

A Álgebra Linear e a concepção de Transformação Linear construída por Estudantes de EAD

Linear Algebra and Online Distance Education Student's Conception about Linear Transformation

Silvia Dias Alcantara Machado¹

silviaam@pucsp.br

Barbara Lutaif Bianchini²

barbara@pucsp.br

Resumo

Neste trabalho apresentamos os resultados de um estudo de caso, cujo objetivo foi investigar as concepções de transformação linear entre espaços vetoriais reais de estudantes de licenciatura em matemática em EAD. A análise das concepções foi realizada sob a ótica da teoria APOS desenvolvida por Asila et al. (2004). Concluímos que o curso realizado pelos sujeitos lhes possibilitou apenas iniciar o caminho da construção da concepção ação. Tal resultado não almeja desencorajar a inclusão de Álgebra Linear em cursos em EAD, ao contrário, pela importância do assunto na formação do professor, pretendemos lançar um desafio aos responsáveis pela implantação de AL nessa modalidade de curso, que é o de criar estratégias de aprendizagem que incorporadas às vantagens de um curso em EAD tenham condições de desenvolver concepções próprias para os principais objetos de Álgebra Linear.

Palavras-chave: Álgebra linear. Transformação linear. Concepção. Licenciatura em EAD.

Abstract

This paper presents the results of a case study aimed to investigate the conceptions of linear transformation in students' real vectorial spaces from an Online Distance Education course. The analysis of the conceptions was based on APOS theory by Asila et al.(2004). We concluded that the course taken by the subjects enabled them to start the way to build the action conception. This result aims to encourage Linear Algebra in ODE courses, because it is a very important subject to form a teacher. We would like to challenge the people in charge of the implementation of Linear Algebra in this type of course to create learning strategies (with the advantages of an ODE course) that will help people to develop their own conceptions to the main objects of Linear Algebra.

Keywords: Linear algebra. Linear transformation. Conception. Preservice teachers.

¹ Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

² Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

Introdução

Pesquisas em Educação Matemática, especificamente sobre o ensino e a aprendizagem de Álgebra Linear (AL), apontam a grande dificuldade que os estudantes enfrentam em adquirir os conhecimentos básicos do assunto. Uma das noções elementares de AL mais importantes é a noção de transformação linear entre espaços vetoriais sobre um corpo. A concepção dos estudantes sobre essa noção foi explorada por vários pesquisadores dos quais destacamos: Molina e Oktaç (2007); Harel (1999), Karrer (2006), Machado e Bianchini (2009).

Embora a AL provoque dificuldades apontadas pelas pesquisas, ela constitui um assunto essencial para a formação do professor de matemática. Sua aprendizagem fornece uma poderosa ferramenta para a matemática superior, desenvolve a capacidade e habilidade de demonstrações matemáticas, explicita e exemplifica a ligação entre álgebra e geometria, entre outras coisas. É importante lembrar que os conhecimentos dos conceitos básicos de Álgebra Linear dão ao professor subsídios para a compreensão da importância de certos temas abordados na Educação Básica como matrizes, sistemas de equações, etc.

Concordamos com o seguinte comentário de Libaneo (2010, p. 22) sobre a importância da avaliação de cursos do tipo Ensino a Distância – EAD –: *Os educadores precisariam acompanhar de perto e criticamente propostas de formação de professores e de programas tipo “ensino a distância” aventados pelo Ministério de Educação.* Isso se torna premente, dado o crescente aumento de cursos de licenciatura em matemática na modalidade EAD, (quarenta e nove no Brasil³), exigindo um acompanhamento e avaliação dessa modalidade de ensino.

Neste artigo, apresentamos os resultados de uma pesquisa cujo objetivo foi investigar as concepções de transformação linear entre espaços vetoriais reais construídas por estudantes de uma licenciatura em matemática que concluíram um curso de Álgebra Linear em Educação a Distância - EAD.

O curso realizado pelos sujeitos da pesquisa se dá principalmente por interações entre professores, tutores e estudantes via internet e tecnologias associadas. Essas interações dão-se utilizando interfaces como salas de bate-papo, videoconferências e fóruns, o que o caracteriza como curso de EAD, de acordo com Borba, Malheiros e Amaral (2011).

³ Dado obtido no Guia de EAD. São Paulo: Ed. Segmento, ano 10 nº 10, 2012.

Aportes metodológicos e teóricos

A pesquisa é qualitativa com as características de um estudo de caso, pois o foco principal foi em uma investigação sobre a concepção de transformação linear de duas estudantes de um mesmo curso de AL em EAD.

A produção analisada consta tanto do que pudemos obter sobre atividades e avaliações feitas pelas entrevistadas e cedidas às pesquisadoras pelo tutor, quanto também dos protocolos escritos e gravações em áudio obtidas durante as entrevistas.

Inicialmente, analisamos a disciplina de AL, disponível no ambiente virtual do curso de licenciatura e algumas atividades postadas pelas estudantes e arquivadas pelo tutor para a elaboração do roteiro da entrevista semiestruturada⁴.

Selecionamos duas estudantes que terminaram um primeiro curso de AL e se prontificaram a participar da entrevista. Elas serão ficticiamente denominadas aqui de Marta e Lia.

Para analisarmos as concepções sobre transformação linear, buscamos embasamento na teoria APOS⁵ - ação, processo, objeto e esquema - desenvolvida por Asiala et al.(2004), cujas ideias principais resumimos e exemplificamos a seguir.

A teoria APOS, elaborada por integrantes do grupo de pesquisa RUMEC (*Research in Undergraduate Mathematics Education Community*)⁶, fundamentou-se na necessidade de

[...] considerar os processos mentais pelos quais novos conceitos abstratos são adquiridos. [...] Essa necessidade ocorreu pela percepção dos autores, de que o professor ao tentar ensinar uma nova noção está, na verdade, induzindo o desenvolvimento cognitivo de seu aluno. (DUBINSKY e LEWIN, 1986, tradução nossa).

No desenvolvimento dessa teoria, os autores partiram da ideia de *abstração reflexionante* de Piaget, pois, segundo eles, é a forma de *equilibração*⁷ mais poderosa e cognitivamente mais interessante, porque é nela que uma estrutura cognitiva se reequilibra de um distúrbio, sofrendo um maior ou menor grau de reconstrução.

⁴ Roteiro da entrevista em anexo.

⁵ APOS – *Action, process, object, scheme*.

⁶ Pesquisa da Comunidade de Educação Matemática do Ensino Superior (tradução nossa)

⁷ Equilibração: tipo de pensamento ou atividade “auto-retificante” que, ao resolver uma contradição, ajuda a criança a atingir um novo estágio de desenvolvimento cognitivo. (SYLVA e LUNT, 1994, p.342).

Do ponto de vista da teoria APOS⁸, a construção do conhecimento matemático é desenvolvida em etapas denominadas de *ação*, *processo*, *objeto* e *esquema* que não ocorrem obrigatoriamente nessa ordem.

A **ação** é uma mudança⁹ executada pelo indivíduo sobre um objeto matemático. Esse tipo de mudança é percebido como algo exterior ao próprio indivíduo, ou seja, a mudança é uma reação a indicações que fornecem informações precisas sobre os procedimentos a serem realizados. Um exemplo de ação é a do estudante que, para decidir se uma transformação do plano dada no registro gráfico é linear, verifica se a imagem de uma reta é uma reta que passa pela origem.

Um sujeito pode não se limitar a executar uma ação, porém, se ele limita sua compreensão de uma dada noção à realização de ações, dizemos que ele demonstra uma **concepção ação** sobre essa noção.

O **processo** se caracteriza por uma construção interna que permite ao sujeito realizar uma ação não necessariamente conduzida por estímulos externos. O estudante tem o controle da mudança realizada sobre o objeto matemático e consegue descrever o procedimento envolvido na mudança, além de, se preciso, conseguir invertê-lo. Um exemplo de processo é o de um estudante que apresenta o registro algébrico de transformação linear do plano, apresentada no registro gráfico, e a valida. Se um indivíduo, ao resolver um problema, dá indícios de utilizar mudanças do tipo processo, interpretamos que ele mostra ter uma **concepção processo** sobre a noção estudada.

O indivíduo que está consciente do processo como uma totalidade converte um processo (dinâmico) em um **objeto** (estático). Uma transformação linear entre espaços vetoriais constitui um exemplo de objeto da Álgebra Linear. Se um estudante reflete sobre um processo e transforma o processo em objeto, interpretamos que ele demonstra ter uma **concepção objeto** sobre aquela noção.

Conforme se referem Asiala et al. (1996, p. 12), “uma coleção de processos e objetos pode ser organizada de uma maneira estruturada formando um **esquema**. Os próprios esquemas podem ser tratados como objetos e serem incluídos na organização de um esquema de nível superior”. Como os estudantes ao serem entrevistados haviam participado de um curso de AL

⁸ As explicações sobre ação, processo, objeto e esquema estão baseadas em Prado (2010).

⁹ Usamos a palavra mudança para indicar o que na teoria APOS é denominada transformação. O intuito foi de evitar confusão com o termo matemático transformação no sentido de função.

de um semestre, restrito a exemplos do \mathbf{R}^n , para $n = 1, 2$ e 3 , com espaços vetoriais reais, o esquema possibilitado pelos estudos seria limitado às transformações lineares entre os espaços vetoriais já trabalhados.

Sobre a disciplina de Álgebra Linear do Curso de Licenciatura em Matemática na modalidade EAD

A Licenciatura em Matemática na modalidade EAD, cursada pelas estudantes entrevistadas, tem 2800 horas. Na plataforma de EAD as ferramentas virtuais disponibilizadas aos estudantes são as seguintes: *chat* (conversa agendada entre o tutor e os alunos), fórum (questões propostas pelo tutor), *converse com o professor* (cada estudante propõe uma questão ao tutor).

Os encontros presenciais ocorrem nas seguintes ocasiões: no início de cada semestre, quando há uma reunião para explicação e familiarização do estudante com o ambiente virtual e nas provas finais de cada semestre.

A disciplina de Álgebra Linear dessa Licenciatura tem a duração de 150 horas-aula das 2800 horas previstas. A disciplina versa sobre os espaços vetoriais \mathbf{R}^n sobre \mathbf{R} , sendo que \mathbf{R} representa o conjunto dos números reais. Dá-se prioridade aos conceitos básicos de espaços vetoriais reais, dentre os quais: espaço vetorial e subespaço vetorial, base, dimensão, transformação linear e autovetor e autovalor.

Anteriormente à abordagem do conceito de transformação linear, são estudadas as transformações do plano, isto é, as transformações do tipo $\mathbf{T}: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$, lineares e não lineares.

Para fins de pesquisa acadêmica, tivemos acesso às atividades propostas pela disciplina de AL sobre transformação do plano e transformação linear, entregues na plataforma virtual pelas duas estudantes entrevistadas. A análise desse material revela uma predominância de exercícios de verificação da linearidade de diversas transformações, o que indica ênfase na **ação**, fase explicitada na teoria **APOS** em relação à compreensão do conceito.

É possível observar que, algumas vezes, as estudantes registram no próprio exercício suas dúvidas quanto à exatidão da resolução apresentada, o que parece evidenciar uma falta de autonomia das mesmas.

A análise desse material permite perceber a dificuldade das estudantes com a notação algébrica, o que é apontado em pesquisas anteriores do próprio GPEA (Grupo de Pesquisa em

Educação Algébrica da PUC/SP), que explicitam a difícil apropriação pelos estudantes da simbologia e dos vários conceitos introduzidos em um primeiro curso de Álgebra Linear. Exemplificando, uma das entrevistadas desconsidera a condição de linearidade da transformação linear, relativa à multiplicação por escalar, verificando somente a condição relativa à soma de dois vetores do espaço vetorial.

O material disponibilizado pela plataforma propicia que os estudantes façam conversões entre diferentes registros de representação semiótica, fato que segundo Duval (2011), é condição necessária para que um indivíduo compreenda um conceito matemático.

As figuras produzidas pelas estudantes são todas apresentadas por meio de programas gráficos, o que permite inferir que ambas dominam algum programa gráfico.

A elaboração do roteiro da entrevista semiestruturada foi embasada nas análises acima.

Sobre as entrevistas

Para a realização das entrevistas reservamos uma sala que se mostrou um local adequado, pois era agradável e tranquila, sem interrupção de nenhuma ordem. Em cada entrevista estavam presentes na sala as duas pesquisadoras e uma estudante. Após a apresentação inicial nas duas entrevistas, obtivemos a concordância das alunas sobre a gravação em áudio e em vídeo e a assinatura no termo de compromisso. Em tal termo consta a autorização do uso do material coletado durante a entrevista e o compromisso das pesquisadoras na manutenção do sigilo sobre a identidade dos sujeitos e da Instituição.

A primeira entrevista foi realizada com Marta, e uma semana depois realizamos a entrevista com Lia. A seguir apresentamos as ocorrências e falas significativas das entrevistas com nossas análises.

Iniciamos o encontro, com cada um dos sujeitos, explicando o objetivo de nossa pesquisa e o papel das entrevistas nessa investigação. Após o que, entabulamos uma conversa sobre o interesse de cada uma das entrevistadas pelo curso de Licenciatura em Matemática na modalidade em EAD e as experiências decorrentes da participação delas nesse curso. Somente depois dessa conversa inicial, criado um ambiente de camaradagem entre os presentes, passamos a entrega da atividade que possibilitaria compreendermos a concepção sobre transformação linear construída pelas entrevistadas.

Essa atividade consta de resoluções de quatro estudantes diferentes de AL para um mesmo problema, que foi elaborada com o propósito de provocar comentários sobre tais resoluções.

Depois da conversa inicial com **Marta**, lhe entregamos as quatro atividades de uma só vez. Isso significou que Marta teve a oportunidade de observar e comparar, ao mesmo tempo, as quatro resoluções dos alunos para, somente depois, fazer os comentários sobre cada uma delas.

Após 4 minutos de observação, **Marta**, sem tocar na caneta à sua disposição para verificar a correção das resoluções dadas, iniciou o seguinte diálogo:

Marta - *Na verdade, o que eu estou observando... Eu acho que elas (as resoluções) estão corretas, só que cada uma foi pensada de uma maneira diferente (fazendo menção de devolver os protocolos).*

P – *Você indicaria mais alguma coisa sobre a forma que eles fizeram? (Apontando uma das resoluções) Olha aqui... Quando a gente corrige... Você acha que falta alguma coisa? Você sugeriria alguma coisa, ou ela está completa?*

Conforme se constata pelo diálogo acima, foi necessária a intervenção de uma das pesquisadoras para que Marta retomasse o enunciado da questão proposta e pudesse refletir sobre cada uma das quatro resoluções separadamente. Esse fato motivou a mudar a estratégia da segunda entrevista. Então, com Lia, a segunda entrevistada, decidimos entregar uma resolução por vez para sua apreciação, isto ocasionou que, somente após a entrega do quarto protocolo Lia teve a oportunidade de comparar as quatro resoluções.

Logo após a conversa inicial com Lia, uma das pesquisadoras lhe explicou o seguinte:

P: - *Selecionamos quatro tipos de resolução apresentadas por alunos de um curso de Álgebra Linear, e gostaríamos que você, como futura professora, analisasse e comentasse livremente as mesmas. Queremos saber como vocês estão enxergando, avaliando a produção de alunos. Eu vou te entregar um a um quatro tipos de resolução de alunos. É importante que você leia e observe. Aqui tem caneta e pode escrever se quiser.*

Lia, observando a primeira resolução do aluno André, pergunta:

Lia: - *Aqui é para ver as resoluções?*

P: - *Comentar como ele resolveu... Essa foi a resposta dele para essa questão.*

A proposta de observar e comentar as diferentes resoluções de um mesmo problema matemático, pelo exposto acima, causou estranheza em ambos os sujeitos. Isso parece ter rompido o *contrato didático*¹⁰ habitual vivenciado pelas entrevistadas: a transgressão está em refletir e comentar a resolução de outrem.

A seguir apresentamos a questão que provocou as quatro resoluções dos alunos denominados por André, Júlia, Januário e Rosa.

A questão proposta aos alunos é:

Construa uma transformação linear entre dois espaços vetoriais sobre \mathbb{R} .

A partir deste tópico passamos a descrever a resolução de cada um dos quatro alunos, seguida dos comentários das entrevistadas, e finalizamos com a análise da concepção evidenciada.

A primeira resolução apresentada às entrevistadas foi a do aluno denominado André, cujo protocolo retrata o que segue: $T(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$.

Marta, após a insistência de uma das pesquisadoras para que comentasse a resolução de André, disse: - *Eu acho que ele deveria colocar uma resposta diferente. Ele colocou os dois vetores iguais?*

Isso foi o que Marta julgou suficiente observar, pois passou a comentar outra resolução imediatamente.

Marta, após insistência da pesquisadora, parece ter discordado de sua primeira “impressão”, de que todas as resoluções estavam corretas. A razão de sua discordância da resolução apresentada por André pode ter se baseado em: 1. Na interpretação das componentes do vetor

¹⁰ Contrato didático é o conjunto de regras e convenções estabelecidas na relação entre professor e alunos. Essas regras e convenções são quase sempre implícitas, e se tornam explícitas quando são transgredidas. (SILVA, 2010)

(x, x) do \mathbf{R}^2 , como sendo dois vetores; 2. Na interpretação de que a transformação deveria ter a imagem de x , diferente de x .

Qualquer que seja o fundamento de seu comentário, Marta deu indícios de ter uma concepção ação de transformação linear, pois mostrou perceber a covariação necessária entre as variáveis dos dois espaços vetoriais.

Lia, observando a mesma resolução de André, entabulou o seguinte diálogo:

Lia: - *Ele deu um exemplo simples de uma transformação linear, pegou aí... que é (x,x) .*

P: - *x é igual a y ?*

Lia: - *É, x é igual a y . Ele poderia ter explorado mais, não é?*

P: - *Por exemplo...*

Lia: - *Poderia ter feito uma representação gráfica?*

P:- *Bom, vamos supor que você recebeu essa prova. Olhando essa questão, o que você diria para André? Ou você acha que falta alguma coisa? Você já falou que é uma transformação linear. O que a mais você acha que o aluno deveria ter registrado para indicar que é uma transformação linear?*

Lia: *Bom, eu não... Eu acho que seria necessário construir uma transformação linear sobre esses dois espaços vetoriais sobre R . Seria necessário um gráfico?*

Lia, em um primeiro momento, mostra segurança ao afirmar que André apresenta uma transformação linear, embora não tenha sentido necessidade de verificar se o exemplo dado era realmente uma transformação linear. No entanto, acrescenta que ele poderia ter explorado mais, e após a intervenção da pesquisadora, explicita que a “exploração” citada se refere à apresentação do gráfico da transformação linear dada por André, somente no registro algébrico. Lia também não sentiu necessidade de esboçar tal gráfico. Como Lia somente sugeriu *explorar mais* o exemplo, não avaliamos essa fala como uma rejeição à definição de transformação linear e, embora ela não tenha comentado a falta de quantificadores e da explicitação algébrica dos \mathbf{R} -espaços vetoriais correspondentes ao domínio e contradomínio

da transformação linear, julgamos que Lia mostrou uma concepção processo sobre transformação linear.

A segunda resolução comentada pelas entrevistadas foi a da aluna denominada Júlia, cujo protocolo retrata o seguinte: $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F(a, b) = (a, b+1)$.

Embora **Marta**, em um primeiro momento, tenha afirmado que considerava todas as resoluções corretas, ao voltar a observar a resolução de Júlia quanto à imagem de F , comentou: - *Aqui acho que ela não tinha necessidade de colocar o um*. Apesar de ter sido arguida sobre como pensava que deveria ser a imagem do vetor (a, b) , a entrevistada permaneceu longo tempo em silêncio, em seguida, passou a analisar outro protocolo.

O comentário de Marta evidencia seu estranhamento sobre a imagem da transformação apresentada por Júlia, pois tal imagem representa uma translação e, portanto, não constitui uma transformação linear. No entanto, Marta não soube argumentar sobre seu estranhamento, embora tenha sido arguida sobre isso. Isso parece reforçar que Marta apresenta uma concepção ação de transformação linear ainda em constituição.

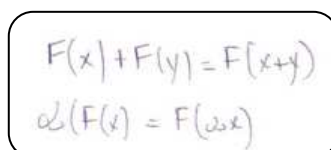
Ao observar a resolução de Júlia, **Lia** inicia o seguinte diálogo:

Lia: - *A resolução da Julia está melhor representada, porque aqui ela indica os espaços vetoriais ($F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$), aqui a relação entre os elementos da transformação linear ($F(a,b) = (a,b+1)$) Para que eu pudesse fazer uma correção mais completa, seria interessante também representar as regras para ser uma transformação linear.*

P: - *Você quer escrever para a gente como você faria?*

Lia: - *Provar se é uma transformação linear, não é? Vou chamar essa transformação de F . (escrevendo no papel).*

Figura 1 – Protocolo de Lia


$$F(x) + F(y) = F(x+y)$$
$$F(ax) = F(ax)$$

Lia: - *Então, eu acho que seria legal, interessante, o aluno também envolver as propriedades de uma transformação linear.*

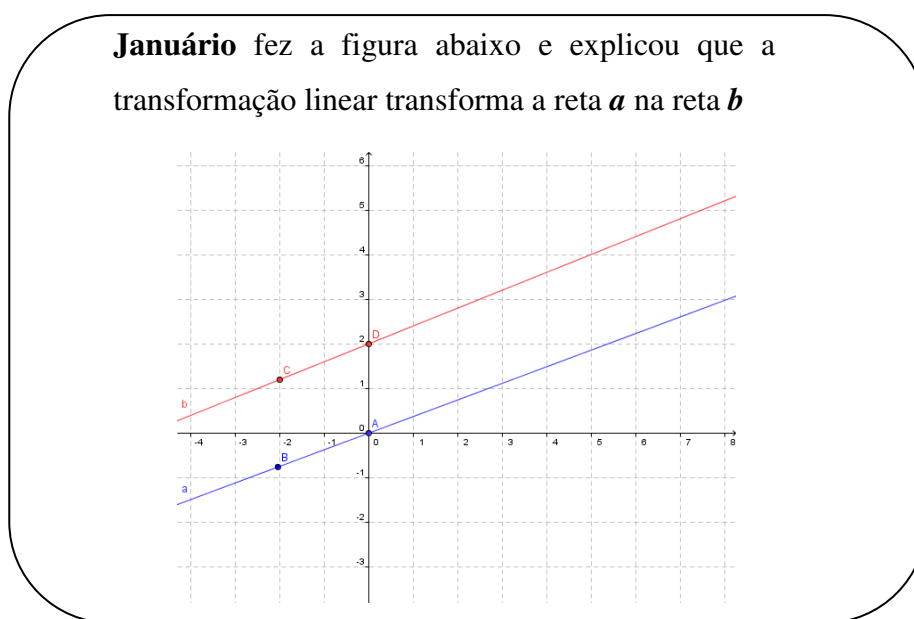
P: - *Você olhando, é uma transformação ou não?*

Lia: - (a, b) em $(a, b+1)$? Sim, é uma transformação linear.

A fala - *melhor representada* - revela que Lia, comparando a apresentação do exemplo dado por Júlia com o anterior, de André, percebe a necessidade de localizar os vetores nos espaços vetoriais relativos ao domínio e ao contradomínio de uma transformação. Por seu comentário - *as regras para ser uma transformação linear* - inferimos que ela conhece a definição de transformação linear, embora tenha apresentado sem os quantificadores as condições de linearidade que chama de regras, (cf. figura 1). Mesmo instada, ela não verifica a linearidade da transformação apresentada por Júlia, dando certeza no final, de que se trata de uma transformação linear. Neste caso, Lia apresenta uma definição de transformação linear à qual aparentemente não dá significado, uma vez que, não a aplica para decidir se $F(a, b) = (a, b+1)$ é uma transformação linear. Assim, em um primeiro momento, Lia revela uma concepção objeto sobre transformação linear a qual é contrariada pelo fato da entrevistada não conseguir verificar sua afirmativa de que se tratava de uma transformação linear. Concluímos que ela possui uma informação: a definição de transformação linear, porém ainda não chegou a organizá-la para poder usá-la. Assim ela demonstrou por seus comentários sobre a resolução de Julia, que parece estar em vias de organizar a informação para a etapa da ação.

A terceira resolução apresentada às entrevistadas foi a do aluno denominado **Januário**, cujo protocolo retrata o que segue:

Figura 2 – resolução de Januário



Marta, ao observar a resolução de Januário, estabelece o seguinte diálogo:

Marta: – *Aqui eu pediria para ele colocar direção e sentido.*

P – *Nas retas?*

A entrevistada aponta as retas **a** e **b** e entrega o protocolo à pesquisadora.

O comentário de Marta: *colocar direção e sentido* (nas retas) indica que ela não dá significado à direção, pois a reta apresentada já se constitui em direção e não possui sentido. Ela falou reta, mas pensou em um vetor ao citar direção e sentido. Tal confusão foi também observada na pesquisa de Molina e Oktaç (2007, p.271), na qual consideram que o estudante confunde a transformação linear com um vetor transformado, fazendo com que o estudante enfoque os vetores envolvidos e não a relação implícita (a transformação linear). Neste caso não foi possível situá-la em algum tipo de concepção definida pela teoria APOS.

Depois de uns minutos de observação sobre a resolução de Januário, **Lia** diz:

Lia: - *É uma transformação linear também.*

P₂: - *Por quê?*

Lia: - *Nós temos (a reta) **a** e ela foi só transportada para (a reta) **b**.
Aqui, para outra posição da reta.*

Lia, neste caso, descreve a transformação do plano, a translação, como sendo uma transformação linear. Como no caso da resolução de Júlia, por ela anteriormente analisada, a entrevistada não sente necessidade de verificar a veracidade. Isso parece indicar que ela assimilou que a propriedade “levar reta em reta” de um operador linear do \mathbb{R}^n , condição somente necessária, é também suficiente. Dessa forma, ela utilizou um “teorema em ação”¹¹ para justificar sua decisão. Neste caso, ela revela uma **concepção ação sobre transformação linear**.

¹¹ Teorema-em-ação é uma proposição tida por verdadeira (por um sujeito) em um determinado domínio. (VERGNAUD, 1995 apud FRANCHI, 2010, p.208).

A quarta resolução da atividade apresentada às entrevistadas foi a de Rosa, conforme segue:

Rosa: explica no início que a transformação será de R^3 em R , exemplificando: $F(x, y, z) = y$

Marta comenta: – *Aqui eu ia perguntar... Porque ela colocou $(F(x,y,z))$ igual a y . E, imediatamente, entrega o protocolo à pesquisadora aparentando cansaço. Mostrando com esse gesto, implicitamente, que considerava a entrevista encerrada.*

É importante destacar que no início da entrevista, ao observar o conjunto dos quatro protocolos, Marta afirmou que todos os exemplos dados pelos alunos eram de transformações lineares. Isso nos leva a pensar que seu estranhamento parece indicar somente uma curiosidade na escolha do y entre as três variáveis x , y e z . Assim, Marta revela neste caso uma **concepção “quase” objeto**, o *quase* é devido à falta de certeza sobre o que provocou sua “curiosidade”. Esta última pode ter sido provocada pela escolha do y entre as três variáveis ou por outra razão qualquer.

Lia, depois de um tempo observando o protocolo de **Rosa**, diz:- *É (uma transformação linear), é de R^3 em R .*

Embora tenha dito isso, permaneceu observando o protocolo, o que provocou o seguinte diálogo:

P - *Você lembra como foi abordado o tópico de transformação linear em Álgebra Linear?*

Lia: *Sim.*

P: *Se você tivesse que explicar para um aluno o que afinal é uma transformação linear, o que você diria?*

Lia: *Ela leva um conjunto de vetores, no caso, um conjunto algébrico... só que é uma função, na verdade... Transformação linear é uma função, só que existem algumas regras.*

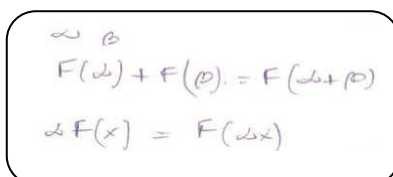
P: - *Você se lembra das “regras”?*

Lia: - *Sim, que a soma das imagens tem que ser igual à função da soma.*

P: - Se você escrever fica mais fácil.

Nesse momento Lia pega a caneta e escreve:

Figura 3: “Regras”, segundo **Lia**



The image shows a rounded rectangular box containing handwritten mathematical formulas. At the top, the Greek letters alpha and beta are written. Below them are two equations: $F(\alpha) + F(\beta) = F(\alpha + \beta)$ and $\alpha F(x) = F(\alpha x)$.

ao mesmo tempo em que se inicia o seguinte diálogo:

Lia: - Um f de alfa mais um f de beta tem que ser a f de alfa mais beta.

E se eu tiver um escalar multiplicando um f de x tem que ser igual ao f deste escalar vezes o x , essas são as propriedades.

P: - Mas onde estariam este alfa e este beta?

Lia: - Estes alfa e beta poderiam ser vetores. A função, a transformação linear que “diria” o que eu faria com alfa e beta.

As observações de Lia sobre a resolução de Rosa permitem concluir o seguinte: 1. Mais uma vez ela mostra conhecer, sem a formalidade matemática, a definição algébrica de uma transformação linear, o que não a impede de julgar desnecessário verificar se a transformação dada por Rosa é linear; 2. Tanto no registro escrito quanto no oral, ela omite a denominação de vetor para alfa e beta na soma de vetores e para x na multiplicação do escalar alfa pela transformação F aplicada ao vetor x ; 3. Lia não sente necessidade de indicar os quantificadores; em seus comentários sobre a resolução de Rosa, Lia reproduz a mesma forma de pensar sobre transformação linear que usou ao observar a resolução de Julia.

Dessa forma, Lia parece ter gravado em sua memória a seguinte definição de transformação linear:

$F: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, é uma transformação linear se

$$F(u+v) = F(u) + F(v) \text{ e}$$

$$aF(u) = F(au)$$

sem os quantificadores, revelando um conceito-em-ação¹², que em seu caso não foi suficiente para impulsioná-la a aplicá-lo na verificação da pertinência do exemplo dado.

Isto nos leva a concluir que Lia dissocia a definição de transformação linear da ação de verificar se um dado exemplo satisfaz a definição. Qual seja, ela não deu mostras de sua capacidade de dedução. Assim, não obtivemos indícios de sua concepção sobre transformação linear.

Considerações Finais

Este trabalho teve o objetivo de apresentar os resultados de um estudo de caso, para investigar, por meio de entrevistas semiestruturadas, as concepções de transformação linear entre espaços vetoriais reais, construídas por duas estudantes de uma licenciatura em matemática em EAD. Tais licenciandas haviam concluído o curso de Álgebra Linear.

Para a análise sobre concepções de transformação linear das estudantes nos embasamos na teoria APOS.

Nossas análises preliminares do material entregue no ambiente virtual pelas licenciandas, ao cursarem AL, indicaram que ambas estão habituadas a utilizar ao menos um programa gráfico virtual, pois todas as figuras requeridas pelas atividades propostas foram apresentadas por meio de programas gráficos.

A atividade proposta às entrevistadas consta da apresentação de resoluções feitas por quatro estudantes de um curso de AL, quando instados a dar exemplo de uma transformação linear entre espaços vetoriais reais.

Pela descrição e análise da entrevista com Marta, concluímos que o fato da entrevistada, espontaneamente ou instada a tal, não ter esboçado qualquer registro escrito durante toda a entrevista, revela sua insegurança sobre o assunto tratado. Além disso, embora dos quatro exemplos de transformação linear, o de Júlia e de Januário não se configurarem como tal, Marta não percebeu ou apontou no que os exemplos falhavam. Por outro lado, a licencianda estranhou as resoluções de Júlia e de Rosa por razões alheias ao conceito de transformação linear. Outro fato que aponta a insegurança de Marta, não apenas quanto à transformação

¹² Um conceito-em-ação é um conceito (objeto ou predicado) implicitamente tido por pertinente (pelo sujeito). (VERGNAUD, 1995 apud FRANCHI, 2010, p.208).

linear, mas quanto a outros conceitos da Álgebra Linear, é a de confundir o gráfico de uma função afim (reta b) e o gráfico de um subespaço vetorial (reta a) com um vetor da geometria analítica.

A análise global das observações e comentários de Marta sobre as quatro resoluções apresentadas nos leva a considerar que, na época da entrevista, Marta apresentava indícios de ter uma **concepção ação em constituição** sobre transformação linear.

A descrição e a análise das considerações de Lia, durante a entrevista, evidenciam que a licencianda considerou os quatro exemplos como transformação linear, sem sentir necessidade de demonstrar sua afirmação por meio de uma representação algébrica.

A entrevistada expressou teoremas e conceitos em ação que não se sustentam, como os seguintes conceitos em ação: *não basta o registro algébrico para definir uma transformação linear*; e o *de que para que um operador do \mathbb{R}^2 seja linear basta que em seu registro gráfico uma reta se transforme em outra reta*, isto é, omite a necessidade de que a reta transformada passe pela origem.

Lia registra no protocolo a definição incompleta de transformação linear, pois omite os quantificadores. Porém, aparentemente, não dá significado a definição registrada, uma vez que, não a usa para justificar suas decisões sobre a veracidade dos exemplos examinados. Portanto, concluímos que, embora essa entrevistada tenha memorizado uma definição de transformação linear, isso não foi suficiente para impulsioná-la a aplicá-la na verificação da pertinência dos exemplos dados. Isto nos leva a concluir que Lia dissocia a definição de transformação linear da ação de verificar se um dado exemplo satisfaz a definição. Qual seja, ela não dá estatuto de objeto matemático a uma definição. Assim, não obtivemos indícios de sua concepção sobre transformação linear.

Pelas considerações acima, chegamos à conclusão que o curso realizado pelas entrevistadas lhes possibilitou apenas iniciar o caminho da construção da concepção ação. Isso pode estar relacionado ao apontado nas análises do material, que revelou predominância em exercícios de verificação da linearidade de diversas transformações, indicando ênfase na fase da **ação**, explicitada na teoria **APOS** em relação à compreensão do conceito.

Outro fato explicitado nas análises do material foi o de que, algumas vezes, as licenciandas registravam, na própria resolução do exercício enviado ao tutor, dúvidas quanto à exatidão da resolução apresentada, o que parece evidenciar uma falta de autonomia das mesmas e

dependência dos professores, sugerindo que encaram a aprendizagem como um processo passivo. Sobre esse assunto Alarcão (2004) afirma:

[...] a capacidade de continuar a aprender autonomamente é fundamental. [...] É preciso saber o que procurar e onde procurar. Uma vez conectado é preciso distinguir entre o que é relevante e irrelevante, sério e fraudulento, para reter o importante e dispensar o que não serve ou não se adapta. (p. 24-25)

Essa falta de autonomia mostrada pelas entrevistadas vai de encontro ao que pesquisadores de educação matemática, como Alarcão, consideram importante na formação inicial de um professor, que é a construção de sua autonomia, isto é, saber onde encontrar e quais das informações encontradas são pertinentes para responder suas questões.

A proposta de observar e comentar as diferentes resoluções de um mesmo problema matemático causou estranheza em ambas entrevistadas. Isso parece ter rompido o *contrato didático* habitual vivenciado pelas entrevistadas: a transgressão está em refletir e comentar a resolução de outrem. A importância desse tipo de atividade já foi invocada em Alarcão (2004)

A formação de base deveria proporcionar ao sujeito a capacidade de se adaptar à situações reais de seu cotidiano, segundo sua vontade e convicção, sem se deixar manipular e expressando sua crítica sempre que necessário. Quem seria capaz de o fazer sem a competência adquirida pelo pensamento e pela informação? (p. 23)

Além dessa competência, a ser adquirida durante a formação, é preciso salientar que situações desse tipo são comuns em provas do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (Enade)¹³. O que dá mais força a esse tipo de atividade, que é a avaliação da produção de alunos.

Essas conclusões nos levam a considerar que é importante uma avaliação contínua sobre as concepções propiciadas aos estudantes de cursos de Álgebra Linear em EAD. Pois, conforme inúmeras pesquisas de educação matemática como as de Dorier (2000), Harel (1999), Sierpinska (2000), Molina e Oktaç (2007) e Bianchini, Machado (no prelo), uma característica dos conceitos de AL é a exigência de um alto nível de abstração para sua compreensão. Isso

¹³ Enade integra o [Sistema Nacional de Avaliação da Educação Superior](http://www.inep.gov.br), com o objetivo de aferir o rendimento dos alunos dos cursos de graduação em relação aos conteúdos programáticos, suas habilidades e competências (www.inep.gov.br).

provoca a dificuldade apresentada por muitos estudantes em entendê-la, expressada pelas formas de automatismo e de interpretações pessoais. Ora, se essas dificuldades foram apontadas principalmente em cursos presenciais, considerando o que diz o especialista em EAD, Litto (2009): *Há, no Brasil, uma carência de bons autores, ou conteudistas, para cursos superiores de EAD* (p. 16), é provável que essas dificuldades sejam ampliadas no caso dos cursos de EAD.

As considerações feitas não almejam desencorajar a inclusão de Álgebra Linear em cursos em EAD, pelo contrário, elas pretendem lançar o desafio aos responsáveis pela implementação de AL nesses cursos, de criar estratégias de aprendizagem que incorporarem as vantagens da EAD, por exemplo, o acesso a vários *softwares* de geometria dinâmica gratuitos, a existência dos chats e fóruns para provocar discussões que envolvam a construção dos conceitos em geral e, especificamente, de transformação linear.

Referências

ALARCÃO, I. **Professores reflexivos em uma escola reflexiva**. -3. ed.- S. Paulo: Cortez, 2004.

ASIALA, M. et al. **A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education**. 2004. Disponível em: <http://www.math.kent.edu/~edd/Framework.pdf>. Acesso em: 7 ago. 2011.

BIANCHINI, B. L.; MACHADO, S. D. A. **Concepção de base de um espaço vetorial real propiciada por um curso de Álgebra Linear em EAD**. No prelo.

BORBA, M. C. ; MALHEIROS, A. P. S.; AMARAL, R. B. (2011) **Educação a Distância online**. 3ª Edição. Belo Horizonte: Autêntica Editora.

DUBINSKY, E.; LEWIN, P. Reflective Abstraction and Mathematics Education: the genetic decomposition of induction and compactness. **Journal of Mathematical Behavior**, Amsterdam: Elsevier, v. 5, n. 1, p. 55-92, 1986.

DORIER, J. L. **On the teaching of Linear Algebra**. Dordrecht: Kluwer, 2000.

DUVAL, R. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A.(org.) **Aprendizagem em Matemática**. Campinas: Papirus, 2010.

FRANCHI, A. Considerações sobre a teoria dos campos conceituais. In: Machado, S. D. A. **Educação Matemática: Uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2010, p. 189-232.

HAREL, G. Three principles of learning and teaching mathematics. In: DORIER, J. L. (ed.). **On the teaching of Linear Algebra**. Dordrecht: Kluwer, 2000.

KARRER, M. **Articulação entre Álgebra Linear e Geometria: um estudo sobre as transformações Lineares na perspectiva dos registros de representação semiótica**. Tese de (Doutorado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2006.

LIBANEO, J. C. **Adeus professor, adeus professora?** novas exigências educacionais e profissão docente. São Paulo: Cortez, 2010.

LITTO, F. M. O atual cenário internacional da EAD. In: LITTO, F. M; FORMIGA, M.(Orgs.) **Educação a Distância** o estado da arte. 1ª Edição. São Paulo: Pearson Education do Brasil, p. 14-20, 2009.

MACHADO, S. D. A. ; BIANCHINI, B. L. Noções Básicas de Álgebra Linear: o que revelam as pesquisas do GPEA? In: Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, 4., 2009, Tabatinga.

MOLINA, J. G.; OKTAÇ, A. Concepciones de la Transformación Linear en contexto Geométrico. **RELIME**, Mexico, v. 10, n. 2, p. 241-273, julio, 2007.

NOMURA, J. I. **Como sobrevivem as diferentes noções de Álgebra Linear nos cursos de Engenharia Elétrica e nas Instituições**. Dissertação de (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2008.

PRADO, E. A. **Alunos que completaram um curso de extensão em Álgebra Linear e suas concepções sobre base de um espaço vetorial**. 185 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2010.

SIERPINSKA, A. On some aspects of students' thinking in linear algebra. In: DORIER, J. L. **On the teaching of Linear Algebra**. Dordrecht: Kluwer.2000.

SILVA, B. A. Contrato Didático. In: MACHADO, S. D. A. **Educação Matemática: uma (nova) introdução**. São Paulo: EDUC, 2010. p. 49-75.

SYLVA, K; LUNT, I. **Iniciação ao desenvolvimento da criança**. São Paulo: Martins Fontes, 1994.

Anexo 1

Roteiro da entrevista

Esse roteiro foi elaborado primeiramente com a intenção de criar uma situação de familiarização entre os pesquisadores e o entrevistado, de maneira que este se sentisse a vontade ao adentrar a segunda parte da entrevista quando trataremos da noção de transformação linear entre espaços vetoriais sobre \mathbb{R} e das noções subjacentes a essa.

Primeiro momento

Agradecemos a disponibilidade do aluno em nos conceder a entrevista e solicitamos que nos autorize por escrito a divulgar os resultados em produção acadêmica científica. Dada a autorização, aproveitamos a ocasião para retomar algumas das informações já dadas quando da marcação da entrevista. Explicamos então, que se trata de uma pesquisa que visa investigar como os alunos que já terminaram um curso de Álgebra Linear concebem algumas de suas noções elementares. Garantimos que o anonimato do curso e de seu nome será preservado e solicitamos a permissão para gravar em áudio e imagem a entrevista.

Perguntamos então o que o motivou a fazer o curso de licenciatura em matemática e porque o curso em EAD.

Segundo momento

Com a finalidade de obtermos a concepção do aluno sobre transformação linear entre espaços vetoriais sobre o conjunto dos números reais, propomos a ele uma atividade. Essa atividade versa sobre a resolução de uma questão de prova de Álgebra Linear por quatro diferentes alunos, na qual se solicita que o entrevistado comente as diferentes resoluções.

Cada uma das quatro resoluções está impressa em uma folha não pautada branca com espaço suficiente para os eventuais registros pelo entrevistado e são entregues uma por vez, isto é, após comentar a primeira, entregamos a segunda e assim por diante.

Anexo 2

A atividade:

A seguir apresentamos algumas resoluções de uma questão proposta a alunos de um primeiro curso de Álgebra Linear.

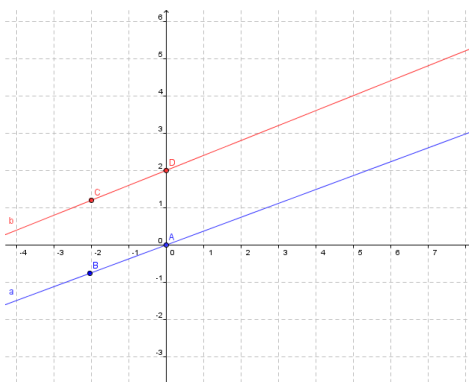
Analise cada uma das quatro respostas isoladamente, como se você fosse o professor. Imagine agora que você está escrevendo suas observações sobre o protocolo para seu aluno em cada um dos casos.

A questão proposta aos alunos é: *Construa uma transformação linear entre dois espaços vetoriais sobre \mathbb{R} .*

André: $T(x) = (x, x)$

Julia: $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, F(a, b) = (a, b+1)$

Januário: Fez a figura abaixo e explicou que a transformação linear transforma a reta a na reta b



Rosa: explica no início que a transformação será de \mathbb{R}^3 em \mathbb{R} exemplificando:

$$F(x, y, z) = y$$