

## O conceito de função: o desenvolvimento baseado em alguns modelos desde o ano de 2000 a. C até o século XX

### The concept of function: development based on models from the year 2000 a.C. until the century XX

karly alvarenga

[karlyba@yahoo.com.br](mailto:karlyba@yahoo.com.br)

Celso Viana Barbosa

[cjvianna@yahoo.com.br](mailto:cjvianna@yahoo.com.br)

Gislaine Maria Ferreira

[giszaleibniz@yahoo.com.br](mailto:giszaleibniz@yahoo.com.br)

#### Resumo

Muitos estudantes queixam-se em relação à não aplicabilidade do que veem em Matemática, pois, na maioria das vezes, consideram-na desvinculada do mundo real. No caso, o conceito de função é apresentado com sendo apenas: *uma função de um conjunto  $D$  para um conjunto  $R$  é uma regra que associa um único elemento em  $R$  a cada elemento de  $D$* . Ao analisar algumas fases da construção das ideias de função ao longo da história, percebe-se que muitas delas estiveram acompanhadas de modelos de forma explícita ou implícita, ou seja, as ideias desenvolviam-se mediante problemas da realidade que necessitavam de uma análise matemática em busca de respostas. Por isso, esta investigação aconteceu por meio de uma pesquisa bibliográfica e documental, envolvendo livros, artigos, dissertações e teses, perfazendo o total de 43 trabalhos. Foram revisadas obras que tratam do desenvolvimento do conceito de função e apresentadas uma linha do tempo de seu desenvolvimento. É possível que a função seja a ferramenta matemática mais usada para modelar fenômenos naturais e reais e, porque não, abstratos também. Então, tal conceito deve ser tratado de forma contextualizada, dando-lhe o significado original: modelar fenômenos.

**Palavras Chave:** função, modelos, desenvolvimento histórico.

#### Abstract

Many students complain about the non-applicability of what they learn in Mathematics, for the most part, consider it disconnected from the real world. In this case, the function concept is only being presented with: *a function of a set  $D$  for the set  $R$  is a rule that associates a single element  $R$  to each element of  $D$* . Analyzing some phases of construction of function ideas throughout history, it is clear that many of them were accompanied by models explicitly or implicitly, that is, the ideas developed by means of real problems required a mathematical analysis search for answers. Therefore, this research took place through a literature and documents involving books, articles, theses and dissertations, totaling 43 works. Was reviewed works that deal with the development of the function concept and presented a timeline of its development. It is possible the function is a mathematical tool used to model phenomena more natural and real, and why not, also abstract. So this concept should be treat in context, giving it the original meaning: modeling phenomena.

**Keywords:** function, modeling, historical development.

## Introdução

Ao analisar algumas fases da construção das ideias de função ao longo da história, percebemos que muitas delas estiveram acompanhadas de modelos de forma explícita ou implícita, ou seja, as ideias desenvolviam-se mediante problemas da realidade que necessitavam de uma análise matemática em busca de respostas. Na literatura, alguns desses modelos atrelam certo tipo de relação entre variáveis. Entrementes, este trabalho não discute a utilização da modelagem e da história da matemática no ensino de matemática, mas apresenta essas abordagens com o intuito de significar o conceito de *função* e explorar suas conjunturas de desenvolvimento. (ALVARENGA; VIANNA, 2007)

Barbosa (2004) indica que:

O ambiente de modelagem está associado à problematização e à investigação. O primeiro refere-se ao ato de criar perguntas e/ou problemas enquanto o segundo, à busca, à seleção, à organização e à manipulação de informações e reflexão sobre elas. Ambas as atividades não são separadas, mas articuladas no processo de envolvimento dos alunos para abordar a atividade proposta. Nela, podem-se levantar questões e realizar investigações que atingem o âmbito do conhecimento reflexivo. (BARBOSA, 2004, p.3)

Destacamos que a resolução pura e simples de um problema não significa utilizar a modelagem no ensino. O mesmo autor ressalta que:

Apesar de as situações terem origem em outros campos que não a matemática (BLUM; NISS, 1991), os alunos são convidados a usar ideias, conceitos, algoritmos da matemática para abordá-las. Além de aplicar conhecimentos já adquiridos, como tradicionalmente tem sido assinalado, há a possibilidade de os alunos adquirirem novos durante o próprio trabalho de Modelagem. (TARP *apud* BARBOSA, 2004, p.3)

Observamos a influência da abordagem interdisciplinar na modelagem matemática, pois os problemas reais podem envolver outras áreas do conhecimento que devem ser mobilizados quando nos embrenhamos na atividade de matematizar uma situação, um fenômeno. Isso aconteceu na história do conceito de *função* como exemplificamos neste trabalho. Nos contextos aqui estudados, encontramos problemas modelados mediante o uso de relação, de interdependência entre variáveis, enfim, segundo ideias que levaram à construção do conceito de *função*.

Para Levy e Espírito Santo (2006), a história do conhecimento matemático é generosa em construções de modelos voltados para a prática, para o concreto, em consonância com as correntes filosóficas e epistemológicas favorecedoras da importância do empirismo. Os

autores citam o exemplo de Eratóstenes, que “é lembrado especialmente por sua medida da terra – não a primeira nem a última de tais avaliações na Antiguidade, mas em tudo a de mais sucesso” (BOYER *apud* LEVY; ESPÍRITO SANTO, 2006, p.17).

A utilização de modelos para apresentar o conceito de *função* é uma característica que conduz à aplicação dos resultados deste trabalho no ensino, pois serve de contextualização e dá sentido ao conceito. Muitos estudantes queixam-se em relação à não aplicabilidade do que veem em Matemática, pois, na maioria das vezes, consideram-na desvinculada do mundo real. Caraça (2000), falando sobre as funções, comenta ser natural esperar de coisa tão importante para o entendimento e a explicação da realidade a necessidade de um conceito matemático próprio para o seu estudo. Por estas constatações e pelas leituras em livros de história da matemática, como Boyer (1996) e Eves (1997), interessa-nos investigar alguns modelos que influenciaram o processo de desenvolvimento das funções e que descreveram situações do cotidiano e da ciência, além de comprovar, por fatos históricos, que o conceito de *função* tenha surgido da necessidade como afirma Caraça (2000). Dessa forma, fizemos um levantamento e uma análise das ideias de alguns modelos que contribuíram para o processo de evolução desse conceito, a fim de mostrar que o seu desenvolvimento se deu pela demanda de respostas aos problemas do cotidiano e da ciência.

Este trabalho surge tanto da importância e das dificuldades de aprendizagem de função como da necessidade de sua contextualização. Em recente análise dos erros cometidos por estudantes que se submetem a um processo de seleção para entrar na universidade, na área de ciências exatas, observamos que tal conceito está presente em todos os processos seletivos analisados e em várias questões tanto algébricas quanto geométricas. Além disso, os resultados dessa investigação mostram que os erros mais frequentes se relacionavam às interpretações da situação-problema, à elaboração do modelo que representava a situação que, muitas vezes, era expresso por uma função e à não análise do resultado obtido (ALVARENGA; VIANA, 2008).

A fim de seguir uma linha do tempo contínua, dividimos a apresentação dos resultados em quatro etapas históricas: *Gênese do conceito de função nas relações entre variáveis*; *A noção de função no estudo de dependência entre variáveis físicas*; *Época da formalização do conceito de função*; *A modernidade*.

## A pesquisa

Esta investigação aconteceu por meio de uma pesquisa bibliográfica e documental, envolvendo livros, artigos, dissertações e teses, perfazendo o total de 43 trabalhos. Revisamos obras que tratam do desenvolvimento do conceito de *função*. Tais documentos abrangem o desenvolvimento somente entre o século XIII e o século XIX. Além disso, analisamos obras que expunham, historicamente, vários conceitos matemáticos e destacamos os que versam sobre relações entre variáveis, fechando a análise dos modelos entre os anos de 2000 a. C. e o século XX. Cabe destacar que os resultados de pesquisas analisadas versavam sobre o tema, sob o ponto de vista histórico e não enfatizavam os modelos que impulsionaram o conceito de *função*. Esse pode ser o diferencial deste trabalho, pois focaliza os tipos de modelos que não somente parecem ser a gênese do conceito de relação e função, mas também que deram sentido e explicam o porquê de tal conceito ser apresentado como, segundo Finney e outros: “Uma **função** de um conjunto  $D$  para um conjunto  $R$  é uma regra que associa um único elemento em  $R$  a cada elemento de  $D$ ” (FINNEY; WEIR; GIORDANO, 2002, p.10).

O autor Youschkevith (1976) aponta que o desenvolvimento da noção de função compreende três fases. Na Antiguidade, são verificados casos de dependência entre duas quantidades, sem sobressaírem as noções gerais de quantidades variáveis e de funções. Na Idade Média, são concebidas as noções funcionais expressas sob a forma geométrica, mecânica, em especial, física, em que cada caso concreto de dependência entre duas quantidades era representado, preferencialmente, por um gráfico ou por uma descrição verbal. No período Moderno, começam a prevalecer expressões analíticas de funções, sendo o final do século XVII o momento mais intenso do desenvolvimento da noção de *função*, aproximando-se da que atualmente conhecemos. Dessa forma, fizemos uma pesquisa na literatura, reunindo modelos que se encontram distribuídos entre uma ou outra obra.

## Gênese do conceito de função nas relações entre variáveis

Acredita-se que a gênese do conceito se deu com as ideias de relação nas tabelas, com números ou variáveis, para resolver problemas cotidianos pelos babilônios em 2000 a. C. Encontramos essas ideias também com os gregos, no estudo de variáveis físicas como o som, por exemplo, e com os egípcios, nos estudos e nas descobertas dos astrônomos de Alexandria. Cajori (2007) observa que “como herança do século dezanove,  $y$  era chamado de função de  $x$

se existisse uma equação entre estas variáveis que tornasse possível calcular  $y$  para um dado valor de  $x$  situado em algum lugar entre  $-\infty$  e  $+\infty$ ” (p.534). Então, a origem dessa concepção pode ser analisada na Mesopotâmia, na Grécia e no Egito, onde já se tratava de relações entre variáveis sob o ponto de vista de equações.

### **Mesopotâmia (aproximadamente 2500 a. C.)**

Percebemos, na Babilônia, as noções sobre relações entre variáveis. Entre as mais de meio milhão de tábuas encontradas, 400 com conteúdos apenas matemáticos, há várias com problemas sobre relações entre variáveis ou sobre relações entre números. Nessas últimas, encontram-se tábuas de multiplicação, de inversos multiplicativos, de quadrados e cubos e de exponenciais.

Uma tábua essencial na álgebra babilônica era a de valores  $n^3 + n^2$  para todo  $n$  inteiro. Assim, segundo Iezzi *et al.* (2004), podemos associá-la à função  $f$ , cujo domínio é o conjunto dos números inteiros, definida por  $f(n) = n^3 + n^2$ . O autor afirma que, como o interesse era determinar os valores de  $c$  para que  $c = n^3 + n^2$ , pode-se verificar a presença das primeiras noções de função inversa, pois o que se procurava era o valor de  $n$  tal que  $f(n) = c$ .

As tábuas contendo problemas, por um lado, tratavam de situações do cotidiano, do comércio e de mensurações práticas e envolviam conhecimentos em geometria; assim, percebemos, claramente, a presença de relações entre variáveis. Por outro lado, as que envolviam, diretamente, a geometria, também mostravam ideias de funcionalidade. Para Eves (1997), a marca principal da geometria babilônica é seu caráter algébrico. Analisando as tábuas (cf. Fig. 1), encontramos, em base sexagesimal, três valores: o lado do quadrado, a diagonal do quadrado e uma constante  $b$ :

$$a = 30 \qquad b = 1;24,51,10 \qquad c = 42;25,35$$

À primeira vista, podemos afirmar  $c = a \cdot b$  já que multiplicar por 30 equivale a dividir por dois. Se  $a$  for considerado como lado do quadrado como sugere a figura e  $c$  a diagonal, então, usando a relação de Pitágoras, obtém-se:  $c^2 = 2a^2$ , donde  $c = \sqrt{2}a$ . Além de haver ótima aproximação para  $\sqrt{2}$ , já se usavam as ideias de relação entre variáveis na geometria, neste caso, o valor da diagonal, dependendo do valor do lado.

Figura 1: Quadrado e suas diagonais marcadas e três números



Fonte: (DALCÍN;OLAVE, 2012,p.54)

Assim como hoje, quando trabalhamos com as equações polinomiais, vários problemas levavam às resoluções de equações quadráticas. Talvez, os babilônicos tenham sido os primeiros a resolver, com exatidão, essas equações. De acordo com Guelli (1994), o trabalho de resolução das equações era feito pelos escribas que, depois de árduo aprendizado da Matemática, da leitura e da escrita, escolhiam tornar-se contadores ou dedicar-se ao ensino da Matemática. Por meio das tábuas, com grande esforço, escreviam os problemas e as etapas de resolução.

Qual é o lado do quadrado se a área menos o dobro do lado é vinte e quatro?

1-Tome a metade de dois, que é um, e multiplique um por ele mesmo.

2-Some o resultado a vinte e quatro, o que dá vinte e cinco.

3-Isto é, na verdade, o quadrado de cinco, que, somado à metade de dois, vai dar o lado do quadrado, que é igual a seis. (GUELLI ,1994, p.18)

Podemos, hoje, pensar neste problema como uma equação  $x^2 - 2x = 24$  e imaginar uma relação entre área e lado do quadrado, resultando em possível função. Para resolver essa equação da mesma forma que hoje, é possível transformá-la em um trinômio do quadrado perfeito, adicionando 1 ao primeiro membro, e, para não alterar a igualdade, adiciona-se 1 também ao segundo membro da igualdade:

$$(x - 1)^2 = 24 + 1$$

$$x - 1 = \sqrt{25}$$

$$x = 5 + 1$$

$$x = 6$$

Além disso, de acordo com Oliveira (1997), para os babilônicos, cada problema era uma situação nova, porque eles não desenvolveram regras gerais para solução de problemas semelhantes. No entanto, pelo que observamos e pela afirmação de Aaboe (1983), as

instruções dadas na resolução dos problemas são tão específicas que podemos esperar algum processo geral.

### **Grécia antiga (500 a. C.)**

Na Grécia antiga, notamos novas formas das ideias de funcionalidade. Os gregos, ao contrário dos babilônicos, contavam com métodos práticos, passados de pai para filho, para a resolução dos problemas. Nesse sentido, durante a metade do sexto século a. C., é observado o surgimento da matemática demonstrativa.

Em seguida, inaugura-se a eclosão do pensamento racional, a nova etapa no mundo grego. O processo de progressivas transformações econômicas, sociais e técnicas passou a oferecer ao homem explicações mais plausíveis, retiradas da experiência do cotidiano e desvinculadas da antiga concepção divina da realidade. Nesse contexto, aparece o primeiro registro científico, associando Matemática, Física e Música, ocorrido na escola pitagórica (NOVAES, 2006): a ideia de funcionalidade das relações quantitativas entre diferentes variáveis físicas. Relacionar intervalos musicais com razões numéricas foi a principal descoberta desse estudo.

Pitágoras de Samos foi filósofo, astrônomo e matemático grego nascido a cerca de 50 km de Mileto. Viveu no período de 580 a 497 a. C. e fundou, em 540 a. C., a Escola Pitagórica de Crotona, uma sociedade voltada para o estudo da Filosofia, das Ciências Naturais e da Matemática, tidas como base moral para a conduta de seus membros. Conta-se que Pitágoras, passando diante da oficina de um ferreiro, reconheceu os três acordes de quarta, quinta e oitava, ouvindo os barulhos feitos pelos golpes na bigorna. Ele percebeu que as diferenças de sons estavam ligadas aos pesados martelos, por isso pesou-os, e o primeiro continha doze, o segundo, nove, o terceiro, oito, o quarto, seis unidades. Ou seja, o que produzia o som de oitava pesava a metade, o que produzia o de quinta, dois terços, e o que produzia o de quarta, três quartos do mais pesado. (MATTEI, 2000).

Ele resolveu repetir a experiência com o monocórdio. Observe, na figura 2 abaixo, o instrumento composto por única corda estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma prancha e um cavalete móvel colocado sob a corda estendida que, quando tocada com mesma tensão, emite diferentes sons (MINGATTOS, 2006).

Figura 2: Monocórdio de Pitágoras (MINGATTOS, 2006).



Pitágoras percebeu que, pressionando um ponto da corda situado a  $\frac{3}{4}$  de seu comprimento em relação à extremidade e tocando-a a seguir, ouvia-se a quarta acima do tom emitido pela corda inteira. Se pressionasse um ponto situado a  $\frac{2}{3}$  do tamanho da corda, ouvia-se a quinta acima, e a  $\frac{1}{2}$  tinha a oitava do som original da corda. É importante observar que, se o comprimento original da corda for 12 unidades de medida, então, quando se reduzir para 9, ouve-se a *quarta*, para 8, a *quinta* e para 6 a *oitava*. De forma que 12, 9, 8 e 6 eram tidos, para os pitagóricos, como os números harmônicos, os quais possuem particularidades aritméticas notáveis. Além de 6 estar para 8 assim como 9 para 12, e 6 para 9 assim como 8 para 12, o número 9 é exatamente a média aritmética de 6 e 12, e 8, a média harmônica de 6 e 12, proporções também propostas pelos gregos (Rodrigues, 1999). Ao estabelecer relações, associando os intervalos musicais referentes às consonâncias perfeitas – oitava, quinta e quarta – às frações de números inteiros pequenos, os pitagóricos contribuíram com o desenvolvimento das ideias de função, pois o estudo do monocórdio apresentou a interdependência entre número, espaço e harmonia.

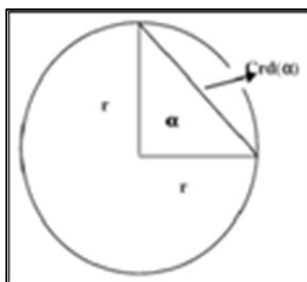
### **Alexandria (século II d. C.)**

Durante o período Alexandrino, surge a trigonometria com tábuas de correspondência, apresentando relações entre comprimento de cordas na circunferência e os seus correspondentes ângulos, confirmando a perceptível presença de dependência entre variáveis. A história da trigonometria está relacionada ao desenvolvimento da astronomia. Foi a partir de demandas na astronomia, como, por exemplo, determinar o tamanho do sol e da lua e encontrar o comprimento da superfície terrestre, que o homem inventou e aperfeiçoou a trigonometria mediante a necessidade de descobrir a distância entre dois pontos situados na superfície terrestre. Um dos trabalhos dos astrônomos e dos matemáticos era revelar o comprimento das cordas em uma circunferência qualquer.



Segundo Guelli (1993), o grego Hiparco de Nicéia construiu uma tabela com os valores das cordas de uma série de ângulos entre  $0^\circ$  e  $180^\circ$ , que expressa, claramente, a relação entre variáveis. Quando se dispõe o tamanho da corda correspondente a um ângulo, cria-se a *função corda*. (Cf. Fig. 3).

Figura 3: Localização da corda (LINDEGGER, 2000)

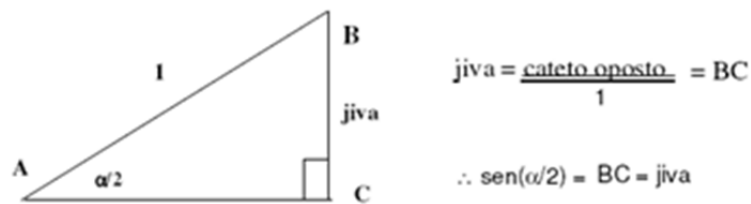


Por volta de 150 a.C., Ptolomeu de Alexandria desenvolveu seu principal trabalho baseado nos escritos de Hiparco, que foi considerado um modelo em astronomia à época, até os tempos de Copérnico e Kepler. O primeiro capítulo contém material astronômico preliminar, a tábua de cordas e uma explanação sucinta de como foi elaborada. Dividia-se o raio do círculo em 60 partes, e expressavam-se, em termos dessas partes, os comprimentos das cordas para ângulos de  $0^\circ$  a  $180^\circ$ , que variam de meio em meio grau. Verificamos, assim, o mesmo caso de relações apresentado nos trabalhos de Hiparco, pois, em um triângulo com dois dos lados representados pelo raio e o outro pela corda AB de uma circunferência, o tamanho da corda era expresso em função do ângulo central.

No final do século IV, surgem na Índia estudos que aperfeiçoaram as relações trigonométricas e que deram origem às funções trigonométricas que utilizamos hoje. Segundo Guelli (1993), esses estudos concentraram-se em um conjunto de textos matemáticos denominados Siddhanta - sistemas de astronomia e apresentavam a trigonometria baseada na relação entre a metade da corda e a metade do ângulo central. Dessa forma, havia a vantagem de trabalhar-se com triângulos retângulos.

Entre os anos 850 e 929, o árabe Al-Battani aperfeiçoou esse modelo, considerando uma circunferência de raio unitário. Chegaria, assim, à relação por ele denominada Jiva, referente à que hoje conhecemos por “seno” (cf. Fig. 4).

Figura 4: A ideia do raio de Al-Battani (LINDEGGER, 2000)



Al-Battani estava interessado em calcular a altitude do Sol. Para isso, foi necessário usar as razões trigonométricas e construir tábuas de senos (ou meias-cordas) mais precisas que as existentes à época, embora o nome *seno* ainda não tivesse sido utilizado, mas sim *jiva*, meia-corda (LINDEGGER, 2000). A importância da trigonometria sob o ponto de vista de funções pode ser observada mais tarde, nos trabalhos de Euler, Fourier, entre outros. De acordo com Cajori (2007, p.63), “Euler tratou da trigonometria como um ramo da análise e, consistentemente, considerou os valores trigonométricos como razões”. Assim, a gênese das ideias de Euler já estava estabelecida, baseava-se em relações entre lados de um triângulo retângulo, e, mais tarde, o próprio Euler sistematizaria um modo para as fórmulas trigonométricas, tomando, por exemplo, o seno inteiro igual a 1. Todas essas fundamentações acarretam bases para as leis físicas, em especial, as que tratam da propagação do som.

### A noção de função no estudo de dependência entre variáveis físicas

De acordo com Youschkevith, *apud* Oliveira (1997), é a partir do século XII que, de maneira precisa, as noções de função são expressas sob uma forma geométrica e mecânica, mas cada caso de dependência é expresso por meio verbal ou por gráficos.

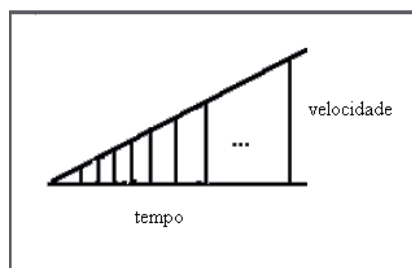
### Nicole Oresme (1323- 1382)

Conforme Oliveira (1997), no século XII, a noção de *função* começa a amadurecer nos estudos de fenômenos como luz, densidade, velocidade, distância, calor, entre outros, nas escolas de Filosofia Natural, em Oxford e Paris. Com Nicole Oresme, no século XIV, dá-se um passo à frente no desenvolvimento dessas ideias.

Num período de crise, à época da peste negra, de transformações políticas e econômicas e de pouco progresso na matemática, destaca-se Nicole Oresme. Em um dos seus cinco trabalhos, desenvolve a teoria das latitudes e das longitudes das formas que, segundo Oliveira (1997),

pode ser considerada a precursora dos esboços gráficos. O objetivo era representar, geometricamente, a intensidade de uma variável. Oresme estudava os movimentos uniformes e os não uniformes, buscava representar a intensidade da velocidade nesses movimentos e desenhava segmentos verticais, referentes à velocidade, perpendicular a outro segmento: o tempo.

Figura 5: Representação gráfica da velocidade (OLIVEIRA, 1997)



A figura 5 acima é um modelo de Oresme para o movimento não uniforme com velocidade inicial igual a zero. A representação para o movimento uniforme era um retângulo já que a velocidade, nesse caso, é constante. As representações gráficas da velocidade nos diferentes movimentos são encontradas em um de seus trabalhos intitulado *Tractatus de latitudinibus formarum*. Ele esperava, com o seu método, possibilitar às pessoas a compreensão eficaz da natureza das mudanças. A sua representação demonstra um avanço no desenvolvimento das ideias de variáveis dependentes e, de certa forma, de função. No entanto, segundo Oliveira (1997), ele não utilizava função nos seus trabalhos, pois suas configurações eram totalmente qualitativas e imaginárias, ou seja, ele nunca trabalhou com quantidades.

### **Galileu Galilei (1564-1642)**

O renomado filósofo e matemático viveu no período da grande revolução científica dos séculos XVI e XVII, considerada uma das mais profundas do pensamento humano. Ele teve como principal campo de estudo a mecânica, e um dos princípios que caracterizou seus trabalhos foi o da quantificação, desenvolvendo um esforço no sentido de representar as realidades observadas por unidades mensuráveis. Este princípio tinha como principal objetivo conseguir estabelecer relações matemáticas que, mais tarde, permitiriam elaborar leis generalizáveis a casos ou acontecimentos similares. (FERREIRA, 2004). Para Frota e Moraes:

Galileu concebe um método no qual a matemática terá um papel predominante. (...) Galileu é quem formula o movimento dos corpos em linguagem matemática. Em

outras palavras, Galileu não se limita à observação dos fenômenos, mas busca suas vinculações com as *claras demonstrações*. Ele passa dos fatos à ideia de sua conexão racional e desta volta aos fatos, mas com a dedução de sua necessidade. (FROTA; MORAES, 2001, p.18)

Frota e Moraes (2001) apresentam os quatro momentos do método de Galileu:

- 1- a observação imediata do fenômeno na sua complexidade;
- 2- a resolução da complexidade nos elementos mais simples traduzíveis em linguagem matemática (a notável ideia de modelagem);
- 3- a formulação de uma hipótese explicativa;
- 4- a experimentação.

Segundo Oliveira (1997), Galileu procurou reunir os diferentes conceitos com auxílio das leis inspiradas na experiência e na observação e repetia suas análises várias vezes, até chegar às conclusões mais verdadeiras possíveis. Essa insistência contribuiu para a evolução da noção de *função*. A primeira de suas grandes experiências deu origem à lei do pêndulo. Vejamos como ocorreu esse fato, para percebermos um exemplo de modelagem mediante as noções de dependências entre variáveis físicas.

Depois de repetir a experiência várias vezes, com um pêndulo construído por ele, Galileu chegou à relação: *o período de oscilação de um pêndulo independe da massa e é diretamente proporcional ao comprimento*. (FROTA; MORAES, 2001).

Hoje, essa relação é conhecida como *Leis do Isocronismo*:

- O período de oscilação do pêndulo depende do comprimento ( $l$ ) de sua haste: quanto maior o comprimento, maior o período;
- O período de oscilação não depende do peso do pêndulo: pesos diferentes têm sempre o mesmo período.

Sintetizando essas observações matematicamente, obtém-se a equação, com  $\theta$  pequeno a ponto de  $\sin \theta \cong \theta$ , que determina o período de oscilação de um pêndulo simples:  $T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ , onde:

$l$  = comprimento do pêndulo  
 $g$  = aceleração da gravidade local  
 $T$  = período de oscilação

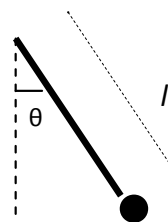


Figura 6: Pêndulo

Na figura 6, trata-se de claro exemplo de dependência funcional: o período de oscilação em função do comprimento da haste do pêndulo. Ressaltamos que, a essa época, não se conhecia uma equação geral que representasse uma classe inteira de equações, o que se fazia era apenas encontrar os valores desconhecidos numa equação com coeficientes numéricos específicos. A ideia de fazer uma distinção entre parâmetros e variáveis surgiu logo depois, com o matemático Viète (1540-1603).

### A época da formalização do conceito de função

Este tópico mostra aspectos do desenvolvimento do conceito de *função*, sem pretender, no entanto, descrever, de forma minuciosa, todos os modelos nem apresentar todos os matemáticos envolvidos. O objetivo é citar os fatos relevantes à evolução do conceito para que criemos uma linha contínua de desenvolvimento, até chegar ao conceito de *função* admitido atualmente.

### A evolução do conceito entre os séculos XVI e XX

Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665) desenvolveram, separadamente, as bases teóricas da geometria analítica e apresentaram um método para a representação de função. Com Descartes, o desenvolvimento da noção de *função* segue caracterizado por uma análise mais detalhada.

Em *La Géométrie*, de Descartes, de modo completamente claro, é sustentada a ideia de que uma equação em  $x$  e  $y$  é um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis de modo a permitir o cálculo dos valores de uma delas, correspondendo aos valores dados da outra. (OLIVEIRA, 1997, p.18)

Segundo Boyer (1996), o uso de coordenadas na obra de Fermat surgiu da aplicação da álgebra da Renascença aos problemas geométricos da Antiguidade. A característica de relacionar às funções equações algébricas estendeu-se ao cálculo infinitesimal com Newton e

Leibniz. Oliveira (1997) afirma que, em alguns dos trabalhos publicados, entre 1692 e 1694, Leibniz chama *função* os segmentos de retas obtidas por construção de retas, correspondendo a um ponto fixo e a pontos de uma curva dada.

Vale ressaltar que a análise infinitesimal desenvolvida por Newton e Leibniz até então tinha como principal objetivo estudar as curvas geométricas. Eles não visavam, exatamente, às funções, pois os problemas que deram origem ao cálculo eram geométricos e cinemáticos (SÁ, 2003).

Os primeiros conceitos de função desvinculados de geometria apareceram no século XVIII, com Johann Bernoulli (1667-1748) e Leonhard Euler (1707-1783). Bernoulli, em 1718, apresenta a primeira definição: “Chamamos *função de uma grandeza variável* a uma quantidade composta de um modo qualquer a partir desta grandeza variável e de constante” (YOUSCHKEVITCH, 1976, apud OLIVEIRA, 1997, p.19).

Euler usou a definição de Bernoulli, seu mestre, como base para novo conceito que formularia pouco depois, em 1748, na *Introductio in analysin infinitorum*, a obra mestra. Para Youschkevitch: “Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta de qualquer modo que seja desta quantidade e números ou quantidades constantes” (YOUSCHKEVITCH, 1976 apud OLIVEIRA, 1997, p.20).

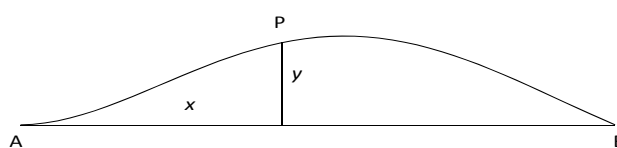
Durante o século XIX, ocorreu a fundamentação da análise em que houve um aprofundamento da concepção de *função* e uma correção das noções limitadas de Euler. Vários foram os estudiosos (Taylor, os Bernoulli, Euler, Lagrange, D’Alambert e Fourier) envolvidos nesse processo e a formulação matemática dos problemas em mecânica teve tanta ênfase no referido século a ponto de Lagrange escrever no prefácio de sua *Mecânica analítica*:

Eu me propus a reduzir a teoria desta ciência, e a arte de resolver os problemas que com ela se relacionam, a fórmulas gerais, cujo simples desenvolvimento fornece todas as equações necessárias para a solução do problema (...) Os métodos que aqui exponho não necessitam nem de construções nem de raciocínio geométricos ou mecânicos, mas apenas das operações algébricas...(LAGRANGE, 1788, apud ROSMORDUC, 1988, pág. 83).

A ideia de que uma função podia ser pensada como uma expressão analítica definida por uma série de potências foi posta em causa, no século XVIII, à medida que vários problemas da matemática aplicada mostravam o caráter restrito do conceito de dependência funcional. O

estudo das regularidades mecânicas, o movimento dos corpos celestes, a teoria das vibrações e a teoria do calor exigiam a utilização de novos métodos de descrição analítica, uma vez que essas regularidades já não podiam ser expressas numa forma tão simples como uma série de potências. A partir da segunda metade do século XVIII, o novo método foi utilizado para definir as dependências funcionais que expressavam essas regularidades: as séries trigonométricas. Importante aplicação nesse contexto, pela disputada polêmica que gerou e pela influência que exerceu na evolução do conceito de *função*, foi o problema da vibração das cordas sonoras.

Figura 7: Um esboço do modelo (CORREIA, 1999)



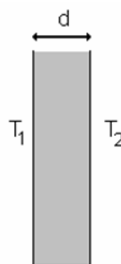
Na figura 7, uma corda elástica uniforme é presa em dois pontos A e B, a uma distância de 1 unidade. Consideremos o referencial cartesiano, em que A é a origem, AB é o eixo  $Ox$  e a linha perpendicular a AB é o eixo  $Oy$ . A corda assume a sua posição de equilíbrio ao longo do eixo  $Ox$ . Se oscilarmos a corda da sua posição inicial, ela inicia um movimento vibratório em virtude das tensões que agem nos seus pontos. Consideremos que esse movimento consiste de pequenas oscilações, isto é, que os pontos da corda tenham pequenas alturas da sua posição inicial. Logo, podemos admitir que, durante o movimento, cada ponto P da corda permanece na mesma reta vertical, perpendicular ao eixo  $Ox$ , isto é, tem abscissa constante (oscilações transversais). Também podemos supor que a força de tensão é a mesma em cada ponto. É possível encontrar uma equação que represente o movimento ondulatório da corda, sendo o deslocamento  $y$  de cada ponto uma função de  $x$  e do tempo  $t$ .

Segundo Silva (1995), modelar o primeiro passo é elencar as variáveis envolvidas, procurando idealizar algumas situações de tal modo que se possa colocar o problema em forma de equações. Observarmos que a modelagem faz apelo à realidade e significa o conhecimento. Daí advém a sua validade no contexto do ensino-aprendizagem de matemática.

Fourier, motivado também pelas ideias surgidas desse problema, publicou a *Théorie Analytique de la Chaleur* (1822), em que se analisa o problema da propagação do calor nos sólidos. Isto consiste em descrever o comportamento do fenômeno de propagação, buscando o que é estável e permanente, que se conserva inalterável com o passar do tempo, ou seja, a

equação que governa o comportamento do sistema (FARFÁN, 2003). Em 1822, Joseph Fourier propôs que o fluxo ou a corrente de calor  $q$  através de um corpo de espessura  $d$ , submetido a duas temperaturas  $T_1$  e  $T_2$  nas faces pode ser escrito:  $q = -kA(T_1 - T_2)/d$ , em que  $A$  é a área das faces e  $k$ , a condutividade térmica do material, considerando  $T_1$  menor que  $T_2$  (cf. Fig. 8).

Figura 8 - Ideia do modelo de Fourier.



Para Correia (1999), Fourier manifestou a certeza de que qualquer função, ainda que “descontínua”, podia ser representada por uma série trigonométrica, uma vontade que Euler, contra a alusão de Daniel Bernoulli, tinha rejeitado. Porém, Fourier não provou, nem podia provar, esta hipótese, mas deu exemplos que indicavam que Euler não tinha razão. Uma coisa é certa: Fourier possuía um conceito suficientemente geral para englobar as funções descontínuas no sentido atual, pois, segundo ele, uma função era representada pelo desenvolvimento em série trigonométrica apenas em parte do seu domínio, o que punha em causa uma das características básicas da visão algébrica setecentista do cálculo infinitesimal, aquilo a que se convencionou chamar a “generalidade da álgebra”. (CORREIA, 1999)

Esse contexto é importante, pois gerou a necessidade de estudar o desenvolvimento de uma função em série trigonométrica, não somente para funções contínuas, mas também para as contínuas por partes. Em 1837, Dirichlet sugeriu uma definição mais ampla de *função*, próxima da atual. Para Mendes (1994), em 1968, Boubarkis apresentou a definição de *função* como certo subconjunto do produto cartesiano  $E \times F$ , assim apresentado:

Sejam  $E$  e  $F$  dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável  $x$  de  $E$  e uma variável  $y$  de  $F$  é dita uma relação funcional em  $y$ , ou relação funcional de  $E$  em  $F$ , se qualquer que seja  $x \in E$ , existe um e somente um elemento  $y \in F$  que esteja associado a  $x$  na relação considerada. (MENDES, 1994 *apud* SÁ, 2003, p.13)

É importante notar que: “com esta definição e com a eliminação dos problemas lógicos que envolviam a construção do conjunto dos números reais, é possível elaborar, hoje, funções



muito mais abrangentes, em conjuntos quaisquer, e não apenas numéricos” (ZUFFI; PACCA, 1999, p.251). Esta característica foi essencial para a disseminação do conceito de *função* por diversas áreas do conhecimento, podendo, assim, ser utilizada em distintos modelos de correspondência entre variáveis, não sendo restrita apenas ao conjunto dos números reais.

### **A modernidade**

O conceito de *taxa de variação instantânea*, entre variáveis dependentes e independentes, é uma das ferramentas da matemática mais utilizada em áreas científicas e tecnológicas. Apresentamos um modelo advindo da Ecologia, nem tanto recente, mas que valida essa afirmação, e uma ideia de modelo computacional. Esse último é caracterizado essencialmente pela abstração, por entes irrealis, sendo utilizados como instrumento para ações reais.

Para Silva (1995), o tratamento matemático de problemas de áreas como a biologia ou a economia é recente e está baseado na ideia de traduzir um fenômeno do mundo físico em uma equação ou sistema de equações que poderão ser algébricas, diferenciais ou integrais. Isso é obtido pela análise e pela abstração de situações-problema com a escolha adequada de variáveis e suas relações.

Na ecologia, o conceito de *função* é essencial nos modelos matemáticos, nas previsões da distribuição e da abundância dos organismos, como o crescimento populacional, tratado com modelos exponenciais, logísticos, estruturados, entre outros, que procuram, por meio da análise das variáveis envolvidas, criar equações, para prever situações futuras. Mostraremos o modelo exponencial, por ser o primeiro a conter elementos que servem de base para os posteriores.

Imaginemos uma população de tamanho  $N$ , que varia em função do número de nascimentos “ $B$ ” e de mortes “ $D$ ” e que depende do deslocamento  $I - E$  de indivíduos (GOTELLI, 1959).

Assim:  $N_{T+1} = N_T + B - D + I - E$ .

A análise torna-se difícil se for considerado o número de migrações, então assumimos uma população fechada e a expressão acima reduz-se à:

$$N = N_T + B - D \text{ ou } \Delta N = B - D.$$

Em algumas vezes, é preciso alterar as expressões inicialmente encontradas, para melhorar ou facilitar a interpretação do fenômeno. No nosso caso, foi preciso, por exemplo, retirar as

variáveis de migração.

A variação do tamanho da população, ou o crescimento populacional, poderá ser descrito pela equação diferencial:  $\frac{\partial N}{\partial t} = B - D$  (\*), em que  $B$  e  $D$  representam a taxa de natalidade e de mortalidade, respectivamente. Se considerarmos  $b$  e  $d$  como taxa de natalidade e de mortalidade instantânea *per capita*, teremos:  $B = bN$  e  $D = dN$ , ou seja,  $\frac{\partial N}{\partial t} = (b - d)N$ .

Fazendo  $r = b - d$  igual à taxa de crescimento instantâneo, reduzimos (\*) a  $\frac{\partial N}{\partial t} = rN$ . Assim, o que temos é a variação da população em função do tempo. Usando o método de separação de variáveis, encontramos:  $N_t = N_0 e^{rt}$ . Essa expressão garante-nos que, conhecendo a taxa intrínseca, podemos prever o tamanho da população em um tempo futuro. Daí advém a importância das funções e da modelagem para o meio científico, que são ferramentas para, mediante a análise de uma situação, prever outras futuras e supor algumas passadas.

A fim de seguir uma linha suave no tempo, apresentamos uma utilização do conceito de *função* em modelos computacionais, caracterizando a modernidade e a abstração. Podemos interpretar uma função como uma “máquina” que transforma entradas válidas em saídas, univocamente. A *recursividade* na programação de computadores abrange a definição de uma função que pode recorrer a si própria. A recursão possibilita usar um programa de computador finito para definir, analisar ou gerar um estoque potencialmente infinito de sentenças, *designs* ou demais dados e está na base da Teoria da Computação, uma vez que a equivalência teórica entre as Máquinas de Turing (MT) e as funções  $\mu$ -recursivas é o fundamento das ideias sobre o computador moderno. Do ponto de vista teórico, a importância da MT está no fato de que representa um objeto matemático formal.

## Conclusão

É possível que a função seja a ferramenta matemática mais usada para modelar fenômenos naturais e reais e, porque não, abstratos também. Isto se deve ao fato de que uma função, principalmente se for contínua, possibilita prever acontecimentos e fenômenos, o que favorece armar estratégias para enfrentá-los, para interferir, para agir. Então, devemos tratar tal conceito de forma contextualizada, dando-lhe o significado original: modelar fenômenos.

## Referências

- AABOE, A. **Episódios da história antiga da matemática**. SBM, 1983.
- ALVARENGA, K. B.; VIANNA, C. J. A didática e as metodologias de ensino de Matemática. In: SILVA C.C.; SUANNO, M.V.R. (orgs). **Didática e Interfaces**. Rio de Janeiro: Descubra. 2007.
- BARBOSA D.; ALVARENGA K. B. O uso de erros geométricos como estratégia didático-pedagógica. In: **VIII ENCONTRO SERGIPANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 2008, Aracaju. CD, 2008.
- BARBOSA, J. C. Modelagem matemática: O que é? Por quê? Como? **Veritati**, n. 4, p. 73-80, 2004.
- BOYER, C. **História da matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.
- CAJORI, F. **Uma história da Matemática**. Rio de Janeiro: Moderna, 2007.
- CARAÇA, B. **Conceitos fundamentais da matemática**. 5. ed. Lisboa: Gradiva, 2000.
- CONTADOR, J. P. M. **Matemática, uma breve história**. v. II, São Paulo: Livraria da Física, 2006.
- CORREIA, C. **A evolução do conceito de função na segunda metade do século XVIII**. Tese de mestrado. Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Porto, 1999.
- DALCÍN, M.; OLAVAE, M. **Gente em obra. História Intereactiva de los orígenes de la matemática**. Uruguai: Palíndromo, 2012.
- EVES, H. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: UNICAMP, 1997.
- FARFÁN, R. M. Uma pesquisa em Educação Matemática. Da propagação do calor à noção de convergência. **Educação Matemática Pesquisa**. v.5, n. 2, São Paulo, 2003.
- FERREIRA, R. Galileu e sua importância epistemológica. **Revista Millenium On-line**, 29, pp. 162-167. 2004. Acessado em 24 de agosto, 2007. <http://www.ipv.pt/millenium/Millenium29/23.pdf>
- FINNEY, R. L, WEIR, M. D e GIORDANO, F. R., **Cálculo de Gerge B. Thomas Jr**, Volume 1, São Paulo: Addison Wesley, 2002.
- FROTA, P.; MORAES, M. Calculando com Galileu: os desafios da Ciência Nova. *Linguagens, Educação e Sociedade*, 6, p. 13-27. Teresina, 2003.
- GOTELLI, N. **A Primer of Ecology**. 2ª ed. Sinauer Associates, 1959.

GUELLI, O. **História da Equação do 2º grau**. Coleção *Contando a história da matemática*. São Paulo: Ática, 1984.

———. **Dando corda na trigonometria**. Coleção *Contando a história da matemática* São Paulo: Ática, 1993.

IEZZI, G; et al. **Matemática**. Volume I. 2ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

LEVY A. L.; ESPÍRITO SANTO A. O. Filosofia e modelagem matemática. **Revista Iberoamericana de Educación Matemática**, diciembre, n 8, p.13-25, 2006.

LINDEGGER, L. **Construindo os conceitos básicos de trigonometria no triângulo retângulo: uma proposta a partir da manipulação de modelos**. Tese de Mestrado em Educação Matemática. PUC. São Paulo, 2000.

MATTÉI, J. **Pitágoras e os pitagóricos**. São Paulo: Paulus, 2000.

MINGATTOS, D. Matemática e Música a partir do estudo do monocórdio e de figuras musicais. In : **III BIENAL DA SBM**. IME/ UFG, 2006.

NOVAES, C. Uma abordagem físico-matemática das qualidades fisiológicas do som. **III BIENAL DA SBM**. IME/ UFG, 2006.

OLIVEIRA, N. **O conceito de função: uma abordagem do processo de ensino-aprendizagem**. Dissertação de Mestrado, 1997. São Paulo: PUC-SP, 1997.

RODRIGUES, J. A matemática e a música. **Colóquio/Ciências**, 23, p.17-32, 1999.

ROSMORDUC, J, **Umás história da Física e da Química – De Tales a Einstein**, Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editor, 1988.

SILVA, C. M. S. As relações da matemática com outras áreas do conhecimento. **CHRONOS**, v. 18, n.2, p. 198-211, 1995.

SÁ, P.F.; SOUZA, G.S.; SILVA I. D. B. A construção do conceito de função: alguns dados históricos. **Traços**, 11, p.81-94. Belém: Unama, 2003.

VIANNA C. R. História da Matemática na Educação Matemática. In: **ANAIS VI ENCONTRO PARANAENSE DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. Londrina: UEL. p. 15-19, 2000.

ZUFFI, E. M. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Educação Matemática em Revista**. São Paulo, n. 9/10, p.10-16, abr. 2001.

ZUFFI, E.; PACCA, J. O conceito de função: seu desenvolvimento histórico e sua apresentação no ensino médio. In: **ANAIS do III SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA**. Espírito Santo: UFES, 1999.