http://dx.doi.org/10.5007/1981-1322.2014v9n1p179

La sucesión de Fibonacci en la sección de problemas de “el progreso matemático”

Fibonacci sequence in the problem section of “el progreso matemático”

Antonio M. Oller Marcén
oller@unizar.es

Vicente Meavilla Seguí
meavilla@unizar.es

Resumen

El Progreso Matemático fue la primera revista española dedicada íntegramente a las Matemáticas. Prácticamente durante toda su existencia contuvo una sección de problemas propuestos cuya temática mayoritaria fue la Geometría. Sin embargo, algo más de la décima parte de las cuestiones propuestas implicaban ideas ajenas a la Geometría. En este trabajo abordamos el estudio de las tres cuestiones relacionadas con la Sucesión de Fibonacci. En concreto, además de presentarlas y resolverlas, las ponemos en relación con trabajos de su proponente e ilustramos brevemente las ideas matemáticas que subyacen a ellas.

Palabras clave: *El Progreso Matemático*, Sucesión de Fibonacci, Siglos XIX-XX, Charles Ange Laisant, Zoel García de Galdeano.

Abstract

El Progreso Matemático was the first Spanish magazine devoted to Mathematics. During the most part of its existence, it contained a problem section where the proposed problems were mainly geometrical. Nevertheless about one tenth of the proposed questions involved non-geometrical ideas. In this paper we focus in the three questions involving Fibonacci sequence. In addition to present and solve them, we relate them to previous work by their proponent and we briefly illustrate the underlying mathematical ideas.

Keywords: *El Progreso Matemático*, Fibonacci sequence, XIX-XX centuries, Charles Ange Laisant, Zoel García de Galdeano.

Introducción

El Pamplonés Zoel García de Galdeano y Yanguas nació en 1846. Perito agrimensor, maestro, licenciado en Filosofía y Letras y, por último, licenciado en Ciencias Exactas en 1871. Ocupó cátedras de institutos en diversas ciudades españolas (Ciudad Real, Almería y Toledo) para finalmente, desde 1889 hasta 1918, ocupar una Cátedra (la de Geometría Analítica primero y la de Cálculo Infinitesimal después) en la Facultad de Ciencias de la Universidad de Zaragoza; ciudad en la que se licenciara 18 años antes y en la que fallecería 6 años después, en 1924. Este brevísimo apunte biográfico no puede ni debe ocultar la muy dilatada experiencia vital y profesional de García de Galdeano, de la que se da cumplida cuenta en trabajos como los de Rafael Rodríguez Vidal [1964], Elena Ausejo [2010] o Mariano Hormigón [2004].

El 20 de enero de 1891 apareció en Zaragoza, editado y dirigido por García de Galdeano, el primer número de *El Progreso Matemático*. García de Galdeano justifica, su aparición, en que "*es un hecho sorprendente que en España, donde tantos periódicos se publican, destinados a los fines más diversos, no exista uno cuyo objeto exclusivo sea la propaganda y el desenvolvimiento de las ciencias matemáticas*". En efecto, se trató de la primera publicación periódica española dedicada íntegramente a temas matemáticos.

Sobre los contenidos, la temática y el alcance de la revista puede consultarse el trabajo de Mariano Hormigón [1981, p. 90]. Según el citado trabajo, la estructura general de la revista era la propia de las publicaciones similares de la época:

1. Artículos y memorias sobre temas matemáticos (sección doctrinal).
2. Sección bibliográfica.
3. Artículos sobre filosofía, pedagogía e historia de las matemáticas.
4. Asuntos de información varia.

En la sección de variedades del número 7 de la revista (20 de julio de 1891) aparecieron dos problemas transcritos del *Journal des Mathématiques Elementaires*. Dichos problemas se presentan al hilo de una recensión de los números de junio y julio de la citada revista, sin una aparente intención de continuidad.

Sin embargo, en esa misma sección del número 8 (20 de agosto de 1891), aparece una "advertencia importante" en la que se indica el interés de "*no descuidar otros puntos de vista. Uno de estos es el que originan las cuestiones por resolver* [...], *como aliciente que ponga en juego la actividad de los lectores*". Con esta advertencia ve la luz una nueva sección del periódico que aparecerá consistentemente en todos los números de las dos etapas de la revista (excepto tan solo en 3 de ellos) desde este momento y hasta la desaparición final de la misma.

La sección de problemas de *El Progreso Matemático*

Como acabamos de señalar, es en el número 8 cuando nace la sección de problemas propiamente dicha y en el que se se inicia la numeración de las cuestiones propuestas (en las dos que se presentaron en el número 7 se indicó su numeración original en el *Journal des Mathématiques Elementaires*).

Inicialmente se presenta una colección de cuestiones que quedaron sin resolver en el periódico *Nouvelle Correspondence Mathématique*. Sin embargo pronto comienzan a aparecer cuestiones propuestas específicamente para el *Progreso* por parte de algunos colaboradores (especialmente Brocard y Van Aubel). Ya en el número 13 (15 de enero de 1892) aparece la primera cuestión propuesta por un colaborador español: J.J. Durán Loriga.

A lo largo de los 4 años (54 números) en los que se editó *El Progreso Matemático* en su primera etapa, aparecieron un total de 260 cuestiones. En su segunda etapa, que constó de 16 números editados a lo largo de 2 años, se propusieron 91 cuestiones más, para un total de 351. De estas 351 cuestiones, al cierre de la revista en diciembre de 1900 quedaron sin resolver un total de 99 (51 de la primera época y 48 de la segunda).

La temática de las cuestiones propuestas está muy acorde con los gustos de la época. La geometría [HORMIGÓN, 1983] ocupa un lugar fundamental. De las 351 cuestiones propuestas, tan sólo 39 son de temática no geométrica. Predominan las búsquedas de lugares geométricos, las construcciones de triángulos y cuadriláteros a partir de ciertos datos o propiedades y, en general, la llamada geometría del triángulo.

Entre las 39 cuestiones no geométricas encontramos una temática bastante variada. Por ejemplo, 3 de ellas están relacionadas con la resolución de ecuaciones diferenciales o en derivadas parciales [OLLER, 2012]. También encontramos algunos problemas (4 en total) relacionados con el análisis de ciertas desigualdades o incluso un caso en que se propone el cálculo de un producto infinito de números complejos.

Entre esta variedad de problemas no relacionados con la geometría vamos a centrar nuestra atención en tres de ellos, todos ellos propuestos por la misma persona y con una temática común: la Sucesión de Fibonacci.

La Sucesión de Fibonacci en la sección de problemas

La Sucesión (o serie) de Fibonacci es la sucesión de números naturales

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \ldots$$

que se define recursivamente del siguiente modo:

$$\begin{cases} F_1 = 0,\ F_2 = 1, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \text{ si } n \geq 3. \end{cases}$$

Aunque existen evidencias de que la primera aparición de estos números es anterior al siglo IX [SINGH, 1985], la historia ha querido que fuera bautizada por un problema más bien anecdótico que aparece en el Liber Abaci de Leonardo de Pisa [SIGLER, 2002].

Sea como fuere, las diversas aplicaciones prácticas de esta sucesión, así como una cierta ubicuidad en la naturaleza, han hecho que haya sido profusamente estudiada y generalizada [VAJDA, 1989] tanto por matemáticos "profesionales" como por amantes de la Matemática Recreativa. En consecuencia, no resulta sorprendente su aparición en la sección de problemas de una publicación como *El Progreso Matemático*.

Los tres problemas que vamos a analizar aparecieron con los números 286 (octubre de 1899), 296 y 297 (enero de 1900) durante la segunda época de la revista. Únicamente el último de ellos fue resuelto durante la existencia de la revista. Su solución, debida a José Rius y Casas, apareció publicada en el último número de la revista en diciembre de 1900.

Los enunciados

Si bien los analizaremos detenidamente más adelante, parece conveniente presentar aquí los enunciados de los tres problemas que nos ocuparán.

El problema 286:

Como hemos mencionado, este problema apareció en el número 6 de la revista, correspondiente al primer año de la 2º época de la misma. Se enunció del siguiente modo:

> **286** En la serie de Fibonacci.
>
> $$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_3 = 2 \quad \ldots\ldots$$
>
> todos los términos u_{16n} son múltiplos de 987.

El problema 296:

Este problema se propuso en el número 7, el segundo año de la 2º época de la revista. Su enunciado detallado fue como sigue:

> **296** Dada la serie de Fibonacci.
>
> $$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_3 = 2, \quad \ldots\ldots$$

se considera la nueva serie

$$u_0,\ u_1x,\ u_2x^2, \dots ,\ u_nx^n, \quad \dots\dots$$

y se pide la condición bajo la cual será convergente.

Suponiéndose x igual a $\frac{1}{k}$, y k número entero, hallar la suma de esta serie.

El problema 297:

Este problema apareció en el mismo número que el anterior. Dice así:

297 Se dan dos números enteros u_0, u_1 terminados por la misma cifra a, y se forma la serie

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \dots ,\ u_n, \quad \dots\dots$$

definida por la relación $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Se pide cuál será la cifra de las unidades de un término cualquiera u_n cuyo lugar n está dado.

Si bien los tres problemas comparten el mismo contexto: la Sucesión de Fibonacci, su temática y orientación son diversas. Esta diversidad contribuye a dotar a estos problemas de una apariencia meramente anecdótica, que los rebajaría a la categoría de meras curiosidades matemáticas. Sin embargo, veremos que todos ellos esconden ideas bastante profundas que pueden servir de puerta de entrada a tópicos matemáticos interesantes.

En este sentido, pensamos que son un buen ejemplo de cuestiones que, en palabras del propio García de Galdeano al presentar la sección de problemas, "*aumentan el interés* [de los lectores] *hacia las investigaciones matemáticas, por efecto de su intervención inmediata en este trabajo*".

El proponente

Los tres problemas que nos ocupan fueron propuestos por Charles Ange Laisant. Este francés de Indre nació en 1841 y tuvo una agitada vida política que le llevó desde el republicanismo radical, hasta el anarquismo antes de su muerte en 1920. El trabajo de Lamandé [2011] da noticia de las múltiples facetas del personaje.

En 1888 fue presidente de la Sociedad Matemática de Francia y fue fundador en 1894 (junto con Emile Lemoine) de la revista *L'Intermédiaire des mathématiciens* y en 1899 (junto con Henri Fehr) de *L'Enseignement Mathématique*. Este activismo, junto con afirmaciones que resultarían aún hoy radicales en ciertos círculos, como "*medir una ciencia por su utilidad es prácticamente un crimen intelectual*" [LAISANT, 1907, p. 121] muestran bien a las claras su interés por la enseñanza y la divulgación de la ciencia.

Así pues, no resulta sorprendente encontrar su nombre en el listado de colaboradores "oficiales" del *Progreso Matemático*. De hecho, la colaboración entre Laisant y García de Galdeano debió ser estrecha por cuanto [FURINGHETTI, 2003] el primer número de *L'Enseignement Mathématique* incluía una trabajo de García de Galdeano (que, además, fue miembro del primer comité de la revista) sobre la enseñanza de las Matemáticas en España.

Como matemático Laisant no fue demasiado brillante u original, pero sí bastante prolifico. Su producción científica [LAMANDÉ, 2011, pp. 286-287] comenzó en 1867, diez años antes de obtener su doctorado, y comprendió un buen número de artículos en revistas como *Nouvelles annales de mathématiques* (21 artículos), *Bulletin de la Société mathématique de France* (29 artículos) y *Nouvelle correspondance mathématique* (16 artículos) y 3 libros. Todo ello sin contar las colaboraciones en las revistas que fundó.

Una búsqueda entre su obra nos ha permitido encontrar algunos trabajos relacionados con la Sucesión de Fibonacci, que nos ayudarán a comprender el origen de los tres problemas analizados. En concreto hemos descubierto los siguientes trabajos:

- "Sur les séries récurrentes dans leurs rapports avec les équations" [LAISANT, 1881].
- "Les deux suites Fibonacciennes fondamentales $(u_n)(v_n)$" [LAISANT, 1920].
- "Observations sur les triangles rectangles en nombres entiers et les suites de Fibonacci" [LAISANT, 1919].

La existencia de estos trabajos de investigación prueba el interés, sostenido en el tiempo, de Laisant hacia las sucesiones recurrentes y, en concreto, hacia la Sucesión de Fibonacci.

Los problemas

En esta sección vamos a analizar detenidamente los problemas presentados en la sección anterior.

El problema 286:

Recordemos el enunciado de este problema:

> **286** En la serie de Fibonacci.
>
> $$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_3 = 2 \quad \ldots\ldots$$
>
> todos los términos u_{16n} son múltiplos de 987.

Para comprender los motivos que llevan a Laisant a proponerlo hemos de revisar el artículo [LAISANT, 1920]. Este trabajo se trata esencialmente de una tabla de valores de la Sucesión de Fibonacci u_n, así como de la sucesión asociada $v_n=u_{2n}/u_n$ hasta n=120. Esta tabla aparece reseñada por un investigador en Teoría de Números de la talla de Derrick Henry Lehmer [1941, p. 10, 109].

En este trabajo encontramos una pequeña introducción en la que se definen las dos sucesiones cuyos valores se dan posteriormente y en la que, además, se presentan algunas conjeturas relativas a la divisibilidad de ciertos términos de las mismas que la tabla aportada "*permite verificar*". Una de ellas es la siguiente:

> "*Se puede comprobar fácilmente que* u_{5n} *es siempre un múltiplo de 5* […] *que* u_{12n} *es un múltiplo de 9 …*"

A la vista de este tipo de conjeturas, resulta claro el origen del problema propuesto. En la tabla puede verificarse de modo directo que u_{16}, u_{32}, u_{48},…, u_{112} son todos ellos múltiplos de 987. ¿Cómo probarlo en general? Ignoramos si Laisant tenía la respuesta a este problema. Además, este problema 286 fue uno de los 99 que quedaron sin resolver al cesar la publicación de la revista.

Es interesante observar que justamente u_{16} = 987 por lo que el problema original podría haberse enunciado del siguiente modo: "todos los términos u_{16n} son múltiplos de u_{16}". Este enunciado alternativo resulta mucho más sugerente y se presta a la siguiente generalización:

> Probar que en la serie de Fibonacci los términos u_{kn} son múltiplos de u_k.

La demostración de esta generalización es sencilla si hacemos uso de una de las múltiples relaciones recurrentes que ligan los términos de la Sucesión de Fibonacci. En concreto, es relativamente fácil probar que:

$$u_{kn} = u_{k(n-1)+1}u_k + u_{k(n-1)}u_{k-1}$$

De donde, por inducción, se sigue inmediatamente el resultado.

El problema 296:

Este es el problema que involucra ideas más profundas. Su enunciado, recordemos, era:

> **296** Dada la serie de Fibonacci.
>
> $$u_0 = 0,\ u_1 = 1,\ u_2 = 1,\ u_3 = 2,\ \ \ldots\ldots$$
>
> se considera la nueva serie
>
> $$u_0,\ u_1 x,\ u_2 x^2, \ldots,\ u_n x^n,\ \ \ldots\ldots$$
>
> y se pide la condición bajo la cual será convergente.
>
> Suponiéndose x igual a $\frac{1}{k}$, y k número entero, hallar la suma de esta serie.

La primera pregunta tiene carácter elemental, y para responderla resulta conveniente utilizar la fórmula general de la sucesión en lugar de su expresión por recurrencia. Esta fórmula es bien conocida y recibe el nombre de "Fórmula de Binet", aunque parece ser [KNUTH, 1997, sec. 1.2.8.] que el primero en utilizarla fue De Moivre:

$$u_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta},$$

donde α y β son las raíces de la ecuación $x^2 - x - 1 = 0$.

Utilizando esta fórmula, si suponemos que $\alpha > \beta$, tenemos que

$$u_n x^n = \frac{(\alpha x)^n}{\alpha - \beta}\left(1 - \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^n\right).$$

Por lo que la nueva sucesión converge si y sólo si $x \leq \alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

A la vista de este sencillo desarrollo resulta curioso que esta cuestión, como la anterior, quedara sin resolver durante el periodo de vida de la revista.

Para responder a la segunda parte del problema podemos recurrir a Laisant [1881]. En ese trabajo sobre sucesiones recurrentes en general encontramos la idea necesaria, así como posiblemente el motivo por el que Laisant consideró interesante esta pregunta. En la primera parte de este trabajo se habla de fracciones generatrices; esa es la parte esencial para resolver esta cuestión

En concreto, siguiendo el trabajo de Laisant [1881, p. 222] se concluye que la fracción generatriz de la suma

$$u_0 + u_1 x + u_2 x^2 + u_n x^n + \cdots$$

es $\frac{1}{1-x-x^2}$, por lo que la suma buscada es justamente

$$S = \frac{k^2}{k^2 - k - 1} \quad (\text{si } x = 1/k)$$

Es interesante señalar que este tipo de cuestiones, tal y como indica Laisant en la introducción, ya habían sido abordadas con anterioridad por Daniel Bernouilli, Euler y Legendre.

El problema 297:

El enunciado de este problema es, posiblemente, el de apariencia menos interesante:

297 Se dan dos números enteros u_0 , u_1 terminados por la misma cifra *a*, y se forma la serie

$$u_0,\ u_1,\ u_2, \dots ,\ u_n, \quad \dots\dots$$

definida por la relación $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$. Se pide cuál será la cifra de las unidades de un término cualquiera u_n cuyo lugar *n* está dado.

Evidentemente esta cuestión es equivalente a estudiar la Sucesión de Fibonacci módulo 10. Lagrange [1877] ya estaba al tanto de que la cifra de las unidades de esta sucesión se repite con periodo 60. De hecho, es trivial observar (utilizando el Principio del Palomar) que la Sucesión de Fibonacci es periódica módulo cualquier entero *m*.

Una cuestión bien distinta es calcular dichos periodos en función de *m*. El valor □(*m*) de dicho periodo recibe el nombre de "periodo pisano de *m*" y ha recibido bastante atención en la literatura [ROBINSON, 1963; FULTON Y MORRIS, 1969]. De hecho, la llamada "Conjetura de Wall" [WALL, 1960] que afirma que para cada primo *p*

$$\pi(p^k) = p^{k-1}\pi(p)$$

permanece todavía abierta.

De los tres problemas que estamos analizando, este es el único que fue resuelto durante la existencia de la revista. En el último número (nº 18 de la 2ª época), correspondiente al mes de diciembre de 1900 apareció una bastante detallada respuesta de José Rius y Casas, por aquel entonces catedrático de la Universidad de Zaragoza [RODRÍGUEZ VIDAL, 1980].

En su solución, Rius y Casas analiza con todo detalle la situación propuesta, concluyendo que para a = 1 (la Sucesión de Fibonacci original) el periodo es 60 al igual que para a = 3, 7 y 9; mientras que si a = 2, 4, 6 u 8 el periodo es 20 y si a = 5 el periodo es 3.

Pese a que su trabajo es extrapolable al caso de otros módulos distintos de 10, su solución se basa, tras unas pequeñas consideraciones teóricas en el cálculo directo de los periodos módulo 2 y módulo 5. No hay, pues, ninguna idea profunda que hubiera podido servir para abordar, siquiera superficialmente, el caso general.

Conclusiones

El Progreso Matemático fue la primera revista española dedicada íntegramente a la Matemática. En este trabajo hemos abordado un estudio muy parcial de una de las secciones más importantes durante el periodo de publicación de la revista: la sección de problemas. En concreto nos hemos centrado en los tres problemas publicados cuyo contexto común fue la Sucesión de Fibonacci.

Los gustos de la época, claramente orientados hacia la geometría, marcan la singularidad de estos problemas y, posiblemente, explican por qué sólo uno de los problemas fue resuelto.

En las secciones anteriores, además de presentar los problemas y resolverlos, hemos tratado de ponerlos en relación con algunos trabajos previos de su proponente, que ayudasen a comprender el origen de los mismos. En concreto dos de ellos (el 286 y el 296) tienen un origen fácilmente reconocible en sendos artículos de Laisant.

También resulta interesante observar cómo el tercero de los problemas propuestos, el número 297, es susceptible de una generalización que lleva a cuestiones abiertas todavía hoy en día.

Pensamos que el estudio detallada de la sección de problemas de *El Progreso Matemático*, clasificándolos, buscando su origen y observando quiénes fueron sus proponentes y resolutores es una tarea interesante y que merece la pena ser abordada en detalle. Este trabajo, junto con otros similares [OLLER, 2012] pueden como primer paso en esa dirección.

Bibliografía

AUSEJO, E. (2010) "Zoel García de Galdeano y Yanguas (Pamplona, 1846 - Zaragoza, 1924)". *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, *73*, 5-22.

FULTON, J.D. Y MORRIS, W.L. (1969) "On arithmetical functions related to the Fibonacci numbers". *Acta Arithmetica*, *16*, 105-110.

FURINGHETTI. F. (2003) "L'education mathématique dans une perspective internationale: la contribution de la revue L'Enseignement Mathématique". En *One Hundred Years of L'Enseignement Mathématique*. *Proceedings of the EM–ICMI Symposium*. Ginebra, SNO-KUNDIG, 19-46.

HORMIGÓN, M. (1981) "El Progreso Matemático (1891-1900). Un estudio sobre la primera revista matemática española". *Llull*, *4*, 87-115.

HORMIGÓN, M. (2004) "Una aproximación a la biografía científica de Zoel García de Galdeano". *La Gaceta de la RSME*, *7(1)*, 281-294.

KNUTH, D.E. (1997) *The art of computer programming*. 3ª edición, Reading, Addison-Wesley, 5 vols.

LAGRANGE, J.L. (1867) *Oeuvres de Lagrange*. Paris, Gauthier-Villars, 14 vols. Edición de J.A. Serret.

LAISANT, C.A. (1881) "Sur les séries récurrentes dans leurs rapports avec les équations". *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques*, *5(1)*, 218-249.

LAISANT, C.A. (1907) *La Mathématique, philosophie, enseignement*. 2ª edición, Paris, Gauthier-Villars.

LAISANT, C.A. (1919) "Observations sur les triangles rectangles en nombres entiers et les suites de Fibonacci". *Nouvelles annales de Mathématiques*, *19*, 391-397.

LAISANT, C.A. (1920) "Les deux suites Fibonacciennes fondamentales $(u_n)(v_n)$". *Enseignement Mathématique*, *21*, 52-56.

LAMANDÉ, P. (2011) "Une personnalité du monde de l'Éducation nouvelle: Charles Ange Laisant (1841–1920) et son combat politique pour une éducation rationnelle fondée sur la science". *Paedagogica Historica*, *47(3)*, 283-301.

LEHMER, D.H. (1947) *Tables in the Theory of Numbers*. Washington, National Academy of Sciences.

OLLER, A.M. (2012) "Ecuaciones diferenciales en la sección de problemas de El Progreso Matemático". *Boletín electrónico de la SEMA*, *3*, 9-14.

ROBINSON, D.W. (1963) "The Fibonacci matrix modulo m". *The Fibonacci Quarterly*, *1(2)*, 29-36.

RODRÍGUEZ VIDAL, R. (1964) "Homenaje a la memoria de D. Zoel García de Galdeano". *Gaceta Matemática*, *1*, 3-7.

RODRÍGUEZ VIDAL, R. (1980) "Noticia y biografía de la Revista Trimestral de Matemáticas (En homenaje a la memoria de José Rius y Casas)". *Publicacions Matemàtiques*, *20*, 55-59.

SIGLER, L.E. (2002) *Fibonacci's Liber Abaci. A translation into modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculation*. New York, Springer Verlag.

VAJDA, S. (1989) *Fibonacci & Lucas numbers, and the Golden section. Theory and applications*. Chichester, John Wiley and sons.

WALL, D.D. (1960) "Fibonacci series modulo m". *American Mathematical Monthly*, *67*, 525-532.