos. Essas atividades levam, deste modo, a considerar as figuras geométricas como figuras matemáticas, que dizer, como representações onde é a denotação que conta e não a significação propriamente perceptiva ou operatória (ver esquemas da reta nas Tabelas 2, 3 e 4). Pode-se dizer, nestas condições, que as atividades de construção “ensinam a ver”, isto é, permitem descobrir, mobilizar e controlar a **produtividade heurística** das figuras.

Os tratamentos que constituem a produtividade heurística das figuras geométricas combinam operações que não se mostram ser nem do tipo de apreensão puramente perceptiva, nem do tipo conceitual. Em certos casos, os fatores próprios à apreensão perceptiva podem favorecer estas operações e, em outros casos, ao contrário, inibi-las. Além disso, estas operações são independentes de todo raciocínio dedutivo e do emprego de definições.

Por isso a importância de distinguir esta apreensão operatória das figuras da apreensão perceptiva, da apreensão discursiva e teórica (Tabela 5).

Os tratamentos figurais são operações que podem ser efetuadas materialmente ou mentalmente sobre as unidades figurais em uma figura geométrica, para obter uma modificação configural desta figura. Estes tratamentos podem ser efetuados independentemente de toda definição explícita e implícita do objeto matemático. Uma figura geométrica permite diferentes tratamentos figurais. Segundo a maneira de apreensão que se privilegia, uma figura geométrica pode aparecer com uma estrutura triádica ou diádica. Uma das violências semióticas da matemática, desde Hilbert, consiste em querer considerar as figuras segundo uma estrutura diádica e não triádica: desconhece-se, deste modo, a noção de unidade figural, tendo uma significação própria e que pode, dependendo do caso, denotar objetos diferentes. Dessa forma, impossibilita uma análise melhor sobre a produtividade heurística das figuras geométricas, as quais são constituídas de ao menos duas unidades figurais.

As atividades de construção de figuras introduzem, nesta apreensão discursiva e teórica, dificuldades particulares no momento de se dar conta delas, e dificuldades relacionadas aos instrumentos de construção. É por isso que as figuras revelam um quarto modo de apreensão. Naturalmente, a utilização matemática das figuras mobiliza esses quatro modos de apreensão. Mas, os tratamentos que são reveladores de uma apreensão operatória, querem dizer, os tratamentos puramente figurais, têm uma importância muito particular na medida em que eles são decisivos para a utilização heurística da figura. Mas, quais seriam as condições de tal aprendizagem? E seria verdadeiramente possível?

Tabela 5: As apreensões em geometria

<table>
<tr>
<th>Apreensão perceptiva</th>
<th colspan="3">Apreensão operatória de uma figura
(Estrutura diádica da representação)</th>
<th>Apreensão sequencial
(Estrutura diádica)</th>
<th>Apreensão discursiva
(segundo a definição dos objetos)</th>
</tr>
<tr>
<td>Integração de estímulos (contrastes bruscos de brilho) em uma figura.</td>
<td>Tipos de modificações figurais.</td>
<td>Operações que modificam a figura: processo heurístico.</td>
<td>Fatores internos que disparam ou inibem a visibilidade destas operações.</td>
<td>Fatores externos que intervêm na construção da figura.</td>
<td>Variações de congruência entre as modificações figurais visíveis e dedução.</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">Leis de agrupamento de estímulos (simplicidade, fechamento, proximidade, ..) e identificação de formas.

Indicadores de profundidade e de distância (tamanho, superposição, perspectiva em relação a um ponto de fuga, inclinação em relação a um plano fronto-parelelo) e número de dimensões: 2D ou 3D orientação no plano fronto-paralelo.</td>
<td>Mereológica (relação parte/todo).</td>
<td>- reconfiguração Uma figura se decompõe em diferentes unidades figurais: elas podem ser combinadas em outra figura ou em diferentes sub-figuras;
...</td>
<td>- partição em diversas sub-figuras pertinentes;
- convexidade ou não das sub-figuras;
- complemetariedade;
- duplicação;
...</td>
<td rowspan="2">Grau de congruência entre as unidades figurais possíveis e aquelas permitidas pelos instrumentos utilizados.</td>
<td rowspan="2">- As unidades figurais elementares e os objetos matemáticos utilizados pelo raciocínio dedutivo têm ou não o mesmo número de dimensões.

- em função das hipóteses dadas, há congruência ou não entre o tratamento figural heurístico e a ordem nos passos da dedução.</td>
</tr>
<tr>
<td>Ótico.</td>
<td>- a mesma forma e orientação no plano fronto-paralelo, mas com variação de tamanho: superposição em profundidade de duas figuras semelhantes;
- variação do plano em relação ao plano fronto-paralelo (variação de forma e constância de forma e de tamanho).</td>
<td>- a mesma orientação das figuras (objeto e imagem);
- as linhas de perspectiva são todas distintas dos lados das duas figuras;
- centro de homotetia no interior ou no exterior do contorno convexo envolvendo as duas figuras.</td>
</tr>
<tr>
<td>De posição.</td>
<td>O mesmo tamanho e forma, mas com variação de orientação, rotação, translação, ...</td>
<td>- pregnância das direções vertical e horizontal.</td>
<td></td>
<td></td>
</tr>
</table>

Uma aprendizagem dos tratamentos propriamente figurais deve ser uma aprendizagem centrada na apreensão operatória das figuras e não nas apreensões sequenciais e discursivas. Deve levar em consideração todos os fatores que mexem com a visibilidade de uma operação, quer dizer, os fatores de organização perceptiva de uma figura que podem contribuir para a mobilização espontânea desta operação ou, ao contrário, inibi-la. Uma experiência de tal aprendizagem foi realizada para o caso da operação de reconfiguração, por Padilla (1992). Contudo, a proposta é ater-se a uma pesquisa que trata de outra operação: superposição em profundidade, que é um tratamento figural que pode ser usado para a representação de situações de homotetia (LÉMONIDIS, 1990).

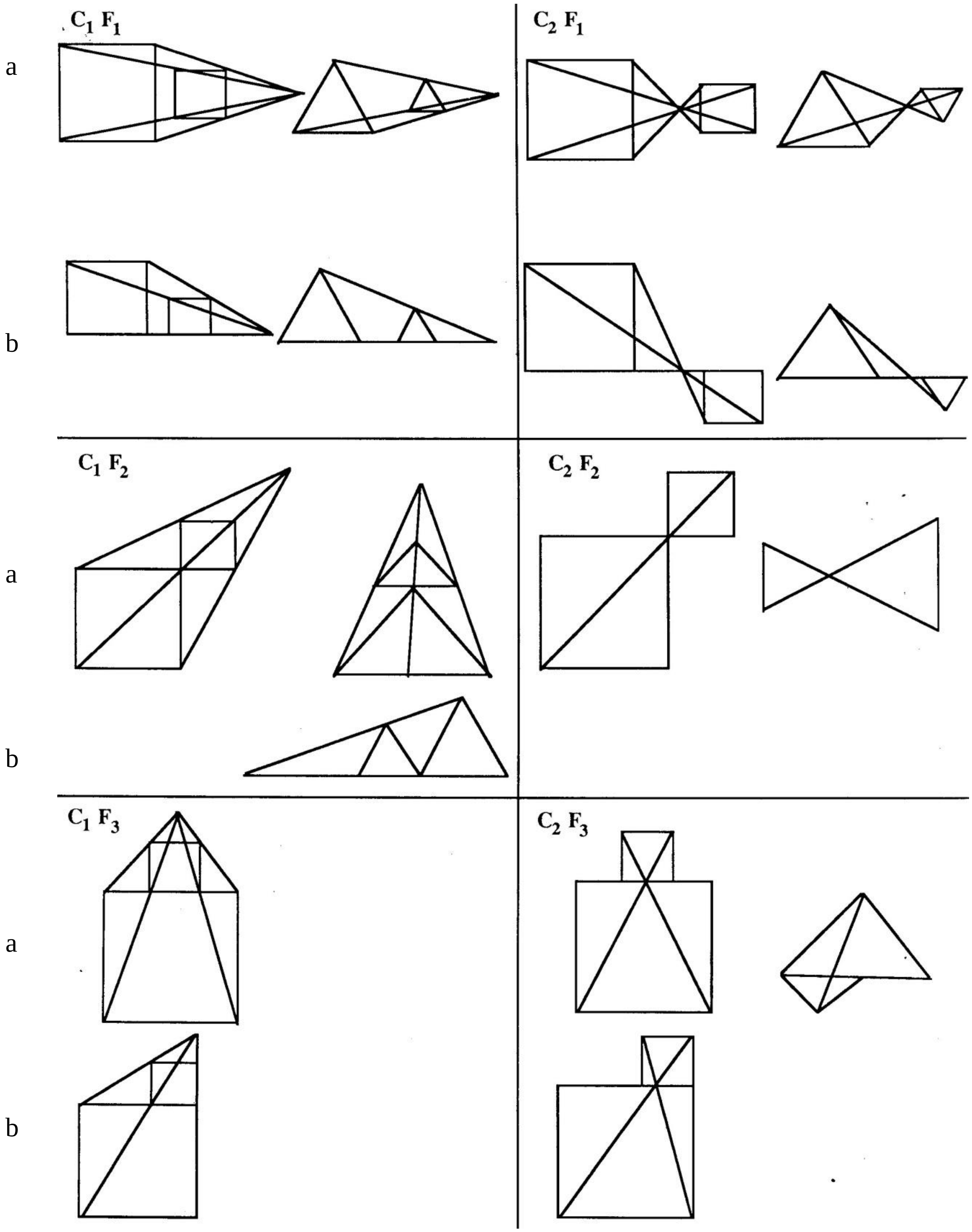
A tabela 6, a seguir, extraída do trabalho de Lémonidis (1990, p. 58, 59), mostra uma classificação sistemática dos diferentes casos de figuras na representação de situações de homotetia no plano.

Esta classificação foi estabelecida em função dos parâmetros seguintes (LÉMONIDIS, 1990, p. 50-57):

- Existência (figura à esquerda em cada coluna) ou não (figura à direita em cada linha) de uma simetria interior;
- Relação positiva (coluna C1) ou negativa (coluna C2) da configuração homotética;
- Número de pontos remarcáveis (pontos que aparecem como particulares) em cada figura;
- Posição respectiva de cada figura, uma em relação a outra: algum ponto em comum (primeira linha), intersecção reduzida a um ponto (segunda linha), figuras contíguas (terceira linha), figuras que se sobrepõem (a fronteira de uma entra na outra), figura em que uma é região limítrofe da outra, e figuras em situação de inclusão completa;
- Número de traços (reta que une um ponto a sua imagem) que ligam os pontos remarcáveis das figuras homotéticas.

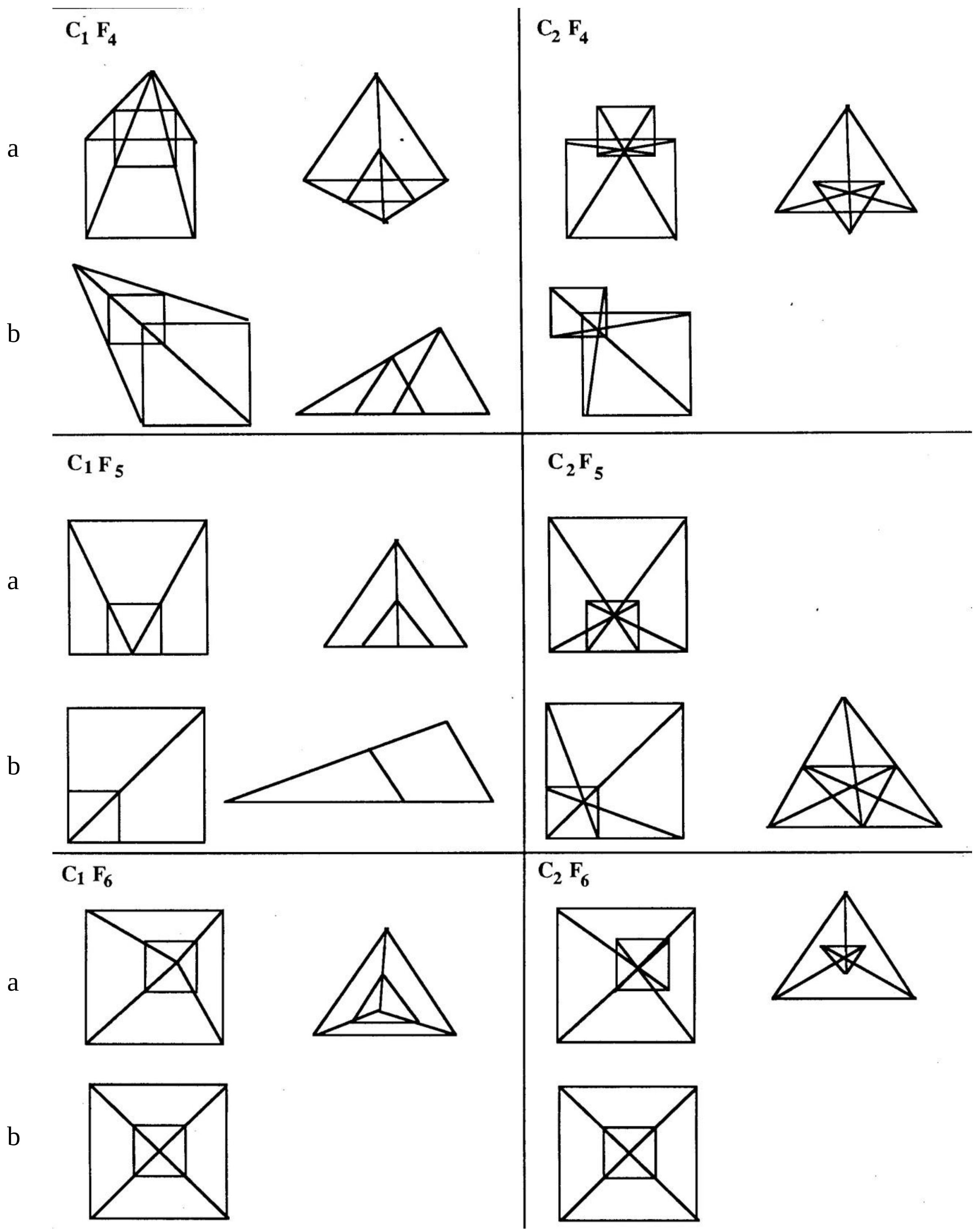
Uma vez estabelecida esta classificação, observa-se que certas configurações são percebidas, em um primeiro olhar, em profundidade, outras somente no plano e outras ainda são perceptivamente ambíguas, que podem ser muito bem-vistas tanto em profundidade quanto no plano.

Tabela 6: classificação de homotetia no plano.



Fonte: Lémonidis (1990, p. 58, 59) com a inclusão da coluna à esquerda das linhas a e b.

(Continuação)



1 - As configurações que são espontaneamente **percebidas em profundidade** são aquelas para as quais as figuras possuem a mesma orientação e aquelas em que os traços, quer dizer, as retas que unem um ponto da figura objeto ao ponto da figura imagem, são distintas dos lados das figuras homotéticas.

Dois fatores determinam a orientação de uma figura homotética: *a orientação das formas das duas figuras* (objeto e imagem) *em relação ao plano fronto-paralelo* (ou nas bordas do quadro do material de suporte), e *a posição do centro de homotetia* em relação *ao envelope convexo* que reuni a figura objeto e a figura imagem (quando o centro está no exterior, a relação numérica é positiva e quando está no interior a relação numérica é negativa). Quando o centro é "interior", há a inversão da figura imagem em relação à figura objeto. Deste modo, *duas figuras podem ter a mesma orientação de forma no plano fronto-paralelo e não ter a mesma orientação homotética*: por exemplo, a configuração C2F1 na Tabela 6.

Quando estas duas condições são preenchidas (a mesma orientação e traços distintos dos lados), pode-se ver o centro de homotetia como um ponto de fuga: as configurações C1F1, C1F2, C1F3a, mas não C1F3b.

2 - As configurações **perceptivamente ambíguas para a percepção em profundidade** são aquelas:

- para as quais todos os traços não são distintos: C1F4b.

A representação figural de objetos impossíveis repousa nas construções nas quais certos traços são distintos e outros são confundidos:

- Para os quais todos os traços são distintos, mas eles parecem se distribuir como "raios", a partir do centro C2F1a (comparar com C2F5a) (LÉMONIDIS, 1990, p. 54, 60, 73).

As configurações ambíguas não podem ser confundidas com as configurações totalmente não interpretáveis. Estas configurações são aquelas pelas quais é impossível distinguir o centro percebido como "interior" ou como "exterior". Estas são as configurações para as quais há inclusão completa da figura objeto e da figura imagem (F6 na tabela 6). Estas configurações estão em oposição àquelas em que as figuras objeto e imagem não possuem algum ponto em comum e são simétricas: para estas figuras, pode-se distinguir visualmente um centro "interior" e um centro "exterior" (LEMONIDIS, 1990, p. 50). Em todos estes casos, a materialização dos traços ou a denominação dos pontos homólogos (quer dizer, o recurso a uma apreensão discursiva) torna-se necessário.

Todas as configurações homotéticas planas podem ser reagrupadas em três classes, segundo o grau de exposição que elas oferecem para a operação de superposição em profundidade. Isto permite que se organize uma aprendizagem de tipo de tratamento figural. Pode-se, de fato, apresentar todos os tipos de configurações homotéticas distinguidas na classificação de Lémonidis (1990), de acordo com a ordem seguinte: as configurações que prestam à superposição em profundidade[14], em seguida aquelas que são perceptivamente ambíguas e, enfim, somente aquelas que são irredutivelmente planas. Para o caso das figuras percebidas em perspectiva, tem-se a possibilidade de uma combinação de tratamento puramente figural e tratamento matemático. Para estas figuras que são somente percebidas de forma plana (C1F6, C2F6), o desmembramento se impõe.

Pode-se, deste modo, elaborar um ensino da homotetia que leve o aluno a se apropriar dos meios de tratamento da representação figural, e esta apropriação se mostra eficaz não somente para a compreensão da homotetia, mas para o seu ingresso na abordagem de outras noções como a noção de baricentro (LÉMONIDIS, 1990).

III.3 ATIVIDADES DE DUPLA PRODUÇÃO PARA AS REPRESENTAÇÕES SEMIÓTICAS COMPLEXAS

Chama-se representação complexa toda representação que “expõe um procedimento”: um texto, um cálculo com diversas etapas, um raciocínio.

É essencial, quando estas produções são feitas em um registro em que a organização semiótica é linear, que se solicite previamente uma produção em um registro onde a organização semiótica não seja linear (gráfico, esquema, etc.), e solicitar, em seguida, a produção no registro de organização semiótica linear uma descrição da primeira produção. Esta dupla produção se mostrou decisiva para a aprendizagem do raciocínio dedutivo (DUVAL, 1991) e pode ser igualmente fecunda para a compreensão de texto.

[14] Separam-se, cuidadosamente, na apresentação, as configurações de centro interior das de centro exterior. Uma vez que para as configurações de centro interior há inversão da figura imagem, se bem que elas podem ser espontaneamente percebidas em perspectiva. Este fator de variação deve ser levado em conta.

À GUISA DE CONCLUSÃO

Esta abordagem abre um vasto campo de pesquisas no tocante à diversidade das representações utilizadas em matemática (gráficos, figuras, esquema, escrita simbólica). As primeiras pesquisas efetuadas nesta perspectiva, até o presente momento, mostraram-se frutuosas para a aprendizagem matemática (GUZMAN RETAMAL, 1990; LÉMONIDIS, 1990; PADILLA, 1992). As pesquisas que se apresentam como as mais complexas tratam, naturalmente, da atividade de conversão na qual a representação de partida é um enunciado em língua natural ou um texto.

Todos os problemas de "matematização", quer dizer, aqueles que visam descobrir a aplicação de tratamentos matemáticos já adquiridos em questões que estão mergulhadas em situações não matemática cotidianas ou profissionais, como é o caso dos problemas aditivos, problemas de "mistura", problemas de determinação de equação etc., são exemplos dos mais elementares. A resolução deste tipo de problemas depende, inicialmente, da compreensão do enunciado do problema e das conversões das informações pertinentes que são apresentadas: trata-se de passar de uma descrição discursiva dos objetos relevantes no enunciado da questão para a expressão simbólica (numérica ou literal), de suas relações que são marcadas linguisticamente, geralmente de modo muito variável no texto do enunciado. É somente a partir desta expressão simbólica matemática (operações aritméticas, regras das médias, resolução de um sistema, etc.) que os tratamentos podem ser aplicados. Ora, a efetuação desta passagem não depende do conhecimento destes tratamentos ou de fórmulas que os inicializam, uma vez que não são os números que importam no enunciado de tais problemas, mas os sintagmas nominais ou verbais que lhes dão sentidos relacionais.

Há ainda, mais amplamente a ser considerado, o raciocínio em suas formas mais elaboradas: a argumentação e a dedução. A argumentação é evidentemente uma forma de raciocínio que não pode estar desvinculada do registro da língua natural. Do mesmo modo a dedução, uma vez que se refere às definições, aos axiomas e aos teoremas que são enunciados em língua natural, como é o caso da geometria. A conversão em outro registro pode, então, parecer inútil do ponto de vista do tratamento e pode mesmo se tornar uma fonte de dificuldades suplementares. É suficiente lembrar aqui todas as dificuldades as quais se depara um professor de lógica para se dar conta de que a passagem de um registro em escrita simbólica, na condução de um raciocínio dedutivo, parece de fato excluída, quando a entrada do aluno na aprendizagem da demonstração.

Pode-se, então, considerar o registro em língua natural como um registro de partida no que concerne o raciocínio? A importância da *semiose* na *noesis* convida a responder afirmativamente. **A língua natural deve ser considerada, ao mesmo tempo, como um registro de partida e como um registro de chegada. Mas, é aí que está o ponto importante: esta conversão interna não é feita diretamente, ela passa por representações intermediárias não discursiva**.

A explicitação de representações intermediárias não discursivas aparece como uma condição necessária à aprendizagem do raciocínio dedutivo, como no caso do controle de uma argumentação (DUVAL, 1992; DUVAL e EGRET, 1993). Não se trata de uma condição que se imporia somente para o raciocínio ou para as situações em que a língua natural constitui um registro de chegada, parece ser igualmente requisitada para o desenvolvimento da compreensão de texto a passagem de um texto a outro (resumo, comentário, explicação etc.) que exprime compreensão, não pode ter uma passagem direta (DUVAL, 1993). Do mesmo modo, a conversão de um enunciado do registro em língua natural para um registro em escrita simbólica requer o desvio às representações intermediárias. As dificuldades do ensino da lógica e, mais particularmente, a aprendizagem da manipulação conjunta da negação e dos quantificadores têm, em grande parte, a ilusão de uma passagem direta.

Naturalmente, o tipo de representação intermediária não discursiva a ser mobilizada quando o registro de partida é a língua natural, muda de acordo com o registro de chegada e de acordo com o tipo de resolução a ser efetuado: resolução de um problema de matematização, raciocínio, resumo, conversão em um registro simbólico etc., encontra outras análises mais particulares que vão além do objetivo deste artigo (ver DAMM, 1992).

Em todo caso, não é possível negligenciar ou descartar a língua natural no âmbito do ensino da matemática, ela é um registro tão fundamental quanto os outros registros, particularmente aqueles em que os tratamentos de cálculo são possíveis. Mas, inversamente, não é mais possível ser omisso ou mesmo descartar os registros de representação discursiva no âmbito do ensino de francês, na medida em que o desenvolvimento e a compreensão de textos constituem um dos objetivos prioritários deste ensino. É por isso que nestas duas disciplinas não pode haver verdadeiramente aprendizagem, na medida em que as situações e atividades propostas não levam em conta a necessidade de vários registros de representação para o funcionamento cognitivo do pensamento humano e o caráter central da atividade de conversão.

REFERÊNCIAS

BENVENISTE, E. Problèmes de linguisteque générale, 1, Paris: Gallimard, 1996.

BENVENISTE, E. Problèmes de linguisteque générale, 2, Paris: Gallimard, 1974.

BRESSON, F. Les fonctions de Représentations e de communication. Psychologie (Eds. Piaget, Mounoud, Bronckard) Encyclopédie de la pleïade. p. 933-982, 1987.

DELEDICQ & LASSAVE, (1979). Faire des mathématiques, 4ème. Paris: Cédic.

DAMM, R. F. Apprentissage des problèmes additifs et compréhensio des énoncés. Thèse ULP, Strasbourg, 1992.

DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Trad. M. T. Moretti. Revemat, v.6, n.2, Florianópolis: UFSC/MTM/PPGECT, 2011.

Disponível em www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat

DUVAL, R. Sémiosis et noésis. 1993. (Préprint do livro publicado com o título “Sémiosis et pensée humaine”. Bern: Peter Lang, 1995).

DUVAL, R. Geometrical pictures: kind of representation and specific processings. In F. Hitt (Org.). Representations and mathematics visualization. Cinvestav, 2002.

DUVAL, R., EGRET, M. A. Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. Repères, 12, p.114-140, 1993.

DUVAL, R. Argumenter, démontrer, expliquer : continueté ou rupture cognitive. Petix, n. 31, p. 37-61, 1992.

DUVAL, R. Structure du raisonnement déductif e apprentissage d la démonstration. Educational Studies in Mathematics, 22, p. 233-261, 1991

ECO, H. Sémiotique et Philosofie du Langage. Trad, Bouuzaker). Paris: PUF, 1988.

FREGE, G. Écrits logiques et philosophiques. Trad. Imbert. Paris: Seuil, 1971.

GRANGER, G. G. Langage et epistémologie. Paris: Klinksieck, 1979.

GUSMAN RETAMAL, I. Le rôle des représentations dans l’appropriation de la notion de fonction. Thèse ULP, Starsbourg, 1990.

LEFORT & L.E.G.T. de COLMAR. Changement de registre. L'ouvert n. 60, 1990.

LARKIN, J. H., SIMON, H. A. Why a diagram is (sometimes) worth Ten Thousant Words. Cognitive Science, 11, p. 65-99, 1987.

LEISER, D. Les fonctions de stockage. Psychologie (eds. Piaget, Mounoud, Bronckart). Encyclopedie de la Pleïde, p. 1836 - 1871, 1987.

LEMONIDIS, E. C. Conceptio, Réalisation et résultats d'une expérience d'enseignementde l'homothétie. Thèse ULP, Strasbourg, 1990.

PADILLA, V. L'influence d'une acquisition de traitements purement figurauxpour l'apprentissage des mathématiques.l Thèse ULP, Strasbourg, 1992.

PAÏVO, A. Mental representations. A dual coding approach. Oxford: Oxford Universityy Press, 1986.

PIAGET, J. La formation du symbole chez l'enfant. Neuchatel, Delachaux&Niestlé, 1896/1946.
VYGOTSKI L. S. Thought and language. Trad. Hanfmann &Vakar. Cambridge: MIT Press, 1962/1934.