http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2013v8n2p64

Padrões em contextos figurativos: um caminho para a generalização em matemática

Patterns in figurative contexts: a way to the generalization in mathematics

Isabel Vale

isabel.vale@ese.ipvc.pt

Resumo

A matemática é considerada por vários autores como a "ciência dos padrões" (e.g. Devlin, 2002; Steen, 1988). Tendo por base esta ideia, os resultados obtidos, com o nosso trabalho desenvolvido nos últimos anos sobre padrões no ensino e aprendizagem da matemática, vão de encontro a várias conclusões apontadas por vários investigadores de que os padrões são um contexto rico para desenvolver a atividade matemática, nomeadamente permite desenvolver um tipo de raciocínio matemático que os ajuda a resolver problemas e a desenvolver, em particular, o pensamento algébrico. Demos destaque, no trabalho realizado, a tarefas apresentadas em contextos figurativos que se revelam como um bom ponto de partida para a generalização de padrões, como um caminho para o estudo da álgebra. Com base em estudos de natureza qualitativa apresenta-se neste artigo alguns exemplos do trabalho realizado com alunos do ensino básico (6-9 anos) centrado numa proposta didática para o ensino de padrões, que evidencia algumas das potencialidades desta abordagem para o desenvolvimento do pensamento algébrico de uma forma natural e motivadora.

Palavras-chave: Padrões. Contagens. Contextos figurativos. Generalização. Pensamento algébrico.

Abstract

Several authors consider mathematics as the "science of patterns" (e.g. Devlin, 2002; Steen, 1988). Based upon this idea, we have been working on this theme in last years, and our results are consistent with several results from various researchers, that patterns are a rich context for developing mathematical activity, mainly allow the understanding of a kind of mathematical reasoning that helps students solve problems and develop algebraic thinking. We highlight the tasks presented in figurative contexts that revealed themselves as a good starting point for the generalization of patterns, as a path for the study of algebra. Grounded in a qualitative approach in this paper we present the work done with elementary school students (6-9 years) centered on a didactical proposal for the teaching of patterns where we evidence, some of the potential of this approach for the development of algebraic thinking in a natural and motivating way.

Keywords: Patterns. Counting. Figurative dcntexts. Generalization. Algebraic thinking.

Introdução

O recente trabalho no âmbito do projeto Padrões[1] no qual estivemos envolvidos, permitiu evidenciar que o recurso à resolução de tarefas baseadas na exploração de padrões através de múltiplas representações, onde se privilegiam os contextos visuais/figurativos, emerge a generalização, que é uma das componentes mais importantes do conhecimento matemático e a base do pensamento algébrico. Uma aula de matemática desenvolvida através de tarefas desafiadoras que envolvam a exploração de padrões permite construir e ampliar conceitos matemáticos, sobretudo dando significado a esses conceitos, assim como a procedimentos e ideias matemáticas, muitas das vezes aprendidos sem significado e sem relação entre eles, e permite sobretudo resolver problemas dentro e fora da matemática. Permite ainda potenciar capacidades transversais nos estudantes como sejam a comunicação, as representações, as conexões e o raciocínio. Algumas reflexões que temos efetuado apontam para que os padrões podem constituir um desafio e uma oportunidade de mudança para ensinar e aprender matemática.

Os currículos de matemática escolar devem levar os estudantes a procurar e analisar os padrões que podem encontrar no mundo à sua volta, sobretudo descrevê-los matematicamente (National Council of Teachers of Mathematics (*NCTM*), 2000). De acordo com estas ideias muitos investigadores defendem que os padrões podem ser utilizados para desenvolver e aprofundar conceitos basilares em teoria dos números, pré-algebra, álgebra, geometria, probabilidades e funções (Arcavi, 2006). Deste modo o uso de padrões pode ser uma ferramenta a que os professores podem recorrer para proporcionar nos alunos a desejável compreensão de vários tópicos matemáticos. De acordo com Orton (1999) os padrões podem permitir que os estudantes: construam uma imagem mais positiva da Matemática, porque apelam fortemente ao seu sentido estético e criatividade, estabeleçam várias conexões entre os diferentes temas; promovam uma melhor compreensão das suas capacidades matemáticas; desenvolvam a capacidade de classificar e ordenar informação; e compreendam a ligação entre a Matemática e o mundo em que vivem.

[1] Matemática e Padrões no ensino básico: perspetivas e experiências curriculares de alunos e professores PTDC/CED/69287/2006

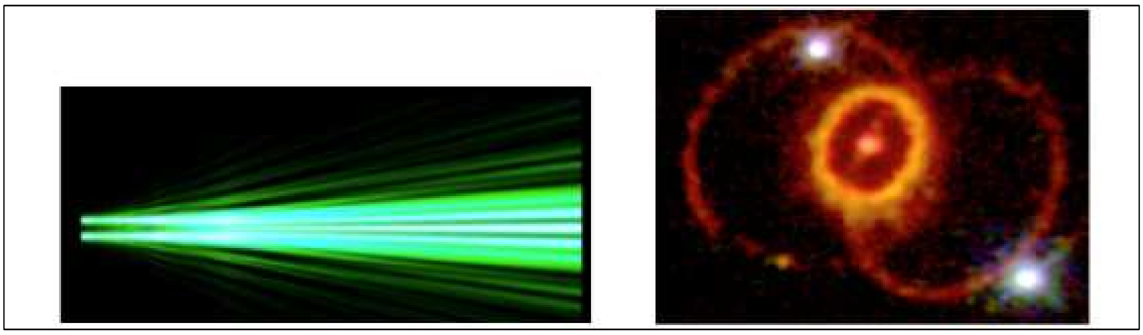
Os padrões á nossa volta

Os padrões apesar de só recentemente terem uma relevância na matemática escolar sobretudo a partir das publicações do NCTM (1989, 2000), já eram objecto de análise e estudo de muitos matemáticos há muito tempo atrás. Um dos livros publicados em Portugal que chamou atenção para esta temática foi Devlin (1994) com a publicação "A matemática a ciência dos padrões". No entanto Devlin no início desta publicação começa por referi que esta ideia não é dele pois já Steen (1988) já fazia referência à matemática como a ciência dos padrões ao referir que, o que os matemáticos fazem melhor é descobrir e revelar padrões escondidos. No entanto também Steen refere que esta ideia foi retirada de Sawyer (1955) que considerava a matemática como a classificação e o estudo de todos os padrões possíveis. Parece então que considerar a matemática como a ciência dos padrões e a sua importância na atividade matemática se perde no tempo, havendo vários autores a defender as virtudes dos padrões no edifício matemático como seja Hardy (1940) que considerava que o matemático, como o pintor ou o poeta, é um mestre dos padrões, ou Davis & Hersh (1981) que no seu famoso livro "A experiência matemática" referem que o próprio objetivo da matemática é, em certa medida, descobrir a regularidade onde parece vingar o caos, extrair a estrutura e a invariância da desordem e da confusão.

Mas não só na matemática os padrões são poderosos, mas em todas as ciências. Em todos os aspectos da vida somos atraídos para as regularidades e muitas vezes tentamos interpretar situações procurando, ou mesmo impondo, padrões.

Um olhar mais atento podemos desvendar a matemática invisível, em particular os padrões, que existe em qualquer um dos aspetos do mundo à nossa volta. Estes padrões vão desde as partículas mais pequenas como seja a existência de simetria na dispersão de um fotão até aos lugares mais longínquos do universo como sejam os anéis simétricos da explosão de uma supernova (Figura 1).

Figura 1 – Dispersão de um fotão e explosão de uma supernova



Mas passando pelo que nos rodeia seja, por exemplo, nas construções que vemos, nos pavimentos que pisamos, num quadro que observamos, na música que ouvimos ou nas prateleiras de um supermercado.

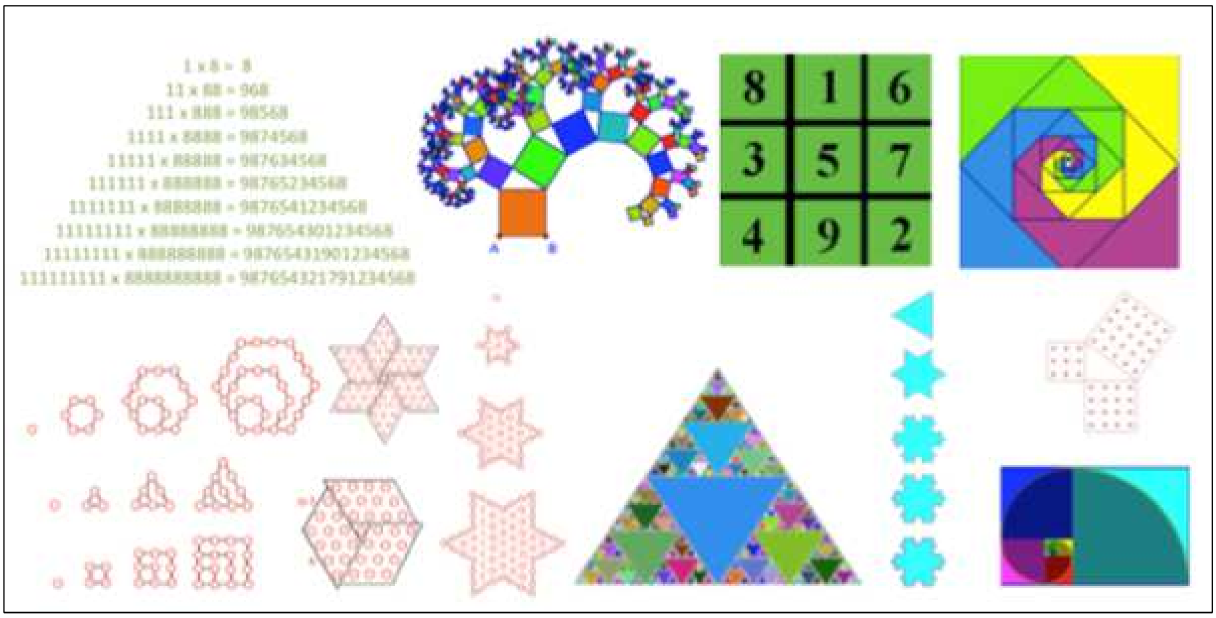
Figura 2 – Padrões no dia a dia

Mas também passando pelo que nos rodeia na natureza que é um mundo rico de padrões muitas delas bastante singulares, espetaculares e inesperadas, mas que um "olho" mais atento consegue descobrir.

Figura 3 – Padrões na natureza

Os exemplos anteriores ilustram vários dos contextos que poderão servir para explorar os padrões matematicamente Mas é nos vários temas e aspetos da matemática que podemos encontrar, descobrir, criar e inventar inúmeros padrões, recorrendo quer à matemática mais elementar quer à mais complexa e com estudantes de todas as idades.

Figura 4 – Padrões em matemática



A matemática dos problemas e dos padrões

Ao longo dos tempos os investigadores têm procurado definir e caracterizar a Matemática. Nessa tentativa, alguns autores consideram, como já referimos, que a matemática é uma ciência que procura compreender cada tipo de padrão - aqueles que ocorrem na natureza, os que são inventados pela mente humana, e mesmos aqueles que são criados por outros padrões. Os padrões são a essência da matemática e a linguagem na qual é expressa, sendo a matemática a ciência que analisa e sintetiza tais padrões. A procura e a observação de padrões conduz à elaboração de conjeturas e muitas das vezes à generalização e consequente prova. Por outro lado, para alguns matemáticos a essência da matemática é a resolução de problemas, pois o que os matemáticos fazem melhor é resolver problemas (Polya, 1973). Mas procurar um padrão é uma estratégia poderosa de resolução de problemas, e a busca da expressão da generalidade constitui também em si uma atividade de resolução de problemas. Ferrini-Mundy, Lappan & Phillips (1996) defendem que o conhecimento matemático pode ser desenvolvido através de problemas que envolvam a descoberta de padrões e que através destes surge a álgebra como um modo de generalizar e representar esse conhecimento.

No contexto educativo, defendemos uma aprendizagem da matemática através de um ensino exploratório, onde a resolução de problemas constitui um desafio para os alunos e requer capacidades de pensamento de ordem superior que envolve comunicação, discussão, conjetura, generalização, argumentação e prova. A resolução de problemas é uma parte integrante de toda a aprendizagem matemática (NCTM, 2000; Ministério da Educação (ME), 2007), e nesta perspetiva as tarefas usadas na sala de aula constituem um aspeto essencial para as aprendizagens dos estudantes.

Padrões e generalização em contextos figurativos

A generalização de padrões é um veículo com potencialidades para fazer a transição do pensamento numérico para o algébrico, porque permite dar significado à generalização sem ter de recorrer, obrigatoriamente, a variáveis e a fórmulas, e por outro lado os padrões visuais/figurativos podem ser uma ferramenta poderosa para chegar a expressões numéricas que os estudantes compreendam e não sejam uma mera manipulação de símbolos sem significado (e.g. Rivera & Becker, 2005). Vários investigadores defendem que uma das possíveis abordagens para ajudar os estudantes a generalizar e a representar relações é através do estudo de padrões figurativos de crescimento (e.g. Orton, Orton & Roper, 1999; Vale, Barbosa, Borralho, Barbosa, Cabrita, Fonseca & Pimentel, 2009). A generalização é considerada pelo NCTM (2000) como uma das principais finalidades do ensino da matemática. A importância da generalização também é referida por Mason (1996) quando considera que a generalização é o bater do coração da matemática e uma das raízes da álgebra. Os padrões são um modo eficaz de encorajar os estudantes a explorar ideias importantes no estudo da álgebra como sejam as conjeturas e a generalização (Usiskin, 1999; Blanton e Kaput, 2005; NCTM, 2000).

A generalização é crucial na atividade matemática. Esta ideia é reforçada por Mason (1996) quando afirma que uma aula que não dê aos alunos oportunidades de generalizar não é uma aula de matemática, pois não está a ocorrer pensamento matemático, em particular o pensamento algébrico. As tarefas com padrões dão oportunidades aos estudantes de desenvolver o pensamento algébrico, processo no qual os estudantes generalizam diferentes ideias matemáticas pela observação de um conjunto de evidências. Essas generalizações são criadas através de representações e argumentações, e vão sendo expressas de uma maneira gradualmente mais formal de acordo com a idade.

Partindo do pensamento numérico, a consideração da álgebra como aritmética generalizada faz com que os padrões surjam como um modo eficaz de encorajar os estudantes a explorar conceitos fundamentais no estudo da álgebra como sejam a conjectura e a generalização (e.g. Usiskin, 1999). As tarefas de padrões, em contextos figurativos, podem envolver dois tipos de generalização: a *generalização próxima,* que se refere à descoberta do termo seguinte, que pode ser obtido por contagem, desenho ou por recurso a uma tabela, e que normalmente envolve relações recursivas, e a *generalização distante,* que implica a descoberta do padrão e exige a compreensão da lei de formação, ou seja, de uma regra geral expressa matematicamente, e requer a procura de relações funcionais. Este tipo de generalização faz uso do reconhecimento global da estrutura do padrão (Barbosa, 2010; Stacey,1989). Uma vez que a generalização envolve pensamentos de ordem superior como sejam raciocínio, abstração, pensamento holístico, visualização e flexibilidade, a capacidade de generalizar vai permitir caracterizar e diferenciar os estudantes uns dos outros. Por exemplo, Stacey (1989) concluiu nos seus estudos que os alunos mais competentes procuram relações funcionais em detrimento das recursivas que são utilizadas pelos alunos menos dotados. Barbosa (2010) no seu estudo com alunos do 6º ano do ensino básico (10-11anos) sem nenhuma experiência com padrões, chega a um resultado similar ao destacar que estes alunos nem sempre conseguiram formular relações de tipo funcional, geralmente com padrões de tipo não linear ou então quando a figura não permitia *ver* diretamente a estrutura do padrão. Assim, a seleção das tarefas é crucial se o professor pretende criar experiências de resolução de problemas que permitam aos alunos fazer generalizações.

O ensino e aprendizagem da matemática deve apelar para a forte intuição visual de ideias e conceitos matemáticos que as crianças e os jovens adultos possuem, incluindo problemas que incitem os estudantes a pensar visualmente, desenvolvendo esta capacidade através de experiências que requerem esse tipo de pensamento. Os gestaltistas acreditam que se o aluno compreende a estrutura subjacente aos padrões figurativos terá mais capacidade de obter a solução do problema. A visualização tem um papel importante no raciocínio do aluno, e as tarefas com padrões figurativos desenvolvem a percepção visual (e.g. Rivera & Becker, 2005). Como Mason (1996) afirma, muito antes do uso do simbolismo algébrico devemos olhar para os aspetos prévios da generalização. "Ver" um padrão é necessariamente o primeiro passo na exploração do padrão. Assim, na resolução de determinada tarefa devemos prestar atenção às características figurativas que podem estar relacionadas com a generalização, isto é, em que o "ver" é uma componente importante da generalização. Assim, os professores devem propor aos seus alunos tarefas desafiantes que lhes permitam fazer generalizações baseados nas propriedades das figuras assim como nas propriedades numéricas. Pretende-se fazer emergir, por um lado, a importância da visualização como componente essencial para a compreensão não só de propriedades geométricas mas também numéricas, e por outro a necessária flexibilidade na compreensão de factos e relações numéricas e/ou geométricas.

A investigação tem mostrado que os contextos figurativos são mais intuitivos para a maior parte dos alunos e, em particular, para os dos níveis mais elementares e/ou com fragilidades no conhecimento matemático. Rivera e Becker (2008), nas tarefas com padrões figurativos, salientam a importância da percepção visual, que consideram o ato que permite ver, e identificam a *percepção sensorial* (ou concreta) que acontece quando o individuo vê um objeto como sendo apenas um mero objeto e a *percepção cognitiva* que vai mais além da mera percepção sensorial, quando os indivíduos veem ou reconhecem um fato ou propriedade relacionado com o objeto. No nosso trabalho tivemos presente esta classificação, considerando-a sequencial, ou seja, para se atingir a desejada percepção cognitiva teremos que desenvolver nos estudantes primeiramente a percepção sensorial. Assim, o professor deve começar por desenvolver nos alunos as suas capacidades visuais, propondo tarefas de padrões em contextos figurativos, de modo a evidenciar as propriedades das figuras e das suas relações geométricas e numéricas.

O que propomos é proporcionar o desenvolvimento do pensamento matemático através de uma abordagem com recurso à exploração de tarefas desafiantes com padrões, em contextos figurativos, e explorar diferentes modos de generalização que estejam relacionados com diferentes formas de ver esses padrões e que possam ter significado para os alunos. Mais do que desenvolver nos alunos capacidades que lhes permitam escrever uma fórmula é importante que consigam compreender a origem e o significado dessa fórmula ou regra e raciocinar de modo a convencerem-se a eles próprios e aos outros, da validade dessa regra ou fórmula que obtiveram através da generalização, recorrendo a raciocínios sobre os números e/ou figuras.

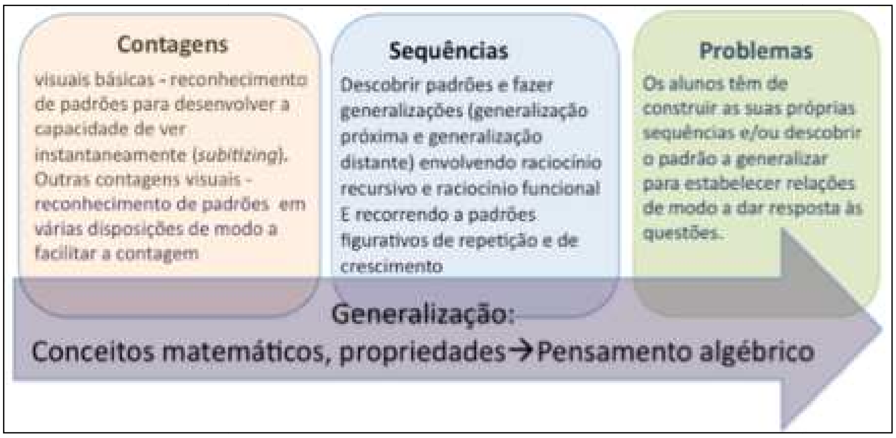
A experiência didática

Apresenta-se uma sequência didática de natureza exploratória, onde o nosso principal enfoque é que a generalização surja, numa primeira fase, da análise dos aspectos visuais da tarefa de modo a permitir efetuar generalizações próximas e distantes. Neste sentido, começa-se por tarefas de contagens em contextos visuais como requisito para o trabalho posterior com sequências que privilegiam a intuição visual acerca dos números e formas e das suas relações. Em todas as tarefas deve-se privilegiar a comunicação como forma de explicitar o modo de pensar e justificar os raciocínios recorrendo a diferentes representações (e.g. materiais concretos, tabelas, diagramas, desenhos, símbolos, expressões). Esta proposta pode ser utilizada em qualquer nível de ensino em que cada uma das diferentes categorias de tarefas ao longo da sequencia podem ser adaptadas aos conhecimentos dos alunos com os quais se está a trabalhar.

Para este trabalho é necessário propor aos estudantes experiências prévias assentes num conjunto de tarefas que lhes desenvolvam a capacidade de contagem “rápida”, de modo a adquirirem a necessária flexibilidade de pensamento para identificar e escolher a melhor maneira de “ver”, de acordo com os propósitos pretendidos. Deste modo, a nossa proposta didática começa por tarefas de *Contagens.* Começar inicialmente pelo reconhecimento de padrões padronizados que desenvolvam a capacidade de ver instantaneamente (*subitizing*). Este conhecimento pode começar quando as crianças jogam com um dado ou com o dominó. A moldura do 10 é um excelente material estruturado de suporte para trabalhar relações numéricas que utilizam como números de referência o 5 e o 10, permitindo um reconhecimento visual dos números. O desenvolvimento desta capacidade irá permitir que os alunos avancem para tarefas de contagem em contextos figurativos diversificados, permitindo uma flexibilidade de pensamento ao nível de estratégias de contagem que conduza a expressões numéricas diversificadas, mas equivalentes. Isto é, os alunos devem ter experiências em diferentes contextos, de modo a serem estimulados a procurar diferentes modos de ver, optando pelo modo de contagem mais eficaz, a escrever expressões numéricas correspondentes e a descobrir que estas são equivalentes. Estas tarefas são o ponto de partida para o desenvolvimento do pensamento algébrico. O passo seguinte será o estudo de *Sequências* que são tarefas que envolvem quer padrões de repetição quer de crescimento e têm o objetivo de reconhecer, descobrir, continuar, completar e generalizar esses padrões. Por fim, apresenta-se um conjunto de *Problemas* onde não está presente nenhuma sequência explícita, mas que terá de ser construída pelos alunos como meio de chegar à solução do problema. Esta sequência pode envolver mais do que uma estrutura de repetição ou de crescimento mas deve conduzir a invariantes que permitam o estabelecimento de propriedades numéricas ou geométricas (Vale et al., 2009).

Todo o tipo destas tarefas permite introduzir e/ou aplicar conceitos matemáticos, dando oportunidade de relacionar as propriedades desses diferentes entes matemáticos que conduz à generalização. A figura junto resume as ideias expressas anteriormente.

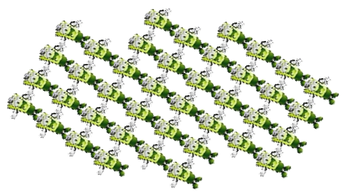
Figura 5 – A proposta didática



A experiência didática realizada tem por base o estudo de padrões, onde os contextos figurativos têm um papel relevante, sendo dirigida não só aos estudantes para aprender matemática mas também aos professores para ensinar matemática. Apresentam-se neste texto parte de um trabalho, mais amplo desenvolvido com alunos do ensino básico, durante a experiência didática sobre padrões, e que seguiu uma abordagem qualitativa em que a recolha de dados foi efetuada através de observações, entrevistas e análise da resolução das tarefas. Aqui apenas se analisam dois exemplos de tarefas de padrões em contextos visuais, *Contagens* e *Sequências,* realizados com alunos do 1º ciclo. Ambos destacam o desenvolvimento do sentido do número e do pensamento algébrico com um objetivo comum que é desenvolver um novo olhar, utilizar diferentes abordagens e resoluções, através de ideias criativas, uma vez que estas tarefas suscitam múltiplas resoluções. De acordo com a idade dos alunos e objetivos pretendidos, o professor pode incentivar a utilização de materiais manipuláveis para permitir um maior envolvimento e compreensão da tarefa. Começa-se por discutir brevemente as expectativas em relação a cada uma das possíveis formas de exploração das tarefas e de seguida as respostas dos alunos.

Alguns exemplos de tarefas

Exemplo 1 – As pilhas

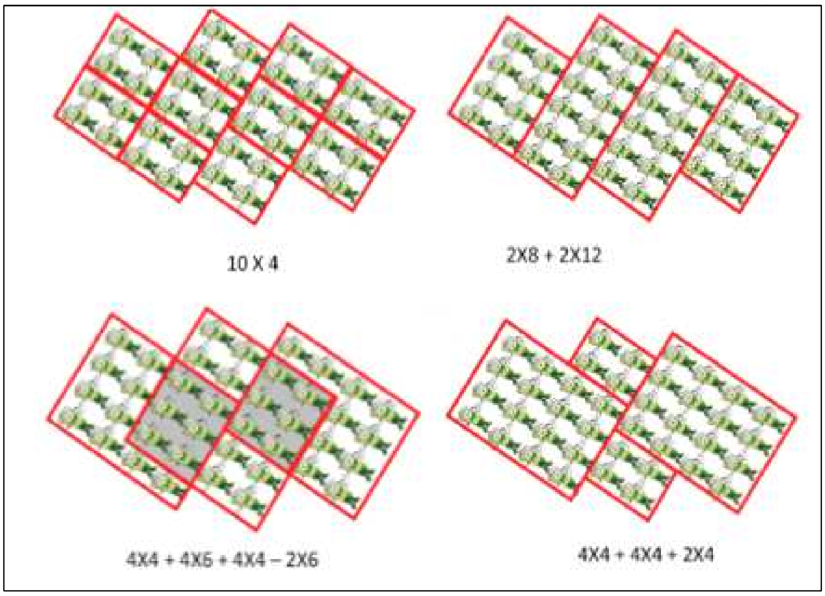


A turma da Susana colocou as pilhas no pilhão para serem recicladas.
Descobre um modo rápido de as contares.
Escreve a expressão numérica que traduz essa contagem.

Este exemplo refere-se a contagens visuais em contextos diversificados, a tarefa das pilhas. Esta tarefa foi uma adaptação de outra idêntica quando o tema que se estava a trabalhar na altura na turma do 4º ano de escolaridade (9 anos) a reciclagem. O objetivo é que os alunos descubram quantas pilhas tem a figura sem as contar uma a uma. O professor deve estimular a descoberta do maior número possível de hipóteses de as contar e a escrita de cada uma das expressões que traduz esse modo de ver. Esta tarefa envolve reconhecimento de padrões e pressupõe que os estudantes já tenham desenvolvido o *ver instantaneamente* como uma capacidade fundamental para a compreensão do número, apoiados na conservação, na compensação, nas contagens e na composição e decomposição de números.

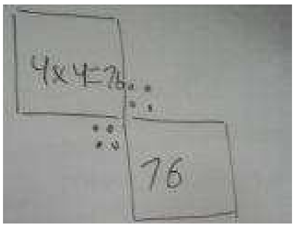
Apresentam-se algumas resoluções (Figura 6) que traduzem modos possíveis de ver e a respectiva expressão numérica. O professor deverá levar os alunos a concluir que as expressões numéricas obtidas são equivalentes. Pode explorar as propriedades das operações, prioridades dessas operações, e, se for o caso, o uso de parênteses. Por exemplo, deve chamar-se a atenção dos alunos de que a expressão 10x4 traduz o seguinte modo de ver o número total de pilhas: “Dez grupos com quatro pilhas cada” enquanto que a expressão 2x8+2x12 traduz "Dois grupos com oito pilhas mais dois grupos com doze pilhas”. O professor deve salientar que as diferentes expressões encontradas, 10x4 = 2x8+2x12 = 8x7-4x4 = ... , são equivalentes pois representam o mesmo número de pilhas (40). A representação escrita das expressões na horizontal salienta a equivalência das expressões numéricas e permite dar um novo significado ao sinal de igual, ou seja identificam-no com uma relação de equivalência e não apenas para indicar o resultado de uma operação. As nossas expectativas para esta tarefa consistiam também em que os alunos descobrissem formas originais de ver o número total de pilhas. As menos utilizadas foram as duas últimas.

Figura 6 – Resoluções dos alunos



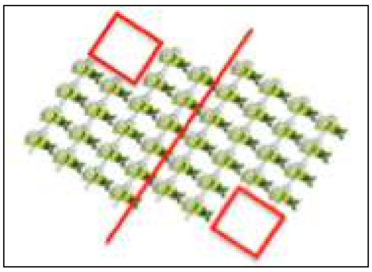
Na síntese da aula, após terem apresentado os processos descobertos, os alunos consideraram que o seguinte (Figura 7) modo de contar era o mais eficaz, registrando-o como tal.

Figura 7 – Resolução síntese



O professor também deve colocar questões ao contrário: "Como é que eu "vi" para contar se obtive a expressão 4x6-4 + 4x6-4?". A imagem junto (Figura 7) traduz esse modo de ver/contar.

Figura 8 – Resolução



Este tipo de tarefas foram desenvolvidas pelos alunos como pré-requisito para o trabalho subsequente de descoberta de padrões em sequências figurativas, e nas quais não revelaram dificuldades.

Exemplo 2 – Estrelas em T

Considera a sequência de estrelas em T

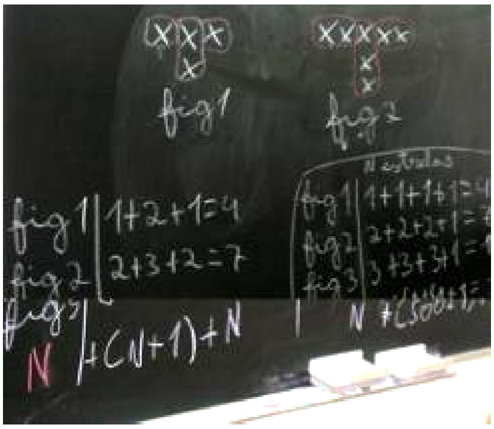
Fig.1 Fig. 2 Fig.3

1. Quantas estrelas tem o 4º T? E o 5º T?
2. Quantas estrelas terá o 100º T? Explica como pensaste.
3. Determina o número de estrelas necessárias para construir uma figura de qualquer ordem.

Neste exemplo o objetivo é realçar a relação entre padrões figurativos e os respectivos padrões numéricos e descobrir os padrões presentes na sequência e para cada caso fazer generalizações. A regra deve ser *Ver – Descrever - Registar*.

Uma sequência apresenta um padrão de crescimento quando cada termo muda de forma previsível em relação ao anterior. Este tipo de padrões proporciona explorações matematicamente ricas e variadas e é um contexto privilegiado para o desenvolvimento do pensamento algébrico, em particular na transição da aritmética para a álgebra. A tradução algébrica da generalização de um padrão pode ser facilitada e mais bem entendida pelos alunos se for efetuada através de tarefas em contextos figurativos (sempre que possível e necessário com recurso a materiais concretos). Estes contextos são um suporte a que os alunos podem recorrer e que lhes permite "ver" e entender a relação que existe entre a ordem das figuras e o número que lhe corresponde. A escola não tem privilegiado esta abordagem de natureza mais intuitiva e visual mas o PMEB (ME, 2007) salienta este aspeto ao longo de todos os anos e em particular nos anos iniciais. O objetivo é que os alunos cheguem à generalização, seja traduzida em linguagem mais formal ou menos formal (Vale, Pimentel, Alvarenga & Fão, 2011 2011). Este exemplo (Figura 9) foi trabalhado com uma turma do 4º ano de escolaridade. Envolve um padrão linear acessível para este nível etário, e permite recorrer ao pensamento recursivo e ao pensamento funcional o que normalmente conduz, respectivamente à generalização próxima e à generalização distante, recorrendo a estratégias visuais, numéricas ou mistas. Na exploração desta tarefa teve-se em atenção também as diferentes representações suscitadas e utilizadas pelos alunos: concreta, pictórica, verbal, numérica e eventualmente simbólica. Nesta tarefa os diferentes alunos optaram por uma abordagem figurativa, e só depois de identificar o padrão visualmente passaram para a sua tradução numérica. As figuras junto mostram o modo como os alunos realizaram a tarefa, em que começam por desenhar alguns termos da sequência, onde está assinalado o modo de ver o padrão, e posteriormente recorrem a uma tabela para organizar os dados obtidos e traduzem numericamente esse modo de "ver".

Figura 9 – Resoluções dos alunos



Apesar de não se incentivar neste nível a representação simbólica formal, ela surge muitas das vezes naturalmente, dependendo do trabalho e da condução que o professor fizer durante a aula. Esta generalização distante, traduzida na expressão n+(n+1)+n, foi baseada na utilização de um raciocínio funcional. Repare-se que o aluno utilizou uma tabela onde identificou o número da figura e o número de estrelas de cada uma, e onde cada uma das expressões escritas traduz o modo de visualizar a formação das estrelas em cada um dos T.

Figura 10 – Resoluções dos alunos

Algumas considerações finais

Quando os estudantes entram na escola possuem potenciais enormes, ao nível das capacidades de visualização, imaginação, conjetura, generalização e expressão. Nesse sentido, o professor deve estar atento e recorrer a diferentes caminhos que permitam explorar esse potencial em cada um dos seus alunos e com cada uma das tarefas que utiliza O tema dos padrões pode contribuir para atingir esse objetivo, já que é naturalmente motivador e desafiante, e por outro lado envolve e mobiliza muitos conceitos e ideias de várias áreas da matemática, suscitando conexões entre eles, podendo assim ser entendido como um tema transversal do currículo. A proposta didática apresentada tem sido desenvolvida quer no âmbito da formação inicial quer contínua, permitindo esta última um trabalho direto com os alunos do ensino básico (6-11 anos). Da experiência realizada durante estes anos, e dos diversos estudos efetuados pela equipa, temos tido a perceção de que o reconhecimento de padrões existentes nos números, nas formas e no mundo à nossa volta é o início de uma exploração que ajuda os alunos a continuar, completar e generalizar padrões e sobretudo a resolver problemas. O desenvolvimento destas capacidades conduz a uma melhor compreensão da matemática, à aquisição e reforço de diferentes conceitos matemáticos, mobilizando-os através das diferentes capacidades transversais, e faz com que os alunos fiquem mais bem preparados, em particular para o trabalho com funções e álgebra, do que aqueles que não tiveram esta oportunidade (e.g. Barbosa, 2010; Vale, 2009; Vale et al., 2011). Estes exemplos indicam como a expressão da generalização pode ser explorada a diferentes níveis utilizando diferentes representações trabalhando em simultâneo a aritmética e a álgebra. O contexto figurativo proporcionou aos estudantes oportunidades para se centrarem na estrutura do padrão. As estratégias de resolução utilizadas foram uma combinação de abordagens numérica com figurativa, onde o raciocínio recursivo e o funcional foram utilizados de forma adequada às situações. Contudo gostaria de referir que este trabalho exige um tipo de aula favorável e um professor motivado e bem preparado a nível do conhecimento matemático e da sua didática, onde se destacam: a natureza das tarefas e da sequência utilizada; a discussão sobre as tarefas; e a orientação dos professores através do questionamento que foram utilizando, quer na organização do trabalho na sala de aula quer no incentivo aos alunos para expressarem os seus raciocínios de modo cada vez mais formal e na orquestração das discussões que se efetuaram.

Referências

ARCAVI, Abraham. El desarrolo y el uso del sentido de los números. In: VALE, I.; PIMENTEL, T.; BARBOSA, A.; FONSECA, L.; SANTOS, L.; CANAVARRO, L. (Orgs.), *Números e Álgebra*. Lisboa: SPCE, p. 29-48, 2006.

BARBOSA, Ana. *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contexto visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2º ciclo do ensino básico*. Tese de doutoramento. Braga: Universidade do Minho, 2010.

BLANTON, Maria; KAPUT, James. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, n. 36(5), p. 412-446, 2005.

DAVIS, Phillip; HERSH, Reuben. *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva, 1995.

DEVLIN, Keith. *Matemática a ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora, 2002.

MASON, John. Expressing Generality and Roots of Algebra. In: BEDNARZ, N; KIERAN, C; LEE, L. (Eds.). *Approaches to Algebra, Perspectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1996. p. 65-86.

NCTM. Principles and Standards for School Mathematics. Reston, VA: *NCTM, 2000.*
ME. *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME, 2007.

ORTON, Anthony (Ed). *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. London: Cassell, 1999.

ORTON, Jean. Children's Perceptio of Pattern in Relation to Shape. In: ORTON, A. (Ed.). *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*. Londres: Cassel, p. 149-167, 1999.

ORTON, Anthony; ORTON, Jean; ROPER, Tom. Pictorial and Practical contexts and the perception of pattern. In: ORTON, A. (Ed.). *Pattern in the teaching and learning of mathematics.* London: Cassel, 1999. p. 120-136.

POLYA, George. (1973). *Como resolver problemas.* Lisboa: Gradiva, 1997.

RIVERA, Ferdinand; BECKER, Jerry. Figural and numerical modes of generalization in Álgebra. *Mathematics Teaching in the middle school*, p. 198-203, 2005.

STACEY, Kay. Finding and Using Patterns in Linear Generalizing Problems. *Educational Studies in Mathematics*, n. 20(2), p. 147-164, 1989.

STEEN, Lynn. The science of patterns, *Science*, n. 240, p. 611-616, 1988.

USISKIN, Zalman. Doing Algebra in Grades K-4. In: MOSES, B. (Ed.). *Algebraic thinking, grades K-12*. Reston: NCTM, 1999.

VALE, Isabel. Resolução de Tarefas com Padrões em Contextos Figurativos: exemplos de sala de aula. In *Atas do II SERP* – Seminário em Resolução de Problemas. S.Paulo, Brasil: Universidade Estadual Paulista, Campus de Rio Claro. (CD) ISSN 2237-3411, 2011.

VALE, Isabel. Das tarefas com padrões visuais à generalização. In: FERNANDES, J; MARTINHO, H.; VISEU, F. (Orgs.). *Actas do Seminário de Investigação em Educação Matemática*. Viana do Castelo: APM, p. 35-63. 2009.

VALE, Isabel. BARBOSA; Ana; BORRALHO, António; BARBOSA, Elsa; CABRITA, Isabel; FONSECA, Lina; PIMENTEL, Teresa. *Padrões no ensino e aprendizagem da matemática – Propostas curriculares para o ensino básico.* Viana do Castelo: Escola Superior de Educação. 2009.

VALE, Isabel; PIMENTEL, Teresa; ALVARENGA, Dina; FÃO, António. *Uma proposta didáctica envolvendo padrões* (material de apoio ao PMEB). ME: DGIDC. 2011. Disponível em <http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/numeros01tarefas.htm>. Acesso em set 2012.